

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭИС


Б.И. Селезнев
«26» июня 2014г.


Теория вероятностей и математическая статистика

Дисциплина по направлению

050100.62 – Педагогическое образование

Одновременно два профиля – Математика и информатика

СОГЛАСОВАНО

Начальник УМУ


Е.И. Грошев
«26» 06 2014г.

Разработал

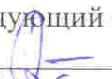
Доцент НовГУ


Л.З. Витова
«29» мая 2014г.

Заведующий выпускающей
кафедрой АГ


В.Е. Подран
«10» июня 2014г.

Принято на заседании кафедры
Заведующий кафедрой АГ


В.Е. Подран
«10» июня 2014г.

1 Цели освоения дисциплины

1. Цель дисциплины: формирование систематизированных знаний в области теории вероятностей и математической статистики.

Математическое образование предполагает построение математических моделей, при анализе большого количества данных. Наряду с применением ЭВМ, часто производится ручная обработка данных. Статистическая обработка результатов наблюдений представляет собой мощное средство количественных исследований. В связи с этим, преподавание данной дисциплины позволяет не только развить аналитическое мышление студентов, но и предоставляет методы для изучения специальных предметов.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

- развитие математического мышления;
- четкое усвоение основных понятий;
- умение на примерах показать применение основных понятий и теорем;
- умение давать оценку статистическому материалу;
- умение пользоваться статистическими методами и таблицами.

2 Место дисциплины в структуре ООП. Направление подготовки

Дисциплина входит в вариативную часть профессионального цикла БЗ.В9. Формируемые компетенции определяются Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по подготовке ФГОС 050100.62 - Педагогическое образование одновременно два профиля Математика и информатика.

Освоение дисциплины предполагает знание школьного курса, в частности разделы «Комбинаторика», приближённые вычисления.

Базовые знания в области математики, полученные при изучении данного курса, используются при освоении дисциплин: физика, информатика, педагогика, психология и т. д.

3 Требования к результатам освоения дисциплины

При формировании компетенции студент должен:

Компетенции:	Знать:	Уметь:	Владеть:
владеет основными положениями классических разделов теории вероятностей и математической статистики; базовыми идеями, аксиоматическим методом (ОК-1)	- основные понятия, определения и теоремы; - основные методы решения задач	- на примерах показывать основные понятия; - при решении задач обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса	- аппаратом теории вероятностей
умеет логически верно, аргументировано, и ясно строить свою устную и письменную речь (ОК-2)	- основные операции логики, - основные методы	- правильно строить доказательство теорем, - корректно выражать и аргументировано обосновывать имеющиеся знания	- основными положениями классических разделов данного курса

использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности (ОК-10)	- взаимосвязь между различными математическими и техническими дисциплинами, - основными способами обработки информации	- применять знание данного предмета в профессиональной деятельности, - использовать математический аппарат для оценивания результатов эксперимента, - самостоятельно работать с учебником.	Владеть умением оценок параметров статистики
---	---	--	--

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Трудоемкость дисциплины и формы аттестации

В структуре УМ выделены следующие учебные элементы модуля (УЭМ) в качестве самостоятельных разделов:

УЭМ1 Случайные события и дискретные случайные величины

УЭМ2 Непрерывные случайные величины. Элементы математической статистики

Учебная работа (УР)	Всего	Распределение по семестрам
		5
Полная трудоемкость дисциплины в зачетных единицах (ЗЕ), в т. ч.:	4	4
- экзамен	1	1
Распределение трудоемкости по видам УР в академических часах (АЧ):		
- лекции	22	22
- практические занятия	32	32
- аудиторная СРС	18	18
- внеаудиторная СРС	54	54
Аттестация: экзамен	36	36

Учебная работа (УР)	Всего	Распределение по семестрам	Коды формируемых компетенций
		5 сем.	050100.62
Трудоемкость модуля в зачетных единицах (ЗЕТ)	4	6	
Распределение трудоемкости по видам УР в академических часах (АЧ):			
1) УЭМ1 Случайные события и дискретные случайные величины			ОК-1,4,6
- лекции	12	12	
- практические занятия	14	14	
- в том числе, аудиторная СРС	9	9	
- внеаудиторная СРС	27	27	
2) УЭМ2 Непрерывные случайные величины. Элементы математической статистики			ОК-1,4,6
- лекции	10	10	
- практические занятия	18	18	
- в том числе, аудиторная СРС	9	9	
- внеаудиторная СРС	27	27	
Аттестация (экзамен)	36	36	

4.2 Содержание и структура разделов учебного модуля

УЭМ1 Случайные события и дискретные случайные величины.

1.1 Основные понятия теории вероятностей, операции над событиями.

1.2 Теоремы сложения, умножения. Формула Бернулли.

1.3 Формула полной вероятности, формула Байеса, теорема Пуассона.

1.4 Понятие дискретной случайной величины. Законы распределения случайной величины.

1.5 Числовые характеристики случайных величины и их свойства.

УЭМ2 Непрерывные случайные величины. Элементы математической статистики.

2.1 Функция распределения вероятностей случайной величины и плотность распределения случайной величины.

2.2 Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

2.3 Нормальное распределение.

2.4 Равномерное и показательное распределение.

2.5 Основные понятия математической статистики.

2.6 Статистические оценки параметров распределения. Элементы теории корреляции.

Календарный план, наименование разделов учебного модуля с указанием трудоемкости по видам учебной работы представлены в технологической карте учебного модуля (приложение Б).

4.3 Темы практических занятий

№ раздела УМ	Наименование	Трудоемкость, ак.час
1.1	Операции над событиями	2
1.2	Теоремы сложения и умножения. Формула Бернулли	3
1.3	Формула полной вероятности	3
1.4	Дискретные случайной величины, законы распределения случайной величины	3
1.5	Числовые характеристики случайной величины	3
2.1	Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины	2
2.2	Числовые характеристики непрерывной случайной величины	2
2.3	Нормальное распределение	2
2.4	Равномерное и показательное распределение	2
2.5	Основные понятия математической статистики	2
2.6	Статистические оценки параметров распределения. Элементы теории корреляции	8

4.4 Организация изучения дисциплины

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинаций методологических технологий (модульно-рейтинговое обучение, контекстное обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, технология развития критического мышления), осуществляемых с использованием следующих тактических действий:

- лекционные (вводная лекция, информационная лекция, обзорная лекция, лекция-консультация, проблемная лекция);
- практические (решение задач, углубление знаний, полученных на теоретических занятиях);
- тренинговые (формирование определенных умений и навыков, формирования алгоритмического мышления);
- активизации познавательной деятельности (работа с литературой, подготовка сообщений, докладов, рефератов, обсуждение различных решений и различных доказательств тех или иных задач и теорем);
- самоуправление (самостоятельная работа студентов, самостоятельное изучение материала).

