УДК 621.396: 517.9

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ *H*-ПОЛЯРИЗАЦИИ НА НЕЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В.С.Эминова, И.С.Эминов

Институт электронных и информационных систем НовГУ, eminovsi@mail.ru

Исследовано интегро-дифференциальное уравнение задачи дифракции *H*-поляризации на незамкнутой поверхности вращения. Для решения уравнения использована аналитическая модификация метода Галеркина. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, дифракция, коэффициенты Ламе, интегральное уравнение, метод Галеркина

In the article the integro-differential equation of the problem of *E*-polarization diffraction on open-ended surface of revolution is researched. The analytical modification of Galerkin method is developed for solution of the equation. The results of numerical calculations are included.

Keywords: integro-differential equation, diffraction, Lame coefficients, integral equation, Galerkin method

1. Сведение исходного уравнения к безразмерному интегро-дифференциальному уравнению

Рассмотрим незамкнутую поверхность S, образованную вращением гладкой кривой вокруг оси Z в декартовой системе координат X, Y, Z. Связь декартовых координат с криволинейными задается выражениями

$x=\xi(\tau)\cos\varphi,\ \ y=\xi(\tau)\sin\varphi,\ \ z=\eta(\tau),\ \ -1\le\tau\le1,\ \ 0<\varphi\le2\pi,$

учитывая которые вычислим коэффициенты Ламе

$$H_\tau=\sqrt{x_\tau'^2+y_\tau'^2+z_\tau'^2}=\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)},\ \ H_\varphi=\xi(\tau),\ \ \xi(\tau)\ge0.$$

Интегро-дифференциальное уравнение относительно плотности поверхностных токов в осесимметричной задаче дифракции H-поляризации имеет вид [1]

$$\iint_S j_\tau(t)\frac{1}{H_\tau}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}H_{\varphi'}dtd\varphi'-$$

$$-k^2\iint_S j_\tau(t)(\vec e_\tau\cdot\vec e_t)\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}H_tH_{\varphi'}dtd\varphi'=i\omega\varepsilon E_\tau^0(\tau).\quad(1)$$

Здесь $\vec e_\tau$ и $\vec e_t$ означают орты, касательные к образующим в точках τ и t. Переходя в уравнении (1) от плотности поверхностных токов к полному току по формуле $I(\tau)=2\pi r(\tau)j_\tau(\tau)$, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}K(\tau,t)dt+\int_{-1}^{1}I(t)S(\tau,t)dt=4\pi iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau),\quad(2)$$

где $K(\tau,t)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\frac{\exp(-ikR)}{kR}d\varphi,$

$$S_1(\tau,t)=-\frac{(kH_\tau)(kH_t)}{\pi}\int_0^\pi(\vec e_\tau\cdot\vec e_t)\frac{\exp(-ikR)}{kR}d\varphi,$$

$$R=\sqrt{[\eta(\tau)-\eta(t)]^2+[r(\tau)-r(t)]^2+4r(\tau)r(t)\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

2. Выделение главного гиперсингулярного оператора

Ядро $K(\tau,t)$ имеет логарифмическую особенность. Выделяя особенность [2], преобразуем уравнение (2) к виду

$$\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}\left(\frac{1}{\pi k\sqrt{r(\tau)r(t)}}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\right)dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}(K_1(\tau,t))dt+\int_{-1}^{1}I(t)S(\tau,t)=4\pi iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau).\quad(3)$$

Продифференцировав ядро первого слагаемого, перейдем к новой неизвестной функции по формуле

$$u(t)=\frac{1}{\sqrt{kr(t)}}I(t)$$

и одновременно умножим все уравнение (3) на функцию $\sqrt{kr(\tau)}$. В результате получим гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{r'(\tau)}{r(\tau)}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{r'(t)}{r(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{r'(\tau)r'(t)}{r(\tau)r(t)}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+$$
$$+\int_{-1}^{1}u(t)k\sqrt{r(\tau)r(t)}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}(K_1(\tau,t))dt+$$
$$+\int_{-1}^{1}u(t)k\sqrt{r(\tau)r(t)}S(\tau,t)dt=4\pi i\sqrt{kr(\tau)}H_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau). \quad (4)$$

Структура этого уравнения определяется положительно определенным гиперсингулярным оператором, первым слагаемым в левой его части. В заключение подчеркнем, что уравнение (4) является точным, при его выводе не делалось никаких приближений.

