Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭИС
____________ Б.И.Селезнев
«_15_» _января_ 2015г.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Дисциплина по направлению 050200.62
Педагогическое образование
Одновременно два профиля – Математика и информатика

Рабочая программа

СОГЛАСОВАНО
Начальник учебного отдела
__________ О.Б. Широколобова
«_15_» ___01___ 2015 г.

Разработал
Доцент кафедры АГ НовГУ
__________ Н.В. Неустроев
«_5_» _июня_ 2014 г.

Принято на заседании кафедры
Заведующий кафедрой
__________ В.Е. Подран
«_10_» _июня_ 2014 г.

1 Цели освоения дисциплины

Цель дисциплины: формирование компетентности студентов в овладении математической и логической культурой, позволяющей в дальнейшем успешно изучать основные математические дисциплины.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

– формирование у студентов системы знаний по темам «Элементы теории делимости на множестве целых чисел», «Элементы теории сравнений», «Цепные дроби», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел»;

– овладение основными понятиями тем «Элементы теории делимости на множестве целых чисел», «Элементы теории сравнений», «Цепные дроби», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел»;

– формирование умений решать типовые задачи по темам «Элементы теории делимости на множестве целых чисел», «Элементы теории сравнений», «Цепные дроби», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел»;

– актуализация способности студентов использовать знания при решении реальных (смоделированных) математических задач;

– стимулирование студентов к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины и формированию необходимых компетенций.

2 Место дисциплины в структуре ООП направления подготовки

Дисциплина «Теория чисел и числовые системы» входит в вариативную часть профессионального цикла (Б3.В8). Изучается в 5 семестре, базируется на материале школьного курса математики, дисциплины «Алгебра».

Базовые знания, полученные при изучении данного курса, используются при освоении дисциплин математического и естественно-научного и профессионального цикла.

3 Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

1) владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения **(ОК-1):**

– умеет работать с информацией (отбирать, анализировать, обобщать, синтезировать);

– знает, как определить цели деятельности и пути их достижения;

– владеет культурой мышления на практических занятиях и экзамене;

2) владеет культурой математического мышления, логической и алгоритмической культурой, способен свободно пользоваться языком математики, грамотно, корректно, аргументировано использовать теоретические знания (**СК−2**):

в результате изучения дисциплины студент должен:
знать:
- историю развития арифметики и теории чисел;
- основополагающие факты элементарной теории чисел, лежащие в основе построения всей математики (основная теорема арифметики, бесконечность множества простых чисел и др.);
- основные факты теории сравнений: функция Эйлера, теорема Эйлера и малая теорема Ферма, первообразные корни и индексы по заданному модулю;
- арифметические приложения теории сравнений;
- современные приложения теории чисел: прикладная алгебра, криптография, защита информации, целочисленное программирование;
- основные подходы к определению натуральных, рациональных, действительных, комплексных чисел (аксиоматический, теоретико-множественный и конструктивный), аксиоматику Пеано и Евклида;
- аксиоматический подход к построению классических числовых систем (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа);
- структуру и свойства классических числовых систем, логику их взаимосвязи и взаимозависимости;
- взаимосвязь между аксиоматическим построением числовых систем и построением числовых множеств в школьном курсе математики;
уметь:
- решать основные типы теоретико-числовых задач (делимость целых чисел, арифметические функции, простые числа, сравнения, арифметические приложения теории сравнений);
- применять полученные знания при решении практических задач профессиональной деятельности;
- решать практические задачи, связанные с использованием свойств числовых множеств;
- доказывать свойства аксиоматических теорий: независимость аксиом, категоричность и непротиворечивость;
- применять полученные знания к практическим задачам профессиональной деятельности;
владеть:
- навыками решения основных типов теоретико-числовых задач;
- основными теоретико-числовыми методами;
- базовыми приемами современных теоретико-числовых приложений.
- методом математической индукции для доказательства свойств натуральных чисел;

- основами аксиоматического метода на примере построения классических числовых систем.

