Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

(НовГУ)

Великий Новгород

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ 2

РАЗДЕЛ «КИНЕМАТИКА»

конспект лекций

для студентов дневной и заочной сокращенной форм обучения

по направлениям:

151900.62 – конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 140100.62- теплоэнергетика и теплотехника, 190600.62- эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 270800 -строительство, 110800.62- агроинженерия

2013

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Механическое движение – это изменение положения одного тела относительно другого, происходящее в пространстве и во времени

Системой отсчета называют систему координат, связанную с одним из тел, по отношению к которому изучается движение другого тела. Если тело движется, то система отсчета подвижна; если тело в покое, то система отсчета неподвижна.

Основные задачи кинематики:

1. **Установление закона движения тела** по отношению к выбранной системе отсчета.
2. **Определение по заданному закону движения** тела кинематических характеристик этого движения (траектории, скорости, ускорения, угловых скорости и ускорения и т.д.).

2. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Движение точки считают заданным, если известен способ, позволяющий установить её положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Траекторией называют геометрическое место последовательных положений движущейся точки в выбранной системе отсчета. **Движение точки** называют криволинейным, если точка перемещается по кривой линии, и прямолинейным, если она перемещается по прямой линии. При этом вид траектории зависит от системы отсчета.

2.1. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение.

Векторный способ задания движения заключается в задании положения точки радиус – вектором, который является векторной функцией времени относительно выбранной точки отсчета (Рисунок 1).

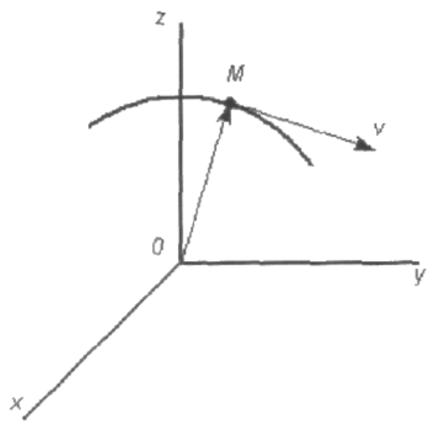


Рисунок 1.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,. \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) называют **законом движения точки** в векторной форме.

Скорость точки характеризует быстроту и направление движения точки и равна производной радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \tag{2.2}$$

В механике производную по времени обозначают точкой над переменной.

Вектор скорости точки направлен по касательной к траектории точки в сторону её движения.

Ускорение точки характеризует быстроту изменения величины и направления скорости точки и равно первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} \ . \qquad (2.3)$$

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в функции времени.

Системы координат могут быть различными: **декартовы**, **полярные**, **сферические**, **цилиндрические** и т.д.

В **декартовой системе координат** (Рисунок 2) уравнениями движения точек будут:

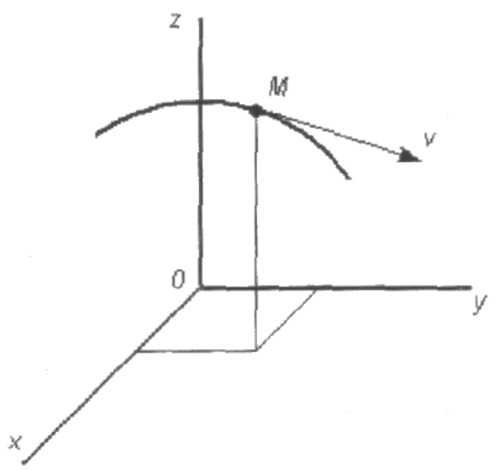


Рисунок 2.

$$\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \qquad (2:4)$$

Уравнения движения (2.4) являются также уравнениями траектории точки в параметрическом виде, где роль параметра играет время t. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, необходимо исключить время t из уравнений (2.4). Для этого надо выразить t из одного уравнения и подставить в остальные.

