

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии



НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Учебный модуль по направлению подготовки
44.03.05 – Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
Профиль – Математика и информатика

СОГЛАСОВАНО

Начальник Учебного отдела

 О.Б. Широколобова
«19» 06 2017 г.

Разработал

Доцент кафедры АГ НовГУ

 Д.В. Коваленко
«07» 06 2017 г.

Принято на заседании кафедры
Протокол № 10 от 14.06 2017 г.
Заведующий кафедрой

 Т.Г. Сукачева
«14» 06 2017 г.

1 Цели освоения учебного модуля

Цель учебного модуля: формирование у студентов как будущих педагогов-математиков компетентности в геометрии как одной из важнейших областей современной математики.

Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

- формирование у студентов достаточных представлений о предмете неевклидовой геометрии и ее аналитическом аппарате, а также ее связях со смежными математическими дисциплинами;
- освоение студентами основ геометрии Лобачевского, ее моделей и их приложений;
- стимулирование студентов к самостоятельной учебно-исследовательской деятельности по освоению учебного модуля и формированию необходимых компетенций.

2 Место учебного модуля в структуре ОП направления подготовки

Данный модуль входит в вариативную часть профиля «Математика». Формируемые компетенции определяются Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование для профилей математика и информатика и образовательной программой, разработанной выпускающей кафедрой алгебры и геометрии. Изучается в 9-м семестре и базируется на таких дисциплинах, как «Евклидова геометрия», «Основания геометрии».

Знания, полученные при изучении учебного модуля, могут быть использованы для написания студентами выпускных квалификационных работ, а также для продолжения образования в магистратуре, аспирантуре, для самообразования.

3 Требования к результатам освоения учебного модуля

Процесс изучения УМ «Неевклидовы геометрии» направлен на формирование компетенций:

- СК-1 Способность демонстрировать знания, умения и навыки в области математики и информатики и применять их в научно-исследовательской и педагогической деятельности.

В результате освоения УМ студент должен знать, уметь и владеть:

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Знать	Уметь	Владеть
СК-1	повышенный	- основные примеры и строение локально-евклидовых и псевдоевклидовых пространств; - основные факты о простейших кривых, прямых и плоскостях в геометрии Лобачевского; - различные модели геометрии Лобачевского.	- доказывать основные теоремы модуля; - применять изученные теоретические знания к решению типовых упражнений.	- формулами вычисления расстояний и углов в псевдоевклидовых и локально-евклидовых пространствах; - методами построения точек, прямых, простейших кривых в различных моделях геометрии Лобачевского; - тригонометрическими соотношениями в геометрии Лобачевского.

4 Структура и содержание учебного модуля

4.1 Трудоемкость учебного модуля

В структуре УМ выделены 3 учебных элемента модуля (УЭМ) в качестве самостоятельных разделов:

- УЭМ 1 – локально евклидовы и псевдоевклидовы пространства;
- УЭМ 2 – геометрия Лобачевского: основные факты
- УЭМ 3 – различные модели геометрия Лобачевского.

Полная трудоемкость учебного модуля составляет 6 зачетных единиц (ЗЕ) – 9 семестр - со следующим распределением учебной работы (Табл. 2).

Таблица 2 – Распределение учебной работы и трудоемкость учебного модуля для очной формы обучения.

Учебная работа (УР)	Всего	Распределение по семестрам	Коды формируемых компетенций
		9 сем.	
Трудоемкость модуля в зачетных единицах (ЗЕТ)	6	6	
Распределение трудоемкости по видам УР в академических часах (АЧ): 1) УЭМ 1 <i>локально евклидовы и псевдоевклидовы пространства:</i>			
- лекции	12	12	СК-1
- практические занятия	18	18	СК-1
- в том числе, аудиторная СРС	6	6	
- внеаудиторная СРС	30	30	
2) УЭМ 2 <i>геометрия Лобачевского: основные факты:</i>			
- лекции	12	12	СК-1
- практические занятия	18	18	СК-1
- в том числе, аудиторная СРС	6	6	
- внеаудиторная СРС	30	30	
2) УЭМ 3 <i>различные модели геометрия Лобачевского:</i>			
- лекции	12	12	СК-1
- практические занятия	18	18	СК-1
- в том числе, аудиторная СРС	6	6	
- внеаудиторная СРС	30	30	
Аттестация:	36	36	
– экзамен			
Итого:	216	216	

4.2 Содержание и структура разделов учебного модуля

1. *Локально евклидовы и псевдоевклидовы пространства*
 - 1.1. Локально евклидовы пространства как обобщение евклидова пространства.
 - 1.2. Строение и геометрия локально евклидовых пространств.