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Трудоемкость дисциплины и формы аттестации

Учебная работа (УР)	Всего	Распределение по семестрам
		5
Полная трудоемкость дисциплины в зачетных единицах (ЗЕ), в том числе: – экзамен, ЗЕ. Распределение трудоемкости по видам УР в академических часах (АЧ): – лекции – практические занятия (семинары) – в том числе, аудиторная СРС – внеаудиторная СРС	5 27 45 24 72	5 27 45 24 72
Аттестация: – экзамен (экз)	36	36

4.2 Содержание дисциплины

Модуль, раздел (тема), КП/КР	Семестр	№ недели	Трудоемкость по видам УР, АЧ				Баллы Рейтинга		Рекомендуе-мые источники
			лек	ПЗ	В том числе, ауд. СРС	Вне ауд. СРС	Поро-говый	Макси-мальны	
Модуль1.Элементы теории делимости и теории сравнений в кольце целых чисел	**5**	**1–9**	**18**	**36**	**16**	**45**	**50**	**100**	
1.1Деление нацело и с остат-	5	1-2	4	8	4	10			1-3, 7,8

ком. НОД и НОК целых чисел									
1.2Простые и составные чис-Конечные цепные дроби. Диофантовы уравнения	5	3-4	4	8	4	10			1-3, 7,8
1.3 Кольцо классов вычетов. Функция и теорема Эйлера. Сравнения первой степени	5	5-6	4	8	4	10			1-3, 7,8
1.4 Показатель числа и перво-образные корни. Квадратич-ные вычеты и невычеты.	5	7-9	6	12	4	15			1-3, 7,8
Модуль2. Числовые систе-мы	**5**	**10-18**	**9**	**9**	**8**	**27**	**50**	**100**	
2.1Аксиоматическая теория натуральных чисел	5	10-11	3	2	3	9			1-3, 7,8
2.2 Аксиоматические теории целых и рациональных чисел, категоричность и непротиво-речивость теорий	5	12-13	3	4	2	9			1-3, 7,8
2.3 Аксиоматические теории действительных и комплекс-ных чисел, категоричность и непротиворечивость теорий	5	14-18	3	3	3	9			1, 6-8
Итого V семестр (без экзамена)	**5**		**27**	**45**	**24**	**72**	**100**	**200**	

4.3 Задания для самостоятельной работы студентов

4.3.1 Задания для аудиторной самостоятельной работы студентов:

СРС– 1 Выполнить указанное задание по теме «Деление нацело, деление с остатком», «НОД и НОК, простые и составные числа», «Конечные цепные дроби, диофантовы уранения»;

СРС- 2 Выполнить указанное задание по теме, «Кольцо классов вычетов. Функция и теорема Эйлера. Сравнения первой степени»,

СРС–3 Выполнить указанное задание по теме «Показатель числа и первообразные корни. Квадратичные вычеты и невычеты»,

КР-1 решить систему задач по материалам модуля 1.

СРС–4 – Выполнить указанное задание по теме «Свойства сложения и умножения натуральных чисел», «Упорядоченное полукольцо натуральных чисел»,

СРС–5 – Выполнить указанное задание по теме «свойства целых и рациональных чисел»

СРС–6 – Выполнить указанное задание по теме «свойства действительных чисел», «свойства комплексных чисел».

КР-2 решить систему задач по материалам модуля 2.

4.3.2 Задания для внеаудиторной самостоятельной работы студентов:

− изучить теоретический материал модуля 1, используя:

а) лекции;

б) учебники [1]- [3] основного списка.

− изучить методы решения типовых задач, рассмотренных на практических занятиях, домашние практические задания, ориентируясь:

а) на образцы решения задач, рассмотренных на практических занятиях;

б) на образцы решений, рассмотренных в руководстве [1]- [3];

− изучить теоретический материал модуля 2, используя:

а) лекции;

б) учебник [1], [2] основного списка;

− выполнить домашние практические задания, ориентируясь:

а) на образцы решения задач, рассмотренных на практических занятиях;

б) на образцы решений, рассмотренных в руководстве [8];

− подготовка теоретического материала модулей 1-2 к сдаче коллоквиума (вопросы 1-10 из приложения Б) (8 учебная неделя);

− подготовка к контрольной работе по материалам модулей 1-2 (пример − работа № 1 приложения А) (9 учебная неделя);

Темы рефератов:

1 Новое о системах счисления.