Переход от векторного способа к координатному. Движение точки M в векторной форме в декартовой системе координат (Рисунок 3):

$$\vec{r} = r_x(t)\cdot\vec{i} + r_y(t)\cdot\vec{j} + r_z(t)\cdot\vec{k}, \tag{2.5}$$

где $r_x(t)=x$; $r_y(t)=y$; $r_z(t)=z$ - проекции радиус-вектора, равные координатам точки M.

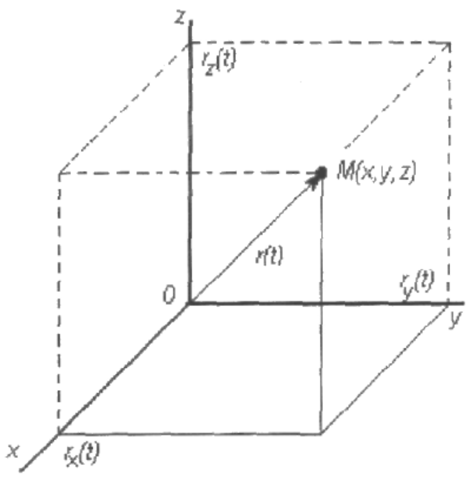


Рисунок 3.

Уравнение (2.5) с учетом (2.4):

$$\vec{r} = f_1(t)\cdot\vec{i} + f_2(t)\cdot\vec{j} + f_3(t)\cdot\vec{k}, \tag{2.6}$$

Из выражения (2.6) следует, что если движение точки задано векторным способом, то можно перейти к координатному и наоборот.

Скорость точки в декартовых координатах.

$$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}\ , \tag{2.7}$$

где V_x, V_y, V_z - проекции вектора скорости на соответствующие оси координат.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ , \quad V_x = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\ , \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{2.8}$$

Косинусы углов, образованных вектором скорости с осями координат:

$$\begin{aligned} \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,x\right) &= \frac{V_x}{V}, \\ \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,y\right) &= \frac{V_y}{V}, \\ \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,z\right) &= \frac{V_z}{V}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ускорение точки в декартовых координатах:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\ , \tag{2.10}$$

где a_x, a_y, a_z- проекции вектора ускорения на соответствующие оси координат:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{V}_z = \ddot{z} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Косинусы углов, образованных вектором ускорения с осями координат:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,x\right) = \frac{a_x}{a}$$
$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,y\right) = \frac{a_y}{a} \qquad (2.12)$$
$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,z\right) = \frac{a_z}{a}$$

Естественный способ задания движения.

Движение точки считается известным, если заданы (Рисунок 4):

1. Траектория точки.
2. Начало отсчета.
3. Направление движения.
4. Закон движения точки по траектории S=S(t).

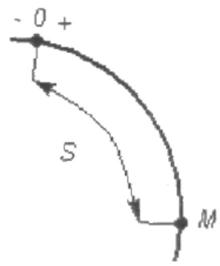


Рисунок 4.

Закон движения S=S(t) также называют **дуговой координатой.**

Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой.

Для исследования движения точки **при естественном способе** задания движения применяют естественные оси: касательную, главную нормаль, бинормаль.

При движении точки по траектории естественные оси перемещаются вместе с точкой.

Скорость точки при естественном способе задания движения:

$$\vec{V} = \dot{S} \cdot \tau$$

или (2.13)

$$\vec{V} = V \cdot \vec{\tau} ,$$

где $\vec{V} = \dot{S}$ называют алгебраической скоростью, которая представляет собой проекцию вектора скорости на касательную **Т.**

Если $\dot{S}$ >0, то вектор скорости направлен по $\vec{\tau}$, т.е. в сторону возрастания значений S, а если $\dot{S}$ <0, то вектор скорости направлен в сторону убывающих значений угловой координаты.

Ускорение точки при естественном способе задания движения (Рисунок 5).