- 1.3. Реализация локально евклидовых пространств в евклидовых пространствах большей размерности.
- 1.4. Псевдоевклидовы пространства.
- 1.5. Основы геометрии псевдоевклидовых пространств малых размерностей.
- 1.6. Пространство Минковского.
2. *Геометрия Лобачевского: основные факты*
 - 2.1. Предистория геометрии Лобачевского.
 - 2.2. Параллельные, пересекающиеся и расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского и их свойства.
 - 2.3. Простейшие кривые на плоскости Лобачевского и их строение. Геометрия орициклов.
 - 2.4. Прямые и плоскости в пространстве Лобачевского, их взаимное расположение.
 - 2.5. Связки прямых и плоскостей и простейшие поверхности. Геометрии сфер, эквидистантных поверхностей и орисфер.
 - 2.6. Основные тригонометрические соотношения в геометрии Лобачевского.
3. *Различные модели геометрия Лобачевского*
 - 3.1. Работы К. Гаусса и Я. Бойяи по неевклидовой геометрии. Дальнейшее развитие геометрии в XIX–XX вв. Геометрия и физика.
 - 3.2. Конформные модели А. Пуанкаре геометрии Лобачевского. Основные метрические соотношения.
 - 3.3. Дифференциально-геометрическое построение конформных моделей геометрии Лобачевского.
 - 3.4. Проективные модели Э. Бельтрами и Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Метрические соотношения геометрии Лобачевского в проективных моделях.
 - 3.5. Реализация геометрии Лобачевского в псевдоевклидовом пространстве.
 - 3.6. Изоморфизмы различных моделей геометрии Лобачевского. Применение моделей в геометрии Лобачевского.
 - 3.7. Значение геометрии Лобачевского в истории науки.

4.3 Организация изучения учебного модуля

Образовательный процесс по дисциплине строится на основе комбинаций методологических технологий (модульно-рейтинговое обучение, контекстное обучение, технология поэтапного формирования умственных действий, технология развивающего обучения, технология развития критического мышления), осуществляемых с использованием следующих тактических действий:

- лекционные (вводная лекция, информационная лекция, обзорная лекция, лекция-консультация, проблемная лекция);
- практические (решение задач, углубление знаний, полученных на теоретических занятиях);
- тренинговые (формирование определенных умений и навыков, формирования алгоритмического мышления);
- активизации познавательной деятельности (работа с литературой, подготовка сообщений, докладов, рефератов, обсуждение различных решений и различных доказательств тех или иных задач и теорем);
- самоуправление (самостоятельная работа студентов, самостоятельное изучение материала).

Целесообразно использовать информационные технологии при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций, контроля знаний и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа средств при проведении лекционных и практических занятий.

5 Контроль и оценка качества освоения учебного модуля

Контроль качества освоения студентами УМ и его составляющих осуществляется непрерывно в течение всего периода обучения с использованием балльно-рейтинговой системы (БРС), являющейся обязательной к использованию всеми структурными подразделениями университета.

Для оценки качества освоения модуля используются формы контроля:

- текущий – регулярно в течение всего семестра,
- рубежный – на девятой неделе семестра,
- семестровый – по окончании изучения УМ.

Оценка качества освоения модуля осуществляется с использованием фонда оценочных средств, разработанного для данного модуля, по всем формам контроля в соответствии с положением от 25.06.13, протокол № 9 «О фонде оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации студентов и итоговой аттестации выпускников».

Содержание видов контроля и их график отражены в технологической карте учебного модуля (Приложение Б).