Необходимо обязательное использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций, контроля знаний и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа средств при проведении лекционных и практических занятий.

5 Контроль и оценка качества освоения дисциплины

Контроль качества освоения студентами УМ и его составляющих осуществляется непрерывно в течении всего периода обучения с использованием балльно-рейтинговой системы (БРС), являющейся обязательной к использованию всеми структурными подразделениями университета.

Для оценки качества освоения модуля используются формы контроля: текущий – регулярно в течении всего семестра; рубежный – на девятой неделе семестра; семестровый – по окончании изучения УМ.

Оценка качества освоения модуля осуществляется с использованием фонда оценочных средств, разработанного для данного модуля, по всем формам контроля в соответствии с положением от 25.06.13, протокол № 9 « О фонде оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации студентов и итоговой аттестации выпускников».

Содержание видов контроля и их график отражены в технологической карте учебного модуля (Приложение Б).

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение

Учебно-методическое и информационное обеспечение учебного модуля представлено Картой учебно-методического обеспечения (Приложение В).

7 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Реализация учебного модуля требует наличия учебной аудитории, оборудованной:

- посадочными местами по количеству обучающихся;
- рабочим местом преподавателя;
- методическими материалами (включая электронные): комплект учебно-методических пособий по разделам модуля.

Технические средства обучения

MS Word, MS Excel, MS PowerPoint.

Приложения:

А – Методические рекомендации по организации изучения учебного модуля

Б – Технологическая карта

В - Карта учебно-методического обеспечения УМ

Приложение А

Методические рекомендации по организации изучения дисциплины по специальности 050100.62 -

В настоящее время некоторые вопросы теории вероятностей и математической статистики включены в школьную программу 9 класса. Поэтому возрастает необходимость будущим учителям изучить этот предмет более широко.

Необходимо при изложении материала уделять внимание методике преподавания того или иного вопроса. Больше проводить практических примеров из жизни.

Каждый преподаватель должен приложить максимум усилий, чтобы научить студента работать самостоятельно, для поиска необходимой информации.

Самостоятельную работу нужно понимать не только как выполнение домашнего задания, но и как всю совокупность его занятий:

1. умение слушать и писать лекции;
2. умение работать над конспектом;
3. умение работать с учебником;
4. составление рефератов, докладов.

При организации самостоятельной работы преподавателю необходимо решить три вопроса:

1. определить содержание работы;
2. определить форму ее выполнения;
3. определить способ выявления ее результатов и срок выполнения работы.

Первый вопрос, самый главный, всякая мыслительная деятельность студентов определяется содержанием работы, не менее важно разнообразие форм самостоятельных работ, так как трафарет в учебной работе вызывает отрицательное к ней отношение. Ведь еще Паскаль сказал: «Предмет математики настолько серьезен, что нужно не упускать случая делать его немного занимательным».

Всякая самостоятельная работа только тогда достигает цели, когда проверка, исправление ошибок и оценка осуществляется сразу после ее выполнения.

9.2 Методические рекомендации по организации изучения дисциплины: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Особенности изучения данного предмета состоят в том, что большинство студентов только понаслышке знакомы с теорией вероятностей и совсем не представляют себе, что такое математическая статистика.

С первых лекций студенты сталкиваются с трудностями, связанными с тем, что:

1. дисциплина содержит много новых понятий, определений, ранее неизвестных;
2. скудны знания элементарной и высшей математики, на которых базируется материал изучаемого предмета;
3. студенты не приучены к самостоятельной работе, у большинства не развито логическое и алгоритмическое мышление.

При этом важно указать студентам, на что необходимо обратить внимание, как быстрее войти в курс предмета.

Тема 1.1 Основные понятия теории вероятностей, операции над событиями.

Содержание теоретических занятий Л – 1.

Необходимо хорошо разобраться с основными понятиями, уметь различать случайные, достоверные события. Выучить формулы, по которым можно вычислять вероятность того или иного события.

Содержание практического занятия ПЗ – 1.

При решении задач, важно усвоить: какой произведен опыт, какие исходы при этом получены, какие события при этом происходят совместные, независимые и какие теоремы при этом надо использовать.

Например:

Задача 1. В ящике из 80 одинаковых деталей, 8 деталей нестандартных. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь окажется стандартной?

Решение. Обозначим через A событие – «взятая наугад деталь стандартная». Всего деталей 80, поэтому общее число возможных элементарных исходов $n = 80$. Эти исходы единственно возможны (одна деталь взята обязательно) и равновозможны (деталь взята наудачу). Благоприятствуют событию A лишь 72 исхода (72 детали стандартных). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{72}{80} = 0,9.$$

Задача 2. Из 25 посаженных деревьев прижилось 20. Определить относительную частоту прижившихся деревьев.

Решение. Обозначим через A событие – «посаженное дерево прижилось». Относительная частота прижившихся деревьев равна

$$W(A) = \frac{20}{25} = 0,8.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 3. В ящике 20 шаров: 12 белых, остальные черные. Сколькими способами можно отобрать 2 белых шара; 3 черных; 1 белый и 1 черный.

Задача 4. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из множества цифр $\{1,2,3,4,5\}$ без повторений.

Задача 5. Событие A - в мишень попал первый стрелок. Событие B - в мишень попал второй стрелок. В чем состоят события $A + B$; $A \cdot B$.

Задача 6. Подбрасывается игральный кубик. Какова вероятность, что выпадет четное число очков? Число очков кратно 3; простое число очков?

Тема 1.2 – 1.3 Теоремы сложения, умножения. Формула Бернулли, формула полной вероятности, формула Байеса.