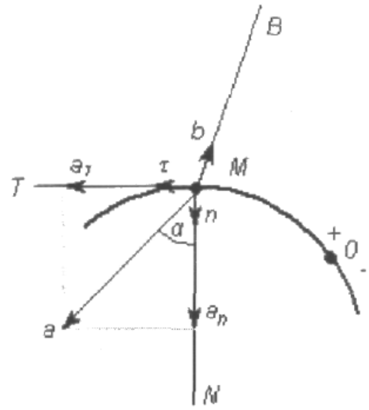
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n + \vec{a}_b \tag{2.14}$$

Вектор касательного ускорения:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} = a_\tau \vec{\tau} \tag{2.15}$$

Модуль касательного ускорения (проекция вектора ускорения на касательную):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \tag{2.16}$$



$\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ - единичные векторы

Рисунок 5.

Вектор нормального ускорения:

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \tag{2.17}$$

где ρ - радиус кривизны траектории в точке М.

Модуль нормального ускорения (проекция нормального ускорения на главную нормаль):

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \tag{2.18}$$

Так как $a_n > 0$, то нормальное ускорение всегда направлено в сторону вогнутости траектории.

Траектория вектора $\vec{a}$ на бинормаль $a_b = 0$

Следовательно, из (2.14):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{2.19}$$

Тангенс отклонения вектора ускорения от нормали:

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} \tag{2.20}$$

Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю, а нормальное – изменение вектора скорости по направлению.

Переход от координатного к естественному способу задания движения.

Задано движение точки координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Для перехода от координатного способа к естественному необходимо:

1. Установить траекторию, если возможно, т.е. получить уравнение траектории в явном виде: $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$.
2. Определить закон движения по этой траектории S=S(t) по формуле

$$S = \int_o^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt$$

3. Установить начало отсчета, подставив в уравнение движения начальное время. Если это время не задано, подставляют t_0=0.
4. Определить положительное направление движения, которое можно узнать или по вектору скорости, или задавая значения времени в уравнения движения, чтобы получить новую точку на траектории.

2.2. Некоторые случаи движения точки.

1. a_n=0, a_τ=0. Движение прямолинейное и равномерное.

2. $a_n \neq 0$, a_τ=0. Движение криволинейное и равномерное (Рисунок 6).

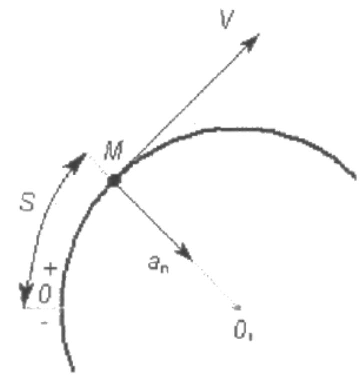


Рисунок 6.

3. $a_n=0,\ a_\tau \neq 0$. Движение прямолинейное и неравномерное.

а) прямолинейное, ускоренное (Рисунок 7).

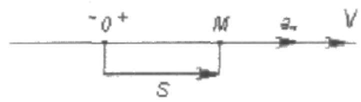


Рисунок 7.

б) прямолинейное, замедленное (Рисунок 8).

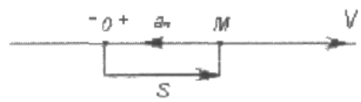


Рисунок 8.

4. $a_n \neq 0$, $a_\tau \neq 0$. Движение криволинейное и неравномерное.

а) криволинейное, ускоренное (a_τ>0, V>0) (Рисунок 9).

α - острый

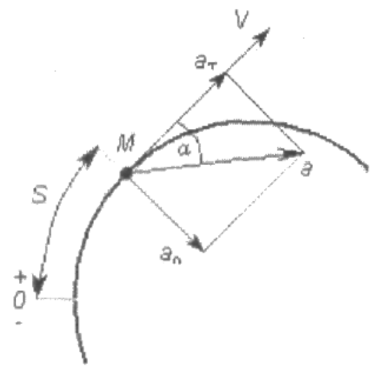
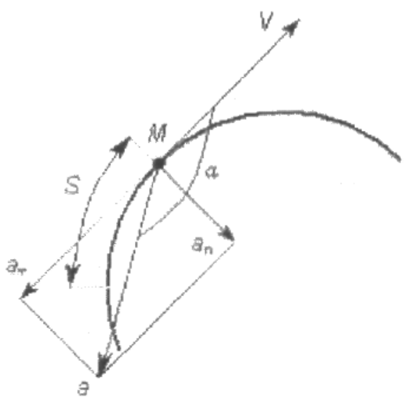