2 Точки с целочисленными координатами.

3 Числа Мерсенна, Кармайкла.

4 Представление чисел квадратичными формами.

5 Числа Фибоначчи, фареевы дроби.

6 Функция Мебиуса, свойства.

7 Частные Ферма, Вильсона.

8 Магические квадраты из простых чисел.

9 Сложность арифметических операций с целыми числами.

10 Сложность алгоритма Евклида.

11 Сложность вычислений в кольце вычетов.

12 Обобщенная функция Эйлера, функция Люка.

13 Алгоритмы получения простых чисел.

14 Мультипликативные функции, свойства.

15 Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии.

16 Индуктивные определения.

17 Конечные множества.

18 Счетные множества.

19 Изоморфизм одноименных систем натуральных чисел.

20 Независимость аксиомы индукции и ее роль в построении арифметики.

21 Интерпретации системы натуральных чисел.

22 Различные определения системы действительных чисел.

23 Кольцо m-адических чисел.

24 10-адические числа.

25 p-адические числа.

26 Двойные числа, свойства.

27 Дуальные числа, свойства.

28 Кватернионы, свойства.

29 Числа Кэли (октавы), свойства.

Студенты выбирают по четыре темы, пишут по ним рефераты и защищают их, получая от 0 до 3 баллов дополнительно.

4.4 Формирование компетенций студентов

№ модуля дисциплины	Трудоемкость темы, АЧ	компетенции
Модуль 1	99	ОК-1, СК-2
Модуль 2	45	ОК-1, СК-2

5 Образовательные технологии

Образовательный процесс по дисциплине формируется с использованием технологии модульно–рейтингового обучения.

Реализация интегральной модели образовательного процесса по дисциплине предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

– лекционные (вводная лекция, информационная лекция, проблемная лекция; обзорная лекция; рефлексия);

– практические (моделирование; работа в малых группах);

– самоуправления (самостоятельная работа студентов) (работа с источниками по темам дисциплины, моделирование процессов, выполнение индивидуальных заданий).

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа–средств при проведении лекционных и практических занятий.

Формы проведения лекционно–практических занятий по дисциплине представлены в таблице (рекомендуемые).

Тема занятий	Форма проведения
Модуль 1. Элементы теория делимости и теории сравнений в кольце целых чисел	
1.1Деление нацело и с остатком. НОД и НОК целых чисел	Вводная лекция; проблемная лекция, информационная лекция; работа в малых группах; выполнение индивидуальных заданий
1.2 Простые и составные числа. Конечные цепные дроби. Диофантовы уравнения	Информационная лекция; работа в малых группах; выполнение индивидуальных заданий
1.3 Кольцо классов вычетов. Функция и теорема Эйлера.	Проблемная лекция, информационная лекция; работа в малых группах; выполнение

Сравнения первой степени	индивидуальных заданий
1.4 Показатель числа и первообразные корни. Квадратичные вычеты и невычеты	Проблемная лекция, информационная лекция; работа в малых группах; выполнение индивидуальных заданий
Модуль 2. Числовые системы	
2.1 Аксиоматическая теория натуральных чисел	Проблемная лекция; выполнение индивидуальных заданий; моделирование
2.2. 1 Аксиоматические теории целых и рациональных чисел, категоричность и непротиворечивость теорий	Проблемная лекция, информационная лекция; работа в малых группах; выполнение индивидуальных заданий
2.3 Аксиоматические теории действительных и комплексных чисел, категоричность и непротиворечивость теорий	Информационная лекция; работа в малых группах; выполнение индивидуальных заданий

6 Оценочные средства контроля успеваемости

Для оценки качества усвоения курса используются следующие формы контроля:

– **текущий:** контроль выполнения практических аудиторных и домашних заданий, индивидуальных заданий; работы с источниками;

– **рубежный:** предполагает проведение контрольных работ для аудиторного контроля практических умений (примеры заданий даны в приложении А); учет суммарных результатов по итогам текущего контроля за соответствующий период (баллы за выполнение индивидуальных заданий для аудиторной самостоятельной работы студентов), систематичность и активность работы студентов. Рубежный контроль осуществляется в два этапа;

– **семестровый (экзамен):** осуществляется посредством экзамена и суммирования баллов за соответствующий семестр изучения дисциплины.