Содержание теоретических занятий Л-2 – 4.

Теоремы сложения и умножения для совместных и несовместных событий. Формулы Бернулли, Байеса, Пуассона, полной вероятности.

Содержание практического занятия ПЗ-2 – 6.

Решение задач с использованием теорем сложения и умножения, формул Бернулли, Байеса, Пуассона, полной вероятности.

При решении задач по формуле Бернулли необходимо установить, удовлетворяет ли данным эксперимент схеме Бернулли. То есть:

1. Будут ли испытания независимы;
2. Имеет ли каждое испытание два исхода;
3. Будет ли вероятность появления события в каждом испытании постоянной.

При решении задач по формуле полной вероятности и формуле Байеса надо чётко уяснить, какие события мы выбираем за гипотезы.

Например:

Задача 1. по данным технического контроля 2% изготовленных телевизоров «Садко» нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность того, что из шести изготовленных телевизоров четыре нуждаются в дополнительной регулировке?

Решение. Каждый телевизор выпускается с конвейера независимо от другого, то есть события независимы. Каждый телевизор может нуждаться в регулировке или нет, причём вероятность этого события удовлетворяет схеме Бернулли

$$\text{и } P_6(4) = C_6^4 (0,002)^4 \cdot (0,98)^2 = 23 \cdot 10^{-7}.$$

Задача 2. В группе обучаются 20 девушек и 10 юношей. К уроку не выполнили задание 4 девушки и 3 юноши. Наудачу вызванный ученик не готов к уроку. Какова вероятность того, что был вызван отвечать юноша?

Решение. Пусть событие A - ученик не готов к уроку. Выдвинем гипотезы?

H_1 - была вызвана девушка, H_2 - был вызван юноша. Требуется найти $P(H_1/A)$. Это легко вычисляется, применяя формулу Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(H_1/A)}{P(A)}; \quad \text{из условия следует, что}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{3}; \quad P(H_2) = \frac{1}{3}; \quad P(A/H_1) = \frac{1}{5}; \quad P(A/H_2) = \frac{3}{10}; \quad \text{тогда } P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30}$$

(по формуле полной вероятности) и окончательно имеем:

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{7}.$$

Задача 3. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

Решение. Пусть событие A - денежный выигрыш на один лотерейный билет, событие B - вещевой выигрыш на этот же билет. Найдём вероятности этих событий:

$$P(A) = \frac{120}{1000} = 0,12, \text{ так как число исходов, благоприятствующих событию } A \text{ равно } 120, \text{ а}$$

$$\text{число всех исходов испытания } n = 1000. \quad P(B) = \frac{80}{1000} = 0,08, \text{ так как число исходов,}$$

благоприятствующих событию B равно 80.

Пусть событие C - какой-либо выигрыш на один лотерейный билет. Очевидно, $C = A + B$, причём события A и B несовместны. Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получим:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,12 + 0,08 = 0,2.$$

Задача 4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором два вопроса.

Решение. Пусть событие A - студент знает первый предложенный ему вопрос, событие B - студент знает второй предложенный ему вопрос. Тогда вероятность того, что студент знает первый предложенный ему вопрос, равна $P(A) = \frac{20}{25} = 0,8$. Вероятность того, что студент знает второй предложенный ему вопрос при условии, что он знает и первый предложенный вопрос равна $P_A(B) = \frac{19}{24}$. Пусть событие C - студент знает оба предложенных ему вопроса. Событие C состоит в том, что наступит и событие A , и событие B , то есть $C = AB$. Так как события A и B зависимы, то по теореме умножения вероятностей зависимых событий, получим:

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,8 \cdot \frac{19}{24} = 0,63.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под суммой двух событий?
2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для несовместных событий.
3. Что понимается под полной группой событий? Чему равна сумма вероятностей событий, составляющих полную группу?
4. Какие события называются противоположными? Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
5. Какие события называют независимыми, зависимыми? Приведите примеры.
6. Что называют условной вероятностью событий?
7. Что понимается под произведением двух событий? Приведите примеры.
8. Сформулируйте теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
9. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для совместных событий.
10. Приведите формулу полной вероятности.

Демонстрационный вариант для самостоятельной работы

1. В первой урне 3 белых шара и 4 черных шара, во второй урне 2 белых шара и 6 черных шара. Из первой урны вынимают один шар и перекладывают во вторую урну. Какова вероятность, что из второй урны вынутый шар окажется белым.
2. На первом станке изготавливают 90% стандартных деталей, на втором 80%. Взяли наугад одну деталь. Какова вероятность, что она стандартная.
3. Вероятность попадания в цель первого стрелка – 0,6 второго и третьего – 0,8, четвертого – 0,7; каждый стрелок сделал по выстрелу. Какова вероятность, что в цель попал хотя бы один.
4. Цех изготавливает детали. Их проверяют два контролёра. Вероятность того, что деталь попала к первому контролёру, равна 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что деталь признана стандартной первым контролёром – 0,94, вторым – 0,98. Деталь при проверке оказалась стандартной. Найти вероятность, что её проверял первый контролёр.

Тема «Асимптотические формулы Пуассона, Муавра-Лапласа» выносится на самостоятельное изучение.

Приведем примеры решения задач на эту тему:

Задача 1. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойти 350 семян.

Решение. Вычислить искомую вероятность $P_{400}(350)$ по формуле Бернулли затруднительно из-за громоздкости вычислений. Поэтому применим приближённую формулу, выражающую локальную теорему Лапласа:

$$Pn(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Из условия задачи $p = 0,9$, $q = 1 - 0,9 = 0,1$, $n = 400$, $k = 350$.

$$\text{Тогда } x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67.$$

Из таблицы 1 приложений находим $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$. Искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,165.$$

Задача 2. Среди семян пшеницы 0,02 % сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе семян 10 000 будет обнаружено 6 семян сорняков.

Решение. Применение Локальной теоремы Лапласа из-за малой вероятности $p = 0,0002$ приводит к значительному отклонению вероятности от точного значения $Pn(k)$. Поэтому при малых значениях p для вычисления $Pn(k)$ применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$Pn(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при $\lambda \leq 10$, причём, чем меньше p и больше n , тем результат точнее.