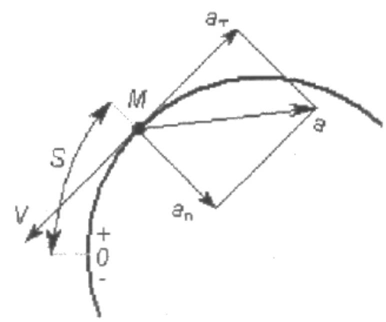
Рисунок 9.

б) криволинейное, замедленное (Рисунок 10).

α - тупой



a_τ <0; V >0



a_τ <0; V >0

Рисунок 10.

Уравнение равномерного движения точки по траектории любой формы (V=const):

$$S = Vt \qquad (2.21)$$

Уравнение равнопеременного движения точки по траектории любой формы (V=const)

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad (2.22)$$

где S_0 - начальное положение; V_0- начальная скорость.

Если a_τ >0, то движение равноускоренное.

Если a_τ <0, то движение равнозамедленное.

Скорость равнопеременного движения.

$$V = V_0 + a_\tau t \qquad (2.23)$$

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

3.1. Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой:

При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

Поступательное движение твердого тела характеризуется заданием движения одной его точки, обычно центра тяжести, и может быть задано любым из изученных способов. Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать: $x_c = f(t), y_c = f(t)$, $z_c = f(t)$.

Эти выражения являются уравнениями поступательного движения тела.

3.2 Вращательное движение тела

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.

Эта неподвижная прямая называется осью вращения.

Положение тела будет определено, если задан угол его поворота вокруг оси в функции времени: $\varphi = \varphi(t)$. Для однозначного определения положения необходимо знать величину и направление отсчета угла поворота. **Положительным направлением** отсчета считают поворот тела против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси. **Угол поворота** измеряется в радианах. Если известно число оборотов N за какой-то промежуток времени, то угол поворота равен:

$$\varphi = 2\pi N \tag{3.1}$$

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{3.2}$$

Знак производной определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит против ходя часовой стрелки. Если $\omega < 0$, то вращение – по ходу часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt^2} \tag{3.3}$$

или

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{3.4}$$

Знак производной определяет направление изменения угловой скорости. Если $\varepsilon > 0$, то угловая скорость направлена против хода часовой стрелки. Если $\varepsilon < 0$, то угловая скорость направлена по ходу часовой стрелки.

Угловые скорость и ускорение одинаковы для всех точек твердого тела в данный момент времени.

Векторы угловой скорости и углового ускорения.

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\kappa} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{\kappa} \tag{3.5}$$

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда направление вращения тела видно против хода часовой стрелки.

Вектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{\kappa} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\kappa}, \qquad (3.6)$$

где $\vec{\kappa}$ - единичный вектор оси вращения OZ.

Направление вектора углового ускорения определяется знаком производной.

Линейная скорость точки вращающегося тела:

$$\vec{V}_M = r\omega\vec{\tau} = V\vec{\tau} \qquad (3.7)$$

$$V = r\omega, \qquad (3.8)$$

где V - модуль скорости (r – расстояние от точки до оси вращения).

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки M в соответствии с направлением угловой скорости ω.

Ускорение точки вращающегося твердого тела:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad (3.9)$$

Вектор вращательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории точки в сторону вектора скорости $\vec{V}$ - при ускоренном вращении и противоположно $\vec{V}$ – при вращении замедленном. Иначе говоря, вектор направляется по касательной в соответствии с направлением углового ускорения ε.

Модуль вращательного (тангенциального, касательного) ускорения равен:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r \qquad (3.10)$$

Вектор центростремительного ускорения $\vec{a}_n$ направлен от точки М к оси вращения.