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение

Учебно-методическое и информационное обеспечение учебного модуля представлено картой учебно-методического обеспечения (Приложение В).

7 Материально-техническое обеспечение учебного модуля

Для осуществления образовательного процесса по учебному модулю рекомендуется использование мультимедийного оборудования для демонстрации моделей локально-евклидовых и псевдоевклидовых пространств, взаимного расположения прямых и плоскостей, а также простейших кривых в пространстве Лобачевского и т.п. Подобного рода оборудование может быть использовано также для информационного сопровождения лекционных и практических занятий.

Приложения (обязательные):

- А – Методические рекомендации по организации изучения учебного модуля
- Б – Технологическая карта
- В – Карта учебно-методического обеспечения УМ
- Г – Экзаменационные вопросы
- Д – Пример экзаменационного билета

Приложение А

Методические рекомендации по организации изучения раздела учебного модуля «Неевклидовы геометрии»

Вся учебная работа по освоению студентами модуля «Неевклидовы геометрии» подразделяется на следующие основные виды занятий: лекционные (Л), практические занятия (ПЗ), самостоятельную работу студентов (СРС).

Содержание основных разделов, а также методы и средства проведения занятий представлены ниже (Л – 1 академический час, ПЗ – 1 академический час). Теоретические разделы соответствуют учебникам [1; 2, 3], практические занятия и домашние задания соответствуют учебнику [2]. После каждого практического занятия на дом задаются те примеры, аналоги которых рассмотрены в аудитории, а также примеры, требующие самостоятельного поиска путей решения в соответствии с рассмотренной теорией.

Темы самостоятельных работ представлены в конце каждого раздела. Отчет о проделанной самостоятельной работе и домашние работы представляются в виде конспекта.

Освоение каждого вопроса, включенного в программу модуля, предусматривает овладение студентами всех затронутых в нем понятий, теорем и их доказательств, методов и приемов решения соответствующих примеров и задач. Основными источниками, которые могут быть использованы, являются, в первую очередь, лекции преподавателя, а также учебники [1,2,3], задачки [2]. Полезной будет и другая литература, которую студент может подобрать сам.

Занятия проводятся, как правило, в диалоговой форме: в ходе лекций преподавателем систематически задаются вопросы студентам, на практических занятиях проводится опрос материала, преподавателем даются образцы решения типовых задач и т.п. После изучения каждой темы на лекционных и практических занятиях проводится небольшая практическая аудиторная самостоятельная работа, результаты которой учитываются в ходе рубежной аттестации. По завершению изучения каждого учебного элемента модуля (УЭМ) проводится итоговая контрольная работа (КР). В малочисленных студенческих группах (до 10 человек) имеет смысл использовать лишь 1 вариант каждой из самостоятельных и контрольных работ (при надлежащем контроле), это ставит всех студентов в равные условия.

Ниже дается краткое изложение содержания тем домашних заданий, аудиторных практических работ, а также демонстрационных вариантов контрольных работ.

Задания для аудиторной самостоятельной работы студентов:

СРС-1 – классификация изометрий (движений) евклидова пространства; дискретные и равномерно разрывные подгруппы группы изометрий и их классификация;

СРС-2 – псевдоевклидовы пространства и их арифметические модели;

СРС-3 – основные метрические понятия для псевдоевклидовых пространств;

КР-1 – решение системы задач по материалам учебного элемента модулей 1 и 2 (пример – работа №1 в приложении А);

СРС-4 – расстояние от точек данной прямой в пространстве Лобачевского до прямой, пересекающей данную; до прямой, расходящейся с данной; до параллельной ей прямой;

СРС-5 – взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского;

СРС-6 – вычисление углов и расстояния между точками в пространстве (H^2, ρ) ;

КР-2 – решение системы задач по материалам учебного элемента модуля 3 (пример – работа №2 в приложении А).