По условию задачи $p = 0,0002$, $n = 10\,000$, $k = 6$. Тогда $\lambda = 10\,000 \cdot 0,0002 = 2$ и

$$P_{10000} \cdot (6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

Задача 3. Процент всхожести семян пшеницы равен 90 %. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение. Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p , то вероятность $Pn(k_1 \leq k \leq k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях не менее k_1 раз и не более k_2 раз определяется по интегральной теореме Лапласа следующей формулой:

$$Pn(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ где}$$

$$\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении (табл. 2) даны значения этой функции для $0 \leq x \leq 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$. При отрицательных

значениях x в силу нечётности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем:

$$Pn(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

По условию задачи, $n = 500$, $p = 0,9$, $q = 0,1$, $k_1 = 400$, $k_2 = 440$. По приведённым выше формулам находим α и β :

$$\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45; \quad \beta = \frac{4400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49.$$

Тогда

$$P_{500}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -\Phi(1,49) + \Phi(7,45) = -0,4319 + 0,5 = 0,0681.$$

Тема 1.4 – 1.5 Понятие случайной величины. Законы распределения (биномиальный, геометрический, Пуассона). Числовые характеристики, свойства.

Содержание теоретических занятий Л - 6-12

Дается понятие случайной величины (дискретной). Вычисляются и определяются её числовые характеристики, свойства.

Содержание практических занятий ПЗ - 8-14

По заданной случайной величине составляют законы её распределения. Обычно, какая величина случайная указано в задаче, а чтобы узнать вероятности, с которыми она принимает, различные значения приходится пользоваться различными определениями вероятности (классическим, геометрическим) и теоремами сложения и умножения.

Задачи, в которых требуется составить закон распределения случайной величины, рекомендуется решать по схеме:

1. Установить, что в данной задаче является случайной величиной;
2. Перечислить все её возможные значения;
3. Найти соответствующие вероятности;
4. Составить закон распределения.

Например.

Задача 1. Три стрелка стреляют по одной мишени. Указать значение случайной величины x - число попадания в цель.

Решение. В данном эксперименте может случиться, что все стрелки попадут в мишень, или только один попадёт в мишень, или все трое промахнутся. Таким образом, случайная величина x может принять следующие значения: 0, 1, 2, 3.

Задача 2. Монета брошена два раза. Написать закон распределения случайной величины x - число появления герба.

Решение. Вероятность появления герба в каждом бросании монеты $p = \frac{1}{2}$, следовательно, вероятность появления цифры $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, так как это событие противоположное первому. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо два раза, либо один раз, либо ни одного раза. Следовательно, возможные значения случайной величины x таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Данный эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли и $Pn(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

$$P_2(2) = P(x = x_1) = c_2^2 p^2 q^2 = 0,25$$

$$P_2(1) = P(x = x_2) = c_2^1 p^1 q^1 = 0,5$$

$$P_2(0) = P(x = x_3) = c_2^0 p^0 q^2 = 0,25.$$

Тогда искомым закон распределения примет вид:

x	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

Задача 3. В партии из 6 деталей 4 стандартных. Наугад отобраны 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величин x - число стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Случайная величина x - число стандартных деталей среди отобранных может принимать значение: 1; 2; 3, так как среди 6 деталей 2 нестандартные, и среди неудачу отобранных трех деталей всегда будет хотя бы одна стандартная.

Для вычисления вероятностей применим классическое определение вероятности, тогда:

$$P(x=1) = \frac{c_4^1 c_2^2}{c_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(x=2) = \frac{c_4^2 c_2^1}{c_6^3} = \frac{6 \cdot 2}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(x=3) = \frac{c_4^3 c_2^0}{c_6^3} = \frac{1}{5}.$$

Итак, случайная величина x - число стандартных деталей среди отобранных имеет следующий вид распределения:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Задача 4. Закон распределения дискретной случайной величины:

x_i	3	8	13	18	23
p_i	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Вычислить $M(x)$, $D(x)$, $\sigma(x)$

Решение.

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

Подставляя данные задачи в эту формулу, получаем

$$M(x) = 3 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,2 + 18 \cdot 0,1 + 23 \cdot 0,1 = 10.$$

2. Дисперсия дискретной случайности величины вычисляется по формуле

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 p_i$$

Подставляя значения, x_i и p_i получим

$$D(x) = (3-10)^2 \cdot 0,3 + (8-10)^2 \cdot 0,3 + (13-10)^2 \cdot 0,2 + (18-10)^2 \cdot 0,1 + (23-10)^2 \cdot 0,1 = \\ = 14,7 + 1,2 + 18 + 6,4 + 16,9 = 41$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{41} \approx 6,4.$$

Задания для самостоятельной работы (демонстрационный вариант)

1. Дважды бросается игральная кость. Составить закон распределения случайной величины x - сумма очков при обоих бросаниях.
2. Дискретная случайная величина задана таблицей распределения

x_i	1	4	8
p_i	0,3	p_2	0,6

Найти все числовые характеристики и найти интегральную функцию.

3. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу выбирается 4 детали. Найти закон распределения случайной величины x - число нестандартных деталей среди отобранных и построить многоугольник распределения.
4. Два стрелка сделали по выстрелу с мишень. Вероятность попадания первого – 0,6, второго – 0,8. составить таблицу распределения для числа попадания в мишень.

Тема домашнего задания СРС

1. Закон Пуассона распределения дискретной случайной величины.

Тема 2.1 – 2.4 Непрерывные случайные величины. Функции распределения, плотности вероятности. Числовые характеристики. Равномерное, нормальное и показательный закон распределения.

Содержание теоретических занятий Л – 13 - 19

Рассматривая непрерывные случайные величины (возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток) следует усвоить законы их распределения, уяснить смысл числовых характеристик. Математическое ожидание характеризует среднее значение возможных значений случайных величин, а дисперсия и среднее квадратическое отклонение – рассеяние возможных значений вокруг математического ожидания. Одно из важных распределений – нормальное распределение; необходимо хорошо знать все формулы по этому разделу.

Содержание практического занятия ПЗ – 15 - 22

Следует научиться вычислять все числовые характеристики непрерывных случайных величин. Знать формулу функции плотности вероятностей. Уметь находить функцию плотности вероятностей по функции распределения и наоборот.