Экзамен состоит из 2 частей:

1) Теоретическая часть (вопросы приведены в приложении Б).

2) Практическая часть (решение задач).

Технологическая карта дисциплины с оценкой различных видов учебной деятельности по этапам контроля приведена в приложении В.

Критерий	В рамках формируемых компетенций студент демонстрирует
пороговый	знание и понимание теоретического содержания курса с незначительными пробелами; несформированность некоторых практических умений при применении знаний в конкретных ситуациях, низкое качество выполнения учебных заданий (не выполнены, либо оценены числом баллов, близким к минимальному); низкий уровень мотивации учения;
стандартный	полное знание и понимание теоретического содержания курса, без пробелов; недостаточную сформированность некоторых практических умений при применении знаний в конкретных

	ситуациях; достаточное качество выполнения всех предусмотренных программой обучения учебных заданий (ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками); средний уровень мотивации учения;
эталонный	полное знание и понимание теоретического содержания курса, без пробелов; сформированность необходимых практических умений при применении знаний в конкретных ситуациях, высокое качество выполнения всех предусмотренных программой обучения учебных заданий (оценены числом баллов, близким к максимальному); высокий уровень мотивации учения.

Критерии оценки качества освоения студентами дисциплины:

– пороговый («оценка «удовлетворительно») – 125-174 баллов.

– стандартный (оценка «хорошо») – 175-224 баллов.

– эталонный (оценка «отлично») – 225-250 баллов.

7 Учебно–методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1 Основная литература:

1 Бухштаб А.А. Теория чисел Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 384 с.

2 Виноградов И.М. Основы теории чисел. СПб.: Лань, 2004. – 176 с.

3 Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел : Учеб. пособие. - 3-е изд. – СПб. : Лань, 2008. – 224 с.

7.2 Дополнительная литература:

4 Куликов Л.Я. Алгебра и теории чисел. – М.: Просвещение, 2001. – 559.

5 Лельчук М.П. Практические занятия по алгебре и теории чисел. – Мн.: Высшая школа, 2001. – 302.

6 Сборник задач по линейной алгебре. /Под ред. А.Н. Кострикина. – М.: Наука, 2008.

7 Неустроев Н.В. Элементы прикладной теории чисел: Книга для студентов специальности «учитель математики» и «прикладная математика» / Автор Н.В. Неустроев; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2007. – 188 с.

8 Теория чисел: Книга для студентов специальности «учитель математики», «прикладная математика», «ПОВТ» / Н.В. Неустроев; О.Н. Неустроева; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2004. – 161 с.

9 Ларин С.В. Числовые системы. Учебное пособие для студентов пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 160 с.

10 Симонова Н.С. Числовые системы: Учеб. пособие для студ. мат спец. вузов и ун-тов / Под ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: ТГУ, 2005. – 108 с.

7.3 Методические рекомендации по изучению и преподаванию дисциплины «Теория чисел и числовые системы»