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы студентов:

– изучить теоретический материал учебного элемента модулей 1 и 2, используя:

а) лекции;

б) учебник [1] основного списка;

- подготовиться к выполнению аудиторных самостоятельных работ 1 – 3, изучив приёмы и методы решения типовых задач, рассмотренных на практических занятиях, а также задач из учебного пособия [2], предлагавшихся для домашних заданий;
- подготовиться к написанию теоретической работы по материалам модулей 1 и 2 (вопросы 1 -- 19 из приложения Г);
- подготовиться к написанию контрольной работы №1 (пример – работа №1 из приложения А);
- изучить теоретический материал учебного элемента модуля 3, используя:
 - а) лекции;
 - б) учебник [1] основного списка;
- подготовиться к выполнению аудиторных самостоятельных работ 4 – 6, изучив приёмы и методы решения типовых задач, рассмотренных на практических занятиях, а также задач из учебного пособия [2], предлагавшихся для домашних заданий;
- подготовиться к написанию контрольной работы по материалам модуля 3 (пример – работа № 2 из приложения А);
- подготовка к написанию теоретической работы по материалам модуля 3 (вопросы 20-47 из приложения Г).

Контрольная работа № 1

- 1 Найдите множество точек на плоскости Лобачевского H^2 , равноудаленных от:
 - двух пересекающихся прямых;
 - двух расходящихся прямых;
 - двух параллельных прямых.
- 2 Докажите, что в любой полосе, заключенной между параллельными или расходящимися прямыми в H^2 , содержится угол.
- 3 Выясните, как устроена проекция одной прямой на другую в H^2 .
- 4 Выясните строение проекции одной плоскости на другую в пространстве Лобачевского H^3 .
- 5 Пользуясь теоремой о том, что всякое движение плоскости Лобачевского является композицией не более трех осевых симметрий, опишите строение движений первого и второго родов.

Контрольная работа № 2

- 1 С помощью циркуля и линейки постройте окружность с данным центром и заданным радиусом в одной из моделей Пуанкаре плоскости Лобачевского.
- 2 Докажите, что для расстояния $\rho(z, w)$ между точками z и w в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского на евклидовой полуплоскости имеет место равенство

$$\operatorname{ch} \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}[z] \operatorname{Im}[w]}.$$

- 3 Докажите, что мероопределение углов в круговой модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, имеющей метрику $ds^2 = \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2))^2} (du^2 + dv^2)$, совпадает с евклидовым.
- 4 Покажите, используя круговую модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, что длина окружности неевклидова радиуса r равна $2\pi \sinh r$.
- 5 Охарактеризуйте изображения параллельных и расходящихся прямых в реализации плоскости Лобачевского на псевдосфере псевдоевклидова пространства.

Приложение Б
Технологическая карта
учебного модуля «*Неевклидовы геометрии*»
семестр __9__, ЗЕТ_6__, вид аттестации - _экзамен, акад.часов_216_, баллов рейтинга_300

№ и наименование раздела учебного модуля, КП/КР	№ не-де-ли сем.	Трудоемкость, ак.час					Форма текущего контроля успеv. (в соотв. с паспортом ФОС)	Максим. кол-во баллов рейтинга
		Аудиторные занятия				СРС 90		
		ЛЕК 36	ПЗ 54	ЛР	АСРС 18			
УЭМ1 Локально евклидовы и псевдоевклидовы пространства		12	18	-	6	30		
1.1. Локально евклидовы пространства как обобщение евклидова пространства.	1	2	3	-	1	5	ДР1	2
1.2. Строение и геометрия локально евклидовых пространств.	2	2	3	-	1	5	ДР2 СР1	2 10
1.3. Реализация локально евклидовых пространств в евклидовых пространствах большей размерности.	3	2	3	-	1	5	ДР3	2
1.4. Псевдоевклидовы пространства.	4	2	3	-	1	5	ДР4	2
1.5. Основы геометрии псевдоевклидовых пространств малых размерностей.	5	2	3	-	1	5	ДР5	2
1.6. Пространство Минковского.	5	2	3	-	1	5	ДР6 СР2	3 10
Всего по УЭМ 1:								33
УЭМ2 Геометрия Лобачевского: основные факты		12	18	-	6	30		
2.1. Предистория геометрии Лобачевского.	6	2	3	-	1	5	ДР7	2
2.2. Параллельные, пересекающиеся и расходящиеся прямые на плоскости Лобачевского и их свойства.	6	2	3	-	1	5	ДР8	2
2.3. Простейшие кривые на плоскости Лобачевского и их строение. Геометрия орициклов.	7	2	3	-	1	5	ДР9	2
2.4. Прямые и плоскости в пространстве Лобачевского, их взаимное расположение.	7	2	3	-	1	5	ДР10 СР3	2 10
2.5. Связки прямых и плоскостей и простейшие поверхности. Геометрии сфер, эквидистантных поверхностей и орисфер.	8	2	3	-	1	5	ДР11	2