3. Численно-аналитический метод. Вычисление матричных элементов

В задачах дифракции уравнение (4) эффективно решается методом Галеркина. А в задачах возбуждения, когда источники первичного поля расположены вблизи поверхности дифракции, метод Галеркина не эффективен. В этом случае уравнение (4) можно решить численно-аналитическим методом [3]. Неизвестную функцию ищем в виде бесконечного разложения

$$u(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\varphi_n(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin[n\arccos(\tau)]. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4) и сведем интегро-дифференциальное уравнение к эквивалентной бесконечной системе вида

$$c_n+\sum_{m=1}^{+\infty}c_mM_{mn}=e_n,\ 1\le n<+\infty, \quad (6)$$

которая является системой Фредгольма второго рода. Согласно численно-аналитическому методу первые N неизвестных системы (6) находятся из решения усеченной системы

$$c_n+\sum_{m=1}^{N}c_mM_{mn}=e_n,\ 1\le n\le N,$$

а остальные неизвестные определяются по формуле

$$c_n=e_n,\ N<n<+\infty.$$

Матричные элементы гиперсингулярного оператора находятся аналитически, а остальных слагаемых — численно, с применением ЭВМ. Для вычисления матричных элементов применяются следующие методы. Вначале производится интегрирование по частям, и дифференцирование с ядра интегрального оператора переводится на базисные функции. В результате дифференцирования базисных функций появляются множители вида $1/\sqrt{1-t^2}$, которые обращаются в бесконечность, когда $t\to\pm1$. Для избавления от особенности используем замены переменных: $t=\cos\alpha$, $\tau=\cos\beta$. В результате указанных преобразований матричные элементы сводятся к интегралам от непрерывных функций.

4. Результаты численных расчетов

В качестве примера рассмотрим биконическую поверхность, которая задается соотношениями

$$r(\tau)=\begin{cases}\alpha l|\tau|+a, & |\tau|\ge t_0,\\ \alpha l\left(\dfrac{\tau^2}{2t_0}+\dfrac{t_0}{2}\right)+a, & |\tau|<t_0,\end{cases}\qquad \eta(\tau)=l\tau.$$

Отметим, что функция $r(\tau)$ является непрерывно дифференцируемой.

Правую часть интегро-дифференциального уравнения (4) задаем в виде

$$H_\tau E_\tau^0(\tau)=U_0f(\tau),\quad f(\tau)=\frac{1}{2T}\begin{cases}1,|\tau|\le T,\\0,|\tau|>T,\end{cases}$$

напряжение $U_0=1B$.

Сходимость численно-аналитического метода

N	$a=\frac{l}{20}$, $\alpha=0{,}02$, $T=1$, $t_0=0{,}1$, $\frac{l}{\lambda}=0{,}19$		$a=\frac{l}{20}$, $\alpha=0{,}02$, $T=0{,}01$, $t_0=0{,}1$, $\frac{l}{\lambda}=0{,}19$	
	ReI	ImI	ReI	ImI
2	0,0069080	0,0064150	0,0095159	0,0123593
3	0,0068826	0,0063834	0,0094358	0,0123451
4	0,0068667	0,0063638	0,0093859	0,0122893
5	0,0068677	0,0063648	0,0093885	0,0122266
6	0,0068643	0,0063613	0,0093789	0,0122232
7	0,0068635	0,0063606	0,0093768	0,0122051
8	0,0068630	0,0063601	0,0093754	0,0121802
9	0,0068626	0,0063597	0,0093741	0,0121574
10	0,0068624	0,0063597	0,0093736	0,0121372

В табл. приведены значения тока в нуле: $I(0)$. Таблица показывает быструю сходимость численно-аналитического метода в зависимости от числа базисных функций.

5. Выводы

Исследовано одномерное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение для нахождения поверхностных токов в задаче дифракции H-поляризации на незамкнутой идеально проводящей поверхности вращения. Решена трудоемкая задача вычисления матричных элементов, возникающих при использовании метода Галеркина. Продемонстрирована эффективность численно-аналитического метода при решении интегро-дифференциального уравнения.

1. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
2. Сочилин А.В., Эминов И.С., Эминов С.И. Интегро-дифференциальные уравнения линейных, биконических и криволинейных вибраторных антенн // Антенны. 2010. №12. С.27-34.
3. Эминов С.И., Сочилин А.В. Численно-аналитический метод решения интегральных уравнений вибраторных антенн // Радиотехника и электроника. 2008. Т.53. №5. С.553-558.

Bibliography (Transliterated)

1. Zakharov E.V., Pimenov Ju.V. Chislennyjj analiz difrakcii radiovoln. M.: Radio i svjaz', 1982. 184 s.
2. Sochilin A.V., Ehminov I.S., Ehminov S.I. Integro-differencial'nye uravnenija linejjnykh, bikonicheskikh i krivolinejjnykh vibratornykh antenn // Antenny. 2010. №12. S.27-34.
3. Ehminov S.I., Sochilin A.V. Chislenno-analiticheskijj metod reshenija integral'nykh uravnenijj vibratornykh antenn // Radiotekhnika i ehlektronika. 2008. T.53. №5. S.553-558.