Модуль1. Элементы теории делимости и теории сравнений в кольце целых чисел

Замечательный английский математик Г.Х. Харди утверждал, элементарную теорию чисел следует считать одним из лучших предметов для первоначального математического образования. Она требует очень мало предварительных знаний, а предмет ее понятен и близок; методы рассуждений, принимаемые, ею просты, общи и немногочисленны; среди математических наук нет равной ей в обращении к естественной человеческой любознательности. Действительно, многие вопросы ставятся настолько конкретно, что обычно допускают «экспериментальную» числовую проверку; многие достаточно глубокие проблемы допускают наглядную интерпретацию (например, нахождение «пифагоровых троек»). К тому же элементарная теория чисел наилучшим образом сочетает дедуктивное и интуитивное, Что весьма важно в преподавании математики. Теория чисел дает ясные и точные доказательства и теоремы безукоризненной строгости, формирует математическое мышление и способствует приобретению навыков, полезных в любой отрасли математики. Зачастую решение ее задач требует преодоления значительных трудностей, математической изобретательности, отыскания новых методов и идей, находящих продолжение в современной математике. В пользу изучения теории чисел говорит и то, что при всяком сколько-нибудь глубоком математическом исследовании в разных областях мы часто наталкиваемся на сравнительно простые теоретико-числовые факты.

Теория чисел является наукой о числовых системах с их связями законами. При этом в первую очередь уделяется внимание числам натурального ряда, которые являются основой для построения других числовых систем: целых, рациональных и иррациональных, действительных и комплексных, кватернионов и других гиперкомплексных чисел. Одной из основных задач теории чисел является изучение свойств целых чисел. Основной объект теории чисел – натуральные числа. Главное их свойство – делимость. Теория чисел изучает числа с точки зрения их строения и внутренних связей. Она рассматривает возможность представить одни числа через другие, более простые по своим свойствам, вопросы же строгого логического обоснования понятия натурального числа и его обобщений, а также связанная с ними теория действий рассматривается отдельно в основаниях арифметики или в курсе «Числовые системы».

В качестве применения теоремы о делении с остатком следует рассмотреть представление обыкновенной дроби в любой данной системе счисления, а в качестве применения алгоритма Евклида – представление НОД(a,b) в виде линейной комбинации, решение неопределенных уравнений, представление рациональных чисел в виде цепной дроби. При изучении цепных дробей следует познакомить студентов с алгоритмом Эйлера разложения любого действительного числа в цепную дробь и рассмотреть примеры разложения квадратичной иррациональности в цепную дробь.

Бесконечность множества простых чисел в прогрессиях $(4n-1)$ и $(6n-1)$ следует рассмотреть немедленно после доказательства теоремы о бесконечности множества простых чисел; бесконечность множества простых чисел вида $(4n+1)$ и $(6n+1)$ - после изучения простейших свойств символа Лежандра. Неравенства Чебышева могут быть даны без доказательства, вопрос об асимптотическом законе распределения – в историческом плане.

Приведение сравнения по составному модулю к сравнениям по степени простого и сравнений простого к сравнению по составному модулю можно рассматривать на примерах. Здесь же определяется символ Лежандра и доказываются его простейшие свойства. Закон взаимности квадратичных вычетов можно дать без доказательства. В качестве арифметических приложений теории сравнений следует рассмотреть применения сравнений к выводу признаков делимости, к проверке арифметических действий, к нахождению остатков от деления с помощью теорем Эйлера и Ферма, к нахождению длины периода периодической систематической дроби при помощи свойств индексов.

Рассмотреть обзорно и на примерах приложения теории чисел в криптографии: сложность арифметических операций, проверка чисел на простоту, дискретное логарифмирование, криптосистемы с закрытым и открытым ключом, атаки на криптосистемы.

Модуль2. Числовые системы

Числа изучаются в школе, именно там закладываются интуитивные представления об их свойствах. В курсе «Числовые системы» интуитивные знания о числах переводятся на твердую основу доказательств, исходя из аксиом. В данной дисциплине рассматриваются натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа и кватернионы, доказывается, что если представление о числе ограничить определенными рамками, то других чисел нет.

Программа предусматривает максимальную ориентацию изложения на школу, на обоснование школьных утверждений о числах, так, например, в теме «Натуральные числа» - индуктивные доказательства и определения в школе. В связи с этим изложение материала полезно сопровождать анализом соответствующих тем школьных учебников.