Например.

Задача 1. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти:

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$;
2. Математическое ожидание $M(X)$;
3. Дисперсию $D(X)$.

Решение.

1. Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от интегральной функции распределения $F(x)$, то есть

$$f(x) = F'(x).$$

Искомая дифференциальная функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

2. Если непрерывная случайная величина X задана функцией $f(x)$, то её математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x > 1$ равна 0, то из последней формулы имеем

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 3x^3 \cdot dx = \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

3. Дисперсию $D(X)$ определим по формуле

$$D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^3 dx = 3 \cdot \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx = 3 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{80}.$$

Задача 2. Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти:

1. Вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм.
2. Вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем 1,5 мм.

Решение:

1) Пусть X - длина детали. Если случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)$, то вероятность того, что X примет значения, принадлежащие отрезку $[\alpha, \beta]$, определяется по формуле

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Вероятность выполнения строгих неравенств $\alpha < X < \beta$ определяется той же формулой. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

В задаче $a = 40$, $\alpha = 34$, $\beta = 43$, $\sigma = 3$. Тогда

$$P(34 \leq X \leq 43) = \Phi\left(\frac{43 - 40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34 - 40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185.$$

2) По условию задачи $a - \delta < X < a + \delta$, где $a = 40$; $\delta = 1,5$. Подставив в (1) $\alpha = a - \delta$ $\beta = a + \delta$, имеем

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{ то есть}$$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi \cdot \left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Из формулы (2) имеем:

$$P(|X - 40| < 1,5) = 2\Phi \cdot \left(\frac{1,5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383.$$

Вопросы для самопроверки:

1. Какие случайные величины называют непрерывными? Приведите примеры.
2. Что называется законом распределения случайной величины?
3. Дайте определение интегральной функции распределения; дифференциальной функции распределения. Перечислите свойства этих функций.
4. Как вычисляются математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины?
5. Напишите дифференциальную функцию для нормального закона распределения.
6. Напишите формулу для определения вероятности попадания значений нормально распределённой случайной величины в заданный интервал.

Демонстрационный вариант для самостоятельной работы

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \\ a \sin \alpha, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \infty\right] \end{cases}$.

При каких значениях параметра a функция определяет непрерывную случайную величину. Найти функцию распределения плотности вероятности.

2. Случайная величина задана плотностью вероятностей. Найти функцию распределения, если $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0; 1) \\ 0, & x \notin (0; 1) \end{cases}$. Найти числовые характеристики.
3. Найти параметр C ; $M(X)$ и $D(X)$ равномерно распределённой случайной величины X , заданной плотностью вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (3; 5) \\ 0, & x \notin (3; 5) \end{cases}$.
4. Известно, случайная величина X подчинена нормальному закону распределения $M(X) = 4$ $D(X) = 16$. Найти плотность вероятностей случайной величины X .

Тема 2.5 – 2.7 Основные понятия математической статистики. Статистические оценки параметров распределения. Элементы теории корреляции.

Содержание теоретических занятий Л – 20 - 22

Одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины по данным выборки. Дадём определение вариационного ряда, доверительных интегралов, понятия: гистограммы, полигона, эмпирической функции распределения.

Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Некоторые понятия корреляционного анализа (корреляционный момент, коэффициент корреляции, функции регрессии, прямые регрессии).

Содержание практических занятий ПЗ – 15 - 22

Необходимо научиться находить точечные оценки, строить гистограммы, полигон по заданному статистическому распределению. Находить выборочные средние, выборочные дисперсии.

Для составления уравнения прямой регрессии учимся вычислять коэффициент корреляции.

Рассмотрим некоторые примеры решения задач

Задача 1. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти:

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$.
2. Математическое ожидание $M(X)$
3. Дисперсию $D(X)$.
4. Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.
5. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \text{при } -1 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

1. Так как $f(x) = F'(x)$, то найдём производную от каждой из функций, составляющих $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$2. \quad M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

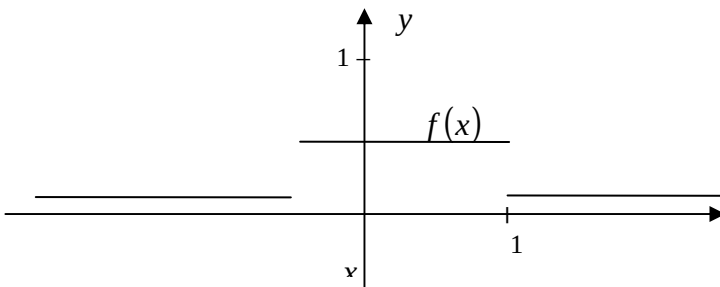
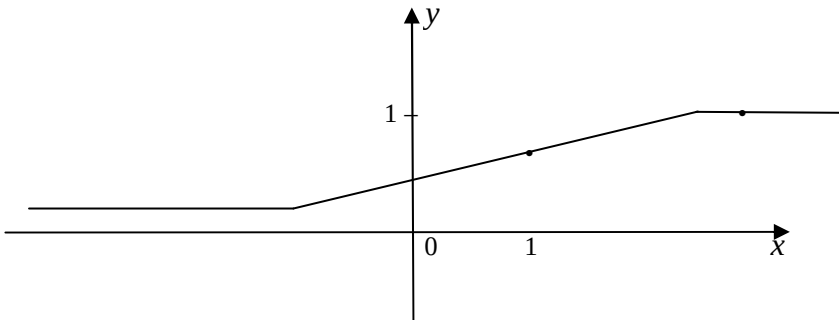
$$M(X) = \int_{-1}^2 x \cdot f(x) dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{3} x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 0,5.$$

$$3. \quad D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$M(X^2) = \int_{-1}^2 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = 1.$$

$$4. \quad \sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0,87.$$

$$5. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & -1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



Задача 2. Выборка дана в виде распределения частот. Найти:

- Распределение относительных частот;
- Эмпирическую функцию по данному распределению выборки, построить график функции $F^*(x)$.

x_i	2	5	6
n_i	10	15	20

а) объём выборки $\sum n_i = 10 + 15 + 20 = 45$.