Модуль центростремительного (нормального) ускорения равен:

$$a_n = \omega^2 \cdot r \tag{3.11}$$

Модуль полного ускорения точки вращающегося твердого тела:

$$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{3.12}$$

Тангенс угла между полным ускорением и центростремительным равен:

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{3.13}$$

Выражения (3.8) и (3.12) показывают, что скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения, а из формул (3.13) следует, что угол отклонения полного ускорения от центростремительного в каждый момент времени один и тот же для всех точек тела.

Равномерное и равнопеременное вращение.

Равномерным называют вращение, при котором угловая скорость постоянна по модулю и направлению.

Уравнение равномерного вращения:

$$\varphi = \varphi_o + \omega \cdot t \tag{3.14}$$

При равномерном вращении угловую скорость можно определить, если задано число оборотов в минуту по формуле.

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \qquad (3.15)$$

где n - число оборотов в минуту.

Равнопеременным называют вращение, при котором угловое ускорение постоянно по величине и направлению.

Уравнение равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \qquad (3.16)$$

Если ω **и** ε **имеют одинаковые знаки**, то вращение равноускоренное. Скорость и вращательное ускорение направлены в одну сторону. **Если** ω **и** ε **имеют разные знаки**, то вращение равнозамедленное.

Скорость и вращательное ускорение направлены в разные стороны. **Центростремительное ускорение** в обоих случаях направлено к оси вращения.

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

4.1 Основные понятия и определения.

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях (Рисунок 11)

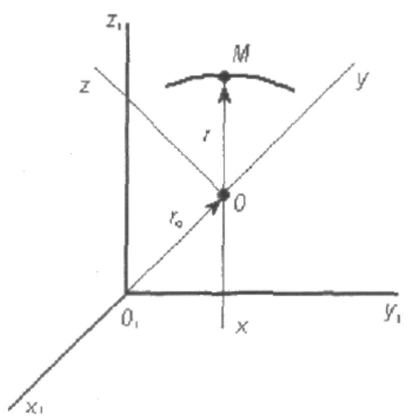


Рисунок 11.

Абсолютным движением называют движение точки М по отношению к основной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, которую условно принимают за неподвижную.

Относительным движением называют движение точки М по отношению к подвижной системе отсчета OXYZ.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета OXYZ относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$.

Абсолютной скоростью и абсолютным ускорением называют скорость и ускорение точки М относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Обозначают $\vec{V}$ и $\vec{a}$.

Относительной скоростью и относительным ускорением называют скорость и ускорение точки М относительно подвижной системы координат OXYZ. **Обозначают** $\vec{V}_r$ **и** $\vec{a}_r$.

Переносной скоростью и переносным ускорением называют скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка М. Обозначают $\vec{V}_e$ и $\vec{a}_e$.

4.2. Теорема о сложении скоростей.

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r \tag{4.1}$$

Модуль абсолютной скорости в общем случае находят проецированием выражения (4.1) на оси координат, так как угол между векторами относительной и переносной скоростей может быть от 0 до 180^0.

$$\vec{V} = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}}\ , \tag{4.2}$$

где

$$\vec{V}_x = V_{ex} + V_{rx}$$
$$\vec{V}_y = V_{ey} + V_{ry}$$

4.3. Теорема о сложении ускорений (Теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k\ , \tag{4.3}$$

где $\vec{a}_e$ - ускорение переносного движения;

$\vec{a}_r$ - ускорение относительного движения;

$\vec{a}_k$ - ускорение Кориолиса;

$$\vec{a} = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right) \tag{4.4}$$

Ускорение Кориолиса характеризует:

1. **Изменение величины переносной скорости точки вследствие ее относительного движения.**
2. **Изменение направления вектора относительной скорости вследствие вращательного переносного движения.**

Направление ускорения Кориолиса определяют либо по правилу векторного произведения, либо по правилу Жуковского (Рисунок12)