Некоторые темы можно изложить обзорно, заостряя внимание лишь на узловых моментах. В то же время, следует обстоятельно показать из каких соображений появляется аксиоматическое определение каждой числовой системы, и особенно тщательно доказать те свойства чисел, которые приводятся в школе. Так, исходя из аксиоматического определения той или иной числовой системы, доказываются привычные свойства чисел. Кроме того, обосновываются такие важные для школы понятия как доказательства по индукции, индуктивные определения, понятия конечного множества, деление с остатком, десятичная запись целого числа, однозначная представление десятичной дробью сначала рационального, а затем и произвольного действительного числа. Рассматривается понятие степени с натуральным, целым, рациональным и произвольным действительным показателями, вводятся логарифмы. При переходе к каждой новой числовой области указываются причины, вызывающие появление новых чисел. Уточняя привычное представление о единственности каждой числовой системы, доказывается, что она единственна с точностью до изоморфизма, то есть две одноименные числовые системы могут отличаться друг от друга лишь обозначениями элементов, операций и отношений.

Практические занятия по данному курсу рекомендуется начать с повторения и углубления понятий, знакомых студенту из дисциплин «Алгебра» и «Теория чисел», и используемых при построении конкретных числовых систем. Для этой цели следует рассматривать фрагменты таких систем и их моделей, решать задачи, связанные с выяснением вопросов, какими свойствами обладают эти системы и их модели. Например, является ли рассматриваемое отношение отношением эквивалентности (изоморфизма, гомоморфизма) и почему? Является ли рассматриваемая алгебраическая система группоидом, полугруппой (группой, кольцом, полем) и почему? Установленные таким путем свойства позволяют существенно сократить время на построение соответствующих моделей, а саму идею и схему построения моделей сделать более отчетливой.

Карта учебно–методического обеспечения по дисциплине представлена в приложении Г.

8 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине некоторые занятия можно проводить в компьютерном классе, либо в аудитории, оборудованной мультимедийными средствами для демонстрации реализации методов линейной алгебры и математического анализа пакетами прикладных программ.

Приложения

Приложение А

А1. Контрольная работа № 1

Вариант №1

1 Найдите, какие возможны остатки при делении числа n_3+2 ($n\in N$) на 9.

2 Докажите, что $S=3^3-3^6+3^9-\ldots-3^{6n}$, $n\in N$ делится на 13 при любом натуральном n.

3 Найдите НОД и НОК для чисел (с помощью алгоритма Евклида и разложения на множители): 12606 и 6494.

4 Представьте в виде цепной дроби $\frac{875}{576}$. Найдите значение цепной дроби $[0;4,1,3,2,5]$.

5 Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее: $a=132_4$, $b=1643_7$, $g=5$.

6 Разложите число 150 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 11, а второе – 17.

7 Найти остаток от деления : 34^{3741} на 26.

8 Решить сравнения: а) $15x\equiv 21(\mathrm{mod}\,18)$ б) $95x\equiv 59\ (\mathrm{mod}\,308)$

9 Вычислить символ Лежандра: $\left(\frac{241}{593}\right)$

10Решить сравнение с помощью индексов: $7x^4\equiv 10(\mathrm{mod}\,17)$

Вариант № 2

1 Найдите остаток от деления натурального числа n на 45, если известно, что остатки от деления n на 15 и на 9 соответственно равны 2 и 5.

2 Докажите, что $S=2^2+2^4+3^6+\ldots+2^{8n}$, $n\in N$ делится на 17 при любом натуральном n.

3 Найдите НОД и НОК для чисел (с помощью алгоритма Евклида и разложения на множители): 1403 и 1058.

4 Представьте в виде цепной дроби $-\frac{251}{764}$. Найдите значение цепной дроби $[2;1,3,4,1,2]$.

5 Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее: $a=1653_7$, $b=201_{10}$, $g=4$.

6 Разложите число 134 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 13, а второе – 19.

7Найти остаток от деления : 178^{2741} на 22.

8Решить сравнения: а) $20x\equiv 35(\mathrm{mod}\,45)$, б) $91x\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,132)$

9Вычислить символ Лежандра: $\frac{251}{577}$.

10Решить сравнение с помощью индексов: $40x^{10}\equiv 3(\mathrm{mod}\,17)$

Контрольная работа № 2.