Относительные частоты находятся по формуле:

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

$$w_1 = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}; \quad w_2 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}; \quad w_3 = \frac{20}{45} = \frac{4}{9},$$

тогда

x_i	2	5	6
w_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

контроль: $\sum w_i = 1$.

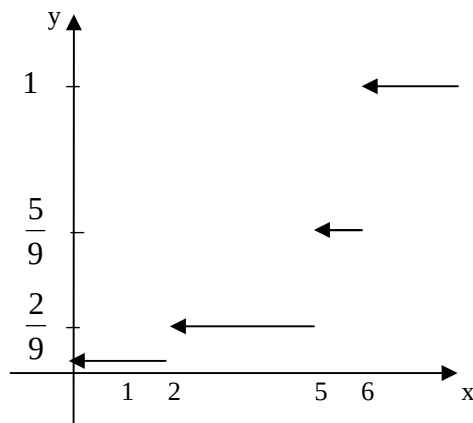
б) $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, n_x - число вариантов меньших x , n - объём выборки, $n = 45$.

1. Наименьшая варианта равна 2 ($x_1 = 2$) $\Rightarrow F^*(x) = 0$ при $x < 2$;
2. Значения, меньше 5 ($x \leq 5$), а именно $x_1 = 2$, наблюдались $n_1 = 10$ раз
 $\Rightarrow F^*(x) = \frac{n_x}{n} = F^*(x) = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$ при $2 < x \leq 5$;
3. Значения $x < 6$, а именно $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, наблюдались $n_1 + n_2 = 10 + 15 = 25$ раз
 $\Rightarrow F^*(x) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ при $5 < x \leq 6$;
4. Т.к. $x = 6$ - наибольшая варианта, $\Rightarrow F^*(x) = 1$ при $x > 6$.

Искомая эмпирическая функция имеет вид:

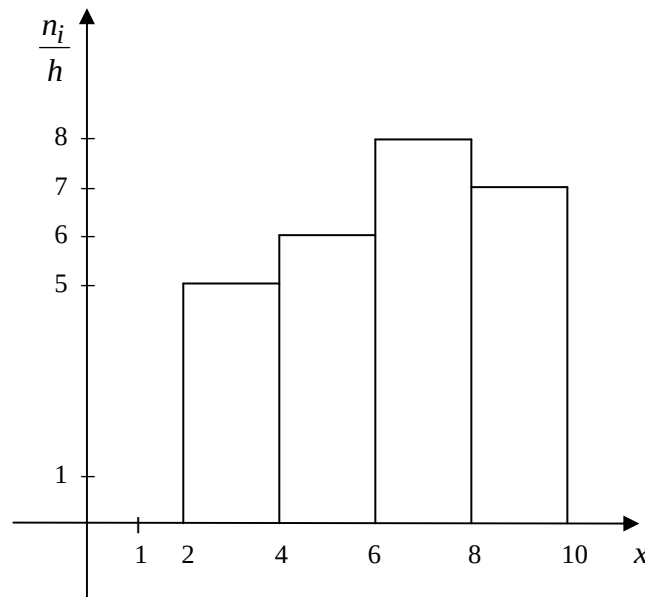
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{2}{9}, & \text{при } 2 < x \leq 5 \\ \frac{5}{9}, & \text{при } 5 < x \leq 6 \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

График полученной эмпирической функции $F^*(x)$ имеет вид:



Задача 3. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки $h = 2$.

Частичный интервал	2-4	4-6	6-8	8-10
Сумма частот	10	12	16	14
Вариант интервала; $h = 2$				
Плотность частоты; $h_i : h$	5	6	8	7



Задача 4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёма $n = 120$:

x_i	3832	3848	3850	3900
n_i	13	24	350	48

$$D_B = \left(\sum_{i=1}^n n_i x_i \right) / n \text{ или } D_B = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} \right]^2$$

$$n = 120 = \sum n_i = 13 + 24 + 35 + n_4 \Rightarrow n_4 = 48.$$

Найдем выборочную среднюю

$$\bar{x}_b = \left(\sum_{i=1}^4 n_i x_i \right) / n = \frac{13 \cdot 3832 + 24 \cdot 3848 + 35 \cdot 3850 + 48 \cdot 3900}{120} = 3867,65.$$

Найдем выборочную дисперсию

$$D_b = \left(\sum_{i=1}^4 n_i (x_i - \bar{x}_b)^2 \right) / n$$

$$D_b = \frac{13 \cdot (3832 - 3867,65)^2 + 24 \cdot (3848 - 3867,65)^2 + 35 \cdot (3850 - 3867,65)^2 + 48 \cdot (3900 - 3867,65)^2}{120}$$

$$D_b = 724,3775$$

Задача 5. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии y на x .

x	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
y	8	9	10	13	15	18	21	25	29	32

$$\text{Выборочный коэффициент корреляции } r_b = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_b) \cdot (y_i - \bar{y}_b)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_b)^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y}_b)^2}}.$$

Составим вспомогательную таблицу:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_b$	$(x_i - \bar{x}_b)^2$	$y_i - \bar{y}_b$	$(y_i - \bar{y}_b)^2$	$(x_i - \bar{x}_b)(y_i - \bar{y}_b)$
14	8	-9	81	-10	100	90

16	9	-7	49	-9	81	63
18	10	-5	25	-8	64	40
20	13	-3	9	-5	25	15
22	15	-1	1	-3	9	3
24	18	1	1	0	0	0
26	21	3	9	3	9	9
28	25	5	25	7	49	35
30	29	7	49	11	121	77
32	32	9	81	14	196	126
230	180	0	330	0100	654	158

$$\bar{x}_b = \frac{230}{10} = 23; \quad \bar{y}_b = \frac{180}{10} = 18.$$

$$\sum (x_i - \bar{x}_b)(y_i - \bar{y}_b) = 458; \quad \sum (x_i - \bar{x}_b)^2 = 330; \quad \sum (y_i - \bar{y}_b)^2 = 654.$$

$$r_b = \frac{458}{\sqrt{330} \cdot \sqrt{654}} = 0,039... \approx 0,04$$

Выборочное уравнение прямой регрессии y на x .

$$y - \bar{y}_b = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}_b) \quad (*)$$

$$\sigma_y \approx s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y}_b)^2}{n-1}}; \quad \sigma_x \approx s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_b)^2}{n-1}} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \approx \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y}_b)^2}{\sum (x_i - \bar{x}_b)^2}},$$

$$\text{тогда} \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{654}{330}} \approx 1,41.$$

$$y - 18 = 0,041 \cdot 1,41(x - 23)$$

Подставим в (*) $y - 18 = 0,0564x - 1,2972$

$$y = 0,0564x + 16,7028.$$

Задача 6. Найти основные выборочные характеристики $\bar{x}_b; s^2; s; v; s_x$.

С надёжностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней x_i для следующей выборки:

29,8; 30,5; 31,6; 29,6; 35,7; 36,8; 29,4; 21,6; 29,7; 24,6; 34,8; 36,4; 32,1; 39,7; 34,5; 34,8; 31,5; 34,8; 37,9; 29,6.

Выпишем ранжированный ряд:

21,6; 24,6; 29,4; 29,6; 29,6; 29,7; 29,8; 30,5; 31,5; 31,6; 32,1; 34,5; 34,8; 34,8; 34,8; 35,7; 36,4; 36,8; 37,9; 39,7.

Максимальное значение признака составляет 39,7, минимальное – 21,6. Разница составляет 18,1. Разобьём этот интервал на части. Возьмём $h = 4$. Получим 5 интервалов: 21 – 25; 25 – 29; 29 – 33; 33 – 37; 37 – 41.

Определим частоту попадания вариантов в каждый интервал: $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 9$, $n_4 = 7$, $n_5 = 2$.

$$\text{Относительные частоты: } W_1 = \frac{m}{n} = \frac{2}{20} = 0,1, \quad W_2 = 0, \quad W_3 = \frac{9}{20} = 0,45, \quad W_4 = \frac{7}{20} = 0,35,$$

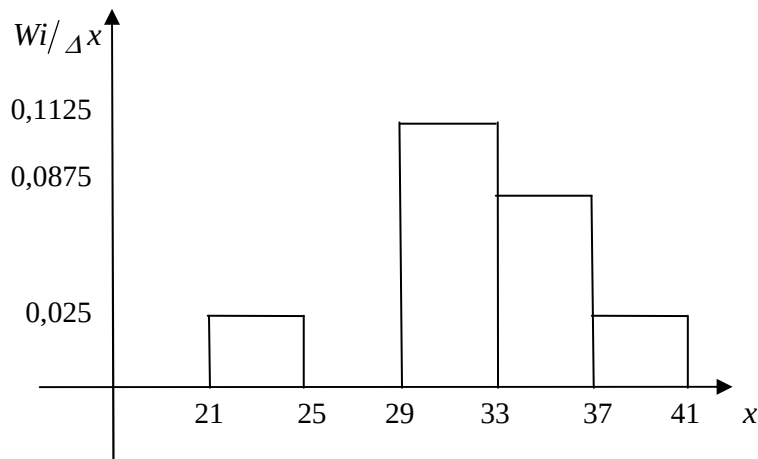
$$W_5 = \frac{2}{20} = 0,1, \quad W = \sum W_i = 1.$$

Вычислим плотности:

$$W_1 / h = \frac{0,1}{4} = 0,025; \quad W_2 / h = 0; \quad W_3 / h = \frac{0,45}{4} = 0,1125; \quad W_4 / h = \frac{0,35}{4} = 0,0875; \\ W_5 / h = \frac{0,1}{4} = 0,025.$$

Интервал значений	21 - 25	25 - 29	29 - 33	33 - 37	37 - 41
Частоты вариант	2	0	9	7	2
Относительные частоты	0,10	0	0,45	0,35	0,1
Плотность относительных частот	0,025	0	0,1125	0,0875	0,025

Строим гистограмму относительных частот – ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых являются интервалы, а высотами соответствующие значения плотности относительных частот.



Объём выборки небольшой, $n = 20$.

Выборочная средняя $\bar{x}_b = (x_1 + \dots + x_{20}) / n$

$$\bar{x}_b = \frac{645,4}{20} = 32,27$$

Исправленная дисперсия $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_b)^2}{n-1}$

$(x_i - \bar{x}_b)$: -10,67; -7,67; -2,87; -2,67; -2,67; -2,57; -2,47; -1,77; -0,77; -0,67; -0,17; 2,23; 2,53; 2,53; 2,53; 3,43; 4,13; 4,53; 5,63; 7,43. $\Sigma = 0$.

$$(x_i - \bar{x}_b)^2 \quad \Sigma = 372,502$$

$$S^2 = \frac{372,502}{19} = 19,605$$

$S = \sqrt{S^2} = 4,428$ - исправленное среднее квадратичное отклонение.

Ошибка средней: $S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4,428}{\sqrt{20}} = 0,99$.

V - коэффициент вариации. $V = \frac{S \cdot 100\%}{\bar{x}_b} = \frac{4,428 \cdot 100\%}{32,27} = 13,72$.

Доверительный интервал для оценки генеральной средней имеет вид:

$$\bar{x}_b - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_b + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Точность оценки σ : $\sigma = t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = t_\gamma \cdot \bar{s} = 2,093 \cdot 0,99 = 2,07$

t_γ находим по таблице приложения 3 (стр. 85).

$$t_\gamma = 2,093$$

Таким образом, с надёжностью 95% можно утверждать, что доверительный интервал для выборки составит:

$$32,27 - 2,07 < a < 32,27 + 2,07$$

$$30,2 < a < 34,34$$

Контрольные вопросы к экзамену

Теория вероятностей и математическая статистика (УЭМ1, УЭМ2) 5 семестр

1. Определения:
 - а) Эксперимента
 - б) вероятности (классическое, геометрическое, аксиоматическое, статистическое)
 - в) события (достоверное, невозможное, случайные, независимые, противоположные, несовместные)
2. Основные комбинаторные соединения и их число (сочетания, размещения, перестановки)
3. Действия над событиями
4. Теорема сложения вероятностей событий (для совместных и несовместных)
5. Теорема умножения вероятностей событий (для зависимых и независимых)
6. Формула Бернулли
7. Формула полной вероятности
8. Формула Байеса
9. Локальная и интегральная теоремы Лапласа
10. Понятие случайной величины, примеры
11. Функции плотности вероятности и её свойства
12. Функция распределения случайной величины и её свойства
13. Числовые характеристики случайной величины
 - а) математическое ожидание, свойства
 - б) дисперсия случайной величины и её свойства
14. Биноминальное распределение и его числовые характеристики
15. Геометрическое распределение и его числовые характеристики
16. Равномерное распределение и его числовые характеристики
17. Показательное распределение и его числовые характеристики
18. Нормальное распределение и его числовые характеристики
19. Основные понятия математической статистики (выборка, вариационный ряд, интервальный ряд, полигон, гистограмма)
20. Эмпирическая функция и её свойства
21. Точечные оценки числовых характеристик
22. Доверительные интегралы для $M(x)$ и $D(x)$
23. Корреляционный момент, коэффициент корреляции
24. Линии регрессии
25. Метод наименьших квадратов
26. Наивероятнейшее число появления события в схеме Бернулли

Демонстрационный вариант экзаменационного билета

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Кафедра алгебры и геометрии

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

Теория вероятностей и математическая статистика

Дисциплина по направлению

050100.62 – Педагогическое образование

Одновременно два профиля – Математика и информатика

1. Формула полной вероятности
2. Геометрическое распределение и его числовые характеристики
3. В партии из 6 деталей 4 стандартных. Наугад отобрали 3 детали. Составить закон распределения случайной величины, x - число стандартных среди отобранных.

УТВЕРЖДАЮ

Зав.кафедрой _____ Подран В.Е

Приложение Б

Технологическая карта
учебного модуля «Алгебра, геометрия и введение в математический анализ»
семестры 1 ЗЕТ 6, вид аттестации экзамен, акад.часов 126
баллов рейтинга 300
1 семестр

№ и наименование раздела учебного модуля, КЛ/КР	№ недели сем.	Трудоемкость, ак.час					Форма текущего контроля успеv. (в соотв. с паспортом ФОС)	Максим. кол-во баллов рейтинга
		Аудиторные занятия				СРС		
		ЛЕК	ПЗ	ЛР	АСРС			
УЭМ1 Случайные события и дискретные случайные величины.	1-7	12	14	-	9	27	КР	
1.1 Основные понятия теории вероятностей, операции над событиями	1	1	2	-	1	3	СР	15
1.2 Теоремы сложения, умножения. Формула Бернулли	2	2	3	-	2	6	ДР КР	7 8
1.3 Формула полной вероятности, формула Байеса, теорема Пуассона	3	2	3	-	2	6	КР ДР	8 7
1.4 Понятие дискретной случайной величины. Законы распределения случайной величины	4-5	3	3	-	2	6	КР ДР	7 8
1.5 Числовые характеристики случайных величины и их свойства	6-7	4	3	-	2	6	КР ДР	7 8
УЭМ2 Непрерывные случайные величины. Элементы математической статистики	8-18	10	18	-	9	27		
2.1 Функция распределения вероятностей случайной величины и плотность распределения случайной величины	8	1	2	-	1	3	СР	5
2.2 Числовые характеристики непрерывных случайных величин.	9	2	2	-	1	6	СР	10
2.3 Нормальное распределение	10	2	2	-	1	2	ДР	10

2.4 Равномерное и показательное распределение	11	1	2	-	1	2	КР	10
2.5 Основные понятия математической статистики	12-13	1	2	-	1	4	КР ДР	5 5
2.6 Статистические оценки параметров распределения	14-15	2	4	-	2	6	КР	10
2.7 Элементы теории корреляции	16-18	2	4	-	2	6	КР	10

Критерии оценки качества освоения студентами дисциплины:

трудоемкость дисциплины $6 \text{ ЗЕ} = 506 \times 6 = 3006$.

- (оценка «удовл.») - 150 - 209.
- (оценка «хор.») - 210 - 269.
- (оценка «отл.») - 270 - 300.

Приложение В

Карта учебно-методического обеспечения УМ

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика»

для направления 00100.625 – Педагогическое образование одновременно два профиля математика и информатика (академический бакалавр)

Часов: всего 4 ЗЕ, лекций 22, практ. зан.32, СРС 54

Форма обучения – очная

Обеспечивающая кафедра – Алгебры и геометрии

Семестр – 5

Таблица 1 – Обеспечение дисциплины учебными изданиями.

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол-во экз. в библиотеке НовГУ	Наличие в ЭБС
1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов вузов. - 8-е изд.,стер. - М. : Высшая школа, 2002. - 478,[1]с	113	
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. - 11-е изд.,стер. - М. : Высшая школа, 2005. - 478,[1]с.	31	
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. - 12-е изд.,перераб. - М. : Юрайт:Высшее образование, 2009. - 478,[2]с. - (Основы наук).	12	
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : Учеб.пособие для студ.вузов. - 6-е изд.,доп. - М. : Высшая школа, 2002. - 403,[1]с.	103	
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : Учеб.пособие для студ.вузов. - 7-е изд.,доп. - М. : Высшая школа, 2003. - 403,[1]с. -	5	
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов. - 9-е изд.,стер. - М. : Высшая школа, 2004. - 403,[1]с	2	
7. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие для вузов. - 7-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2006. - 446,[2]с.	12	
8. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов. - 8-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2010. - 492,[1]с	5	
Учебно-методические издания		
1. Теория вероятностей и математическая статистика : метод. указания / сост.: Н. В. Манова, С. В. Мельникова ; Новгород.	19	

гос. ун-т им. Ярослава Мудрого. - Великий Новгород, 2006. - 75с.		
2. Теория вероятностей и математическая статистика : метод. указания / сост.: Н. В. Манова, С. В. Мельникова ; Новгород. гос. ун-т им. Ярослава Мудрого. - 2-е изд., испр. и доп. - Великий Новгород, 2011. - 84с.	140	
3. Элементы теории вероятностей (Случайные события и случайные величины) : метод. рекомендации / сост. Л. З. Витова, И. А. Волкова ; Новгород. гос. ун-т им. Ярослава Мудрого. - Великий Новгород, 2004 - 100с.	11	

Главный библиотекарь
Сектора учебной литературы НовГУ

Калинина Н.А.