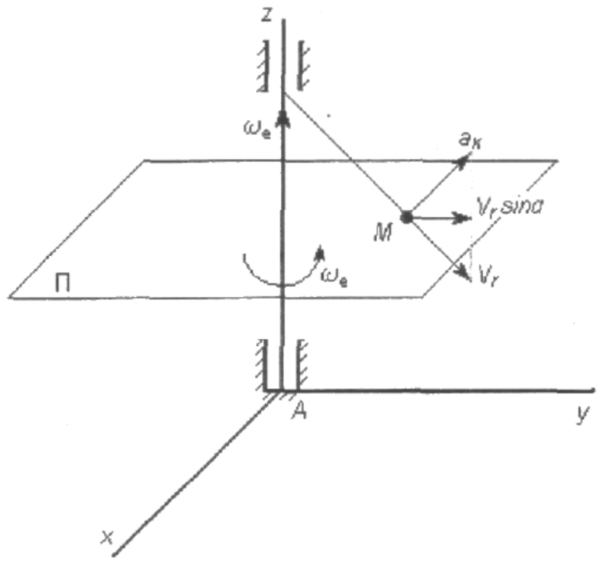


Рисунок 12.

Правило Жуковского: проецируем вектор относительной скорости V_r **на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости и поворачиваем эту проекцию в той же плоскости на угол 90^0 в сторону переносной угловой скорости.**

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_к = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_e \hat{} \vec{V}_r\right) \qquad (4.5)$$

Равенство нулю ускорения Кориолиса возможно:

1. ω_e =0: переносное движение является поступательным или, при переносном движении, равна нулю ω_e в некоторый момент времени.
2. V_r =0: относительная скорость в данный момент равна нулю.
3. $\sin\left(\vec{\omega}_e \hat{} \vec{V}_r\right)$=0: вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору относительной скорости $\vec{V}_r$.

Модуль абсолютного ускорения находим по формуле:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}, \tag{4.6}$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора абсолютного ускорения на оси декартовых координат.

5. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным или плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости П.

5.1. Уравнение плоскопараллельного движения твердого тела.

Чтобы изучить движение всего тела, достаточно изучить, как движется его сечение S в плоскости xOy, параллельной неподвижной плоскости П.

Для задания движения сечения S достаточно описать движение какого-либо отрезка СА, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка СА определяется координатами точки А, выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения. (Рисунок 13).

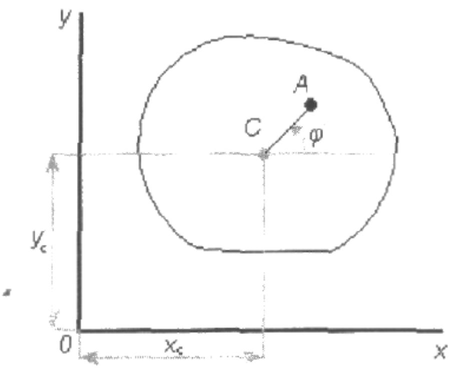


Рисунок 13.

Плоскопараллельное движение представляет собой совокупность поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

$$\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Первые два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры. Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение плоской фигуры, которое зависит от выбора полюса.

5.2. Определение скоростей точек плоской фигуры.

Скорость любой точки В плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса А и скорости этой точки во вращательном движении вокруг полюса А.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}\,, \tag{5.2}$$

где $\vec{V}_B$ - искомая скорость точки В; $\vec{V}_A$ - скорость полюса В во вращательном движении вокруг полюса А (Рисунок14)

$$V_{BA} = \omega \cdot BA\,, \qquad \left(\vec{V}_{BA} \perp \vec{BA}\right) \tag{5.3}$$

где ω – угловая скорость плоской фигуры.