№ 1 Какими свойствами обладают бинарные отношения ρ, заданные на множестве N (Z):

xρy	Реф-лек-ность	Сим-метр.	Тран-зитив.	Отн. эквив.	Анти-симм.	Связ-ность	Отн. поряд ка	Част. поря-док	Лин. поря-док
$x \le y$									
$x=y$									
$x<y$									
$x^2=y$									
$x^2=y^2$									
x/y									
$x+y=1$									
$2x=3y$									
$\|x-y\|<5$									
НОД$(x,y)\neq 1$									

№ 2 Доказать существование и единственность сложения (умножения).

№ 3 Привести примеры интерпретаций «системы натуральных чисел», показывающие независимость аксиомы индукции и роль ее в обосновании теории неравенств, теории делимости и свойств арифметических действий.

№ 4 Выполнить построение кольца целых чисел по схеме :

1. Построить вспомогательную систему.
2. Доказать, что построенная система является кольцом.
3. Показать, что система натуральных чисел можно вложить в построенную систему.
4. Доказать, что построенная система – кольцо целых чисел.

№ 5 Выполнить построение поля рациональных чисел по схеме :

1. Построить вспомогательную систему.
2. Доказать, что построенная система является полем.
3. Показать, что система целых чисел можно вложить в построенную систему.
4. Доказать, что построенная система – поле рациональных чисел.

Образец экзаменационного билета:

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Кафедра алгебры и геометрии

Экзаменационный билет № 1

Дисциплина Теория чисел и числовые системы

Для специальности (направления подготовки)

1 Деление с остатком. Теорема.

2 Алгебры конечного ранга. Примеры.

3 Решить двучленное сравнение с помощью индексов: $3 \cdot x^8 \equiv 5(\mathrm{mod}\,13)$.

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой АГ________________ В.Е. Подран

Приложение Б

Б.1 Вопросы к экзамену по дисциплине «Теория чисел и числовые системы» (Vсеместр)

1 Отношение делимости в Z, свойства.
2 Деление с остатком. Теорема.
3 Системы счисления. Признаки делимости.
3 НОД целых чисел, свойства, алгоритм Евклида.
4 Свойства взаимно-простых чисел.
5 НОК целых чисел, свойства.
6 Простые и составные числа, свойства
7 Основная теорема арифметики. Распределение простых чисел.
8 Арифметические функции.
9 Конечные цепные дроби. Теорема.
10 Подходящие дроби, свойства.
11 Неопределенные (диофантовы) уравнения.
12 Отношение сравнимости в Z, свойства.
13 Кольцо классов вычетов по заданному модулю.
14 Полная и приведенная системы вычетов, свойства.
15 Функция Эйлера и ее свойства.
16 Теоремы Эйлера и Ферма.
17 Сравнения первой степени с одним неизвестным.
18 Способы решения сравнений первой степени.
19 Системы сравнений. Китайская теорема об остатках.
20 Сравнения n-ой степени (сведение решения сравнения по модулю степени простого к решению сравнения по простому модулю).
21 Теорема о числе решений сравнения n-ой степени. Следствие.
22 Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты. Число решений сравнения.
23 Критерий Эйлера для квадратичных вычетов и невычетов.24Символ Лежандра, его свойства.
24 Квадратичный закон взаимности.
25 Теорема Вильсона, теорема Лейбница (и другие критерии простоты числа).
26 Показатель числа по заданному модулю, его свойства.
27 Существование первообразного корня по простому модулю.
28 Теоремы о количестве чисел, принадлежащих показателю, и первообразных корней по заданному модулю.
29 Индексы (дискретный логарифм) по заданному модулю, их свойства.
30 Решение двучленных (степенных) сравнений и показательных сравнений с помощью индексов.
31 Арифметические приложения: а) нахождение остатков от деления некоторого числа на заданное число, б) признаки делимости, в) систематические дроби (определение длины периода при обращении

обыкновенной дроби в десятичную дробь), г) проверка результатов арифметических действий, д) приложения теории чисел в криптографии.

32. Аксиоматика Пеано.
33. Существование и единственность сложения и умножения натуральных чисел.
34. Ассоциативный и коммутативный законы сложения.
35. Ассоциативный, коммутативный и дистрибутивный законы умножения.
36. Порядок во множестве натуральных чисел. Закон трихотомии.
37. Свойства неравенств. Действия с неравенствами.
38. Теорема Архимеда, дискретность множества натуральных чисел и другие свойства.
39. Различные формы принципа полной математической индукции.
40. Коммутативность и ассоциативность сложения и умножения нескольких натуральных чисел.
41. Вычитание и деление натуральных чисел.
42. Интерпретации системы натуральных чисел. Независимость аксиом Пеано.
43. Независимость аксиомы индукции и ее роль в построении арифметики.
44. Полнота аксиом Пеано.
45. Построение кольца целых чисел.
46. Категоричность аксиоматической теории целых чисел.
47. Построение поля рациональных чисел.
48. Категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
49. Свойства фундаментальных последовательностей рациональных чисел.
50. Построение поля действительных чисел.
51. Категоричность аксиоматической теории действительных чисел.
52. Построение поля комплексных чисел.
53. Категоричность аксиоматической теории комплексных чисел.
54. Алгебры конечного ранга.
55. Теорема Фробениуса.

Приложение В

Технологическая карта дисциплины (I семестр)

Трудоемкость дисциплины 4 ЗЕ = 50 б.*4=200 баллов.

Семестр Недели	Аудиторный контроль практических умений (в баллах)	Работа на практических занятиях (в баллах)	Оценка по итогам работы студента в семестре (в баллах)	экзамен
5 с	0 – 124	0 – 60	0 – 16	50
3		СРС–1 (10б)		
5		СРС–2 (10б)	Реф.-1 (4б)	
8		СРС–3 (10б)	Реф. – 2 (4б)	
9	КР–1 (32б) Коллоквиум (30б)			
Рубежная аттестация (не менее 50 из 100 баллов)				
	0–62	**0–30**	**0–8**	
12		СРС–4 (10б)		
15		СРС–5 (10б)	Реф. – 3 (4б)	
17		СРС–6 (10б)	Реф. – 4 (4б)	
18	КР–2 (32б) Коллоквиум (30б)			
Рубежная аттестация (не менее 50 из 100 баллов)				
	0–62	**0–30**	**0–8**	
Семестровая аттестация (не менее 125 из 250)				
	0–124	**0–60**	**0–16**	**0–50**

Критерии оценки качества освоения студентами дисциплины:
- – пороговый («оценка «удовлетворительно») – 125-174 баллов.
- – стандартный (оценка «хорошо») – 175-224 баллов.
- – эталонный (оценка «отлично») – 225-250 баллов.

Приложение Г

Карта учебно–методического обеспечения

Дисциплины «Теория чисел и числовые системы», форма обучения – очная.

Всего часов – 72/54, из них лекций – 27, практических занятий – 45, СРС ауд. – 24, СРС – 72.

По направлению–050200.62 Педагогическое образование. Профили – Математика и информатика.

Обеспечивающая кафедра – «Алгебра и геометрия», семестры – 5.

Таблица 1. Обеспечение дисциплины учебными изданиями

Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол.стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
1 Бухштаб А.А. Теория чисел Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 384 с.	2	
2 Виноградов И.М. Основы теории чисел. СПб.: Лань, 2004. – 176 с.	5	
3 Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 222 с.	30	

Таблица 2 – Обеспечение дисциплины учебно–методическими изданиями

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол.стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
1 Теория чисел: Книга для студентов специальности «учитель математики», «прикладная математика», «ПОВТ» / Н.В. Неустроев; О.Н. Неустроева; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2004. – 161 с.	5	
2 Неустроев Н.В. Элементы прикладной теории чисел: Книга для студентов специальности «учитель математики» и «прикладная математика» / Автор Н.В. Неустроев; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2007. – 188 с.	3	

Главный библиотекарь

Сектора учебной литературы НовГУ Калинина Н.А.