Так как вектор $\vec{V}_{BA}$ перпендикулярен отрезку, соединяющему точки А и В, то из этого вытекает следствие:

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

При этом проекции должны иметь одинаковый знак (Рисунок 15)

$$\vec{V}_A \cos\alpha = \vec{V}_B \cos\beta \tag{5.4}$$

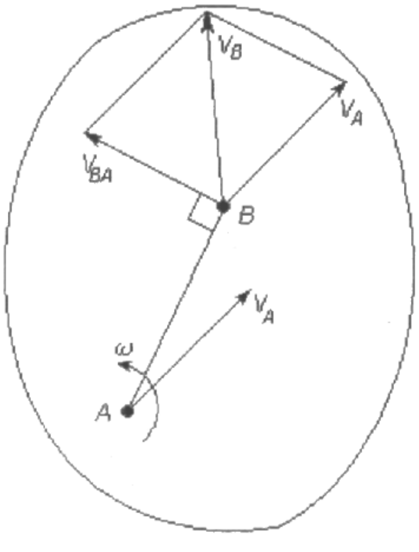


Рисунок 14.

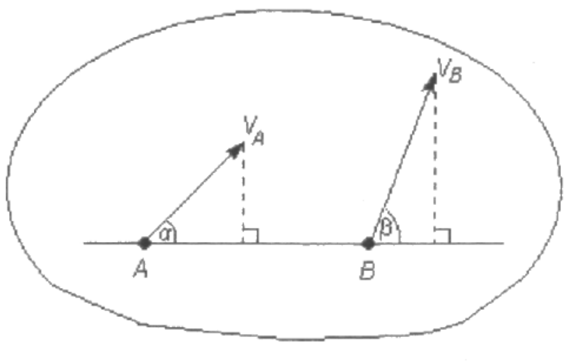


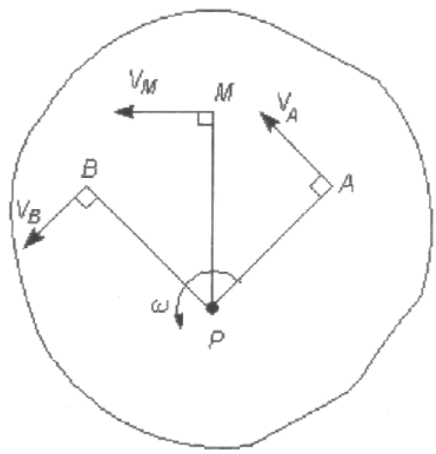
Рисунок 15.

5.3. Мгновенный центр скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Плоская фигура относительно МЦС совершает мгновенное вращательное движение.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения (Рисунок 16)



P - МЦС

Рисунок 16.

Так как скорость любой точки плоской фигуры является вращательной скоростью вокруг МЦС, то для любой точки М её скорость $\vec{V}_M \perp \overrightarrow{MP}$ и направлена в сторону **ω**. Причем:

$$\vec{V}_M = \omega \cdot MP$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до МЦС.

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \omega$$

Отношение скорости любой точки плоской фигуры к её расстоянию до МЦС является величиной, равной угловой скорости вращения.

5.4. Частные случаи определения МЦС.

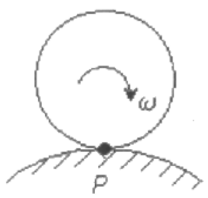


Рисунок 17.

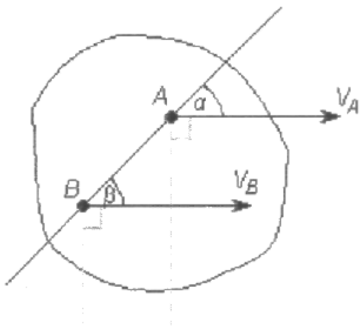


Рисунок 18.

При качении без скольжения одного цилиндрического тела по неподвижной поверхности другого МЦС в каждый момент времени будет с точке касания P (Рисунок 17).

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна к $\vec{V}_A$, то МЦС лежит в бесконечности. Скорости всех точек в данный момент времени равны по модулю и по направлению, т.е. фигура имеет мгновенно поступательное распределение скоростей (случай мгновенно поступательного движения). Угловая скорость ω в данный момент времени равна нулю (Рисунок 18).

Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построениями, показанными на Рисунок 19.

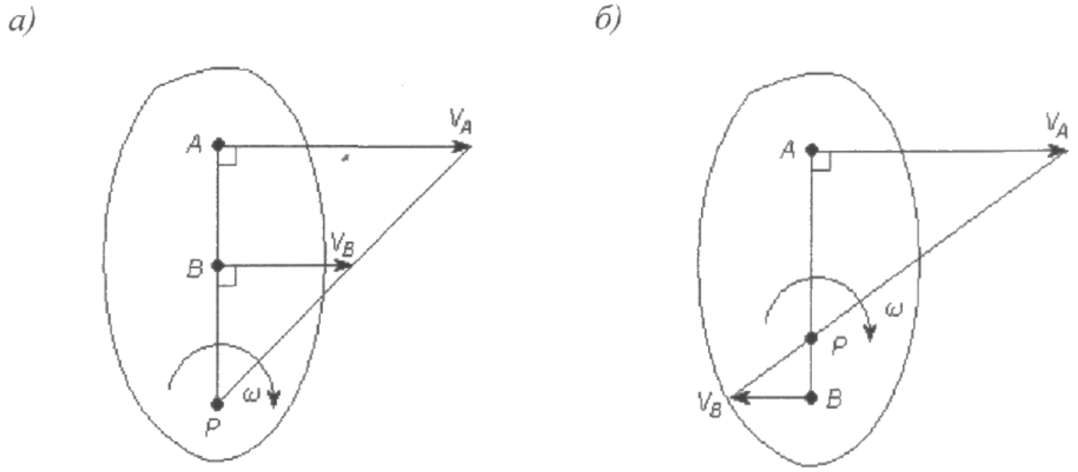


Рисунок 19.

5.4. Ускорения точек плоской фигуры.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \tag{5.4}$$

где $\vec{a}_B$ - искомое ускорение точки B, $\vec{a}_A$ - ускорение полюса A;

$\vec{a}_{BA}$ - ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A (Рисунок 20).

Представим

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}^n{}_{BA} + \vec{a}^\tau{}_{BA}, \tag{5.5}$$

где $\vec{a}^{\tau}{}_{BA}$ - касательное (тангенциальное) ускорение. Вектор $\vec{a}^{\tau}{}_{BA}$ направлен перпендикулярно AB в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное.

$\vec{a}^{n}{}_{BA}$ - нормальное ускорение. Вектор $\vec{a}^{n}{}_{BA}$ всегда направлен от точки ***B*** к полюсу ***A***. Численно

$$a^{\tau}{}_{BA} = AB \cdot \varepsilon^{*} \qquad a^{n}{}_{BA} = AB \cdot \omega^{2} \tag{5.6}$$

Тогда (5.4) с учётом (5.5) примет вид

$$\vec{a}_{B} = \vec{a}_{A} + \vec{a}^{n}{}_{BA} + \vec{a}^{\tau}{}_{BA} \tag{5.6}$$

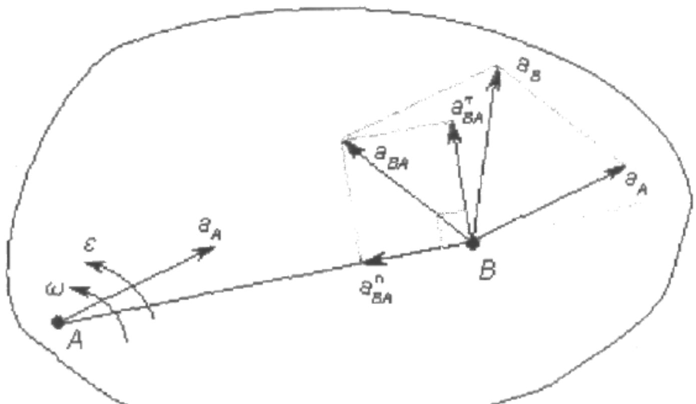


Рисунок 20.

Разработал: Булгакова А.Ф,