2.6. Основные тригонометрические соотношения в геометрии Лобачевского.	9	2	3	-	1	5	КР 1 ДР12	20 2
Рубежная аттестация (контрольный опрос КЛ 1)								50
Всего по УЭМ 2:								92
УЭМ3 Различные модели геометрия Лобачевского		12	18	-	6	30		
3.1. Работы К. Гаусса и Я. Бойяи по неевклидовой геометрии. Дальнейшее развитие геометрии в XIX–XX вв. Геометрия и физика.	10	4	6	-	2	7	ДР13	3
3.2. Конформные модели А. Пуанкаре геометрии Лобачевского. Основные метрические соотношения.	11-12	6	9	-	2	11	ДР14 СР4	4 10
3.3. Дифференциально-геометрическое построение конформных моделей геометрии Лобачевского.	13	2	3	-	2	7	ДР15	4
3.4. Проективные модели Э. Бельтрами и Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Метрические соотношения геометрии Лобачевского в проективных моделях.	14	4	6	-	2	9	ДР16 СР5	4 10
3.5. Реализация геометрии Лобачевского в псевдоевклидовом пространстве.	15	2	3	-	1	8	ДР17	3 10
3.6. Изоморфизмы различных моделей геометрии Лобачевского. Применение моделей в геометрии Лобачевского.	16						ДР18 СР6	4 10
3.7. Значение геометрии Лобачевского в истории науки.	17						ДР19 КР 2	3 20
Рубежная аттестация (контрольный опрос КЛ 2)								50
Всего по УЭМ 3:								125
Экзамен								50
Итого:								300

Критерии оценки качества освоения студентами дисциплины

Трудоемкость дисциплины 6 ЗЕ - 300 б.

(в соответствии с Положением «Об организации учебного процесса по образовательным программам высшего образования»):

- оценка «удовлетворительно» – 150 – 209;
- оценка «хорошо» – 210 – 269;
- оценка «отлично» – 270 – 300.

Карта учебно–методического обеспечения

Учебного модуля **Неевклидовы геометрии**

Направление **050100.62 – Педагогическое образование, одновременно два профиля «Математика» и «Информатика»**

Форма обучения **дневная**

Часов: всего **180**, лекций **36**, практ. занятий **54**, СРС ауд. **18**, СРС внеаудит. **90**

ИЭИС, отделение информатики Кафедра **АГ** Семестры **9**

Таблица 1- Обеспечение учебного модуля учебными изданиями

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
1 Атанасян Л.С. Геометрия: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. вузов в 2 ч. Ч. 2. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – 2-е изд. (гриф Минобрнауки). – М.: КноРус, 2011. – 422 с.	10	
2 Гусева Н.И. Сборник задач по геометрии: учебное пособие для вузов: в 2 ч. Ч.2. (Гриф УМО) / Н.И. Гусева, Н.С. Денисова, О.Ю. Тесля. – М.: КноРус, 2012. – 527 с.	10	
3 Вернер А.Л. Геометрия: учебное пособие для вузов. Ч. 1./ А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор, С.А. Франгулов. – СПб.: Специальная литература, 1997. 352 с.	22	
4 Подран В.Е. Модели геометрии Лобачевского: Учебное пособие для вузов (гриф УМО). – Великий Новгород: ИПЦ НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2006. – 116 с.	11	
Учебно-методические издания		
4 Рабочая программа учебного модуля «Неевклидовы геометрии» для направления 44.03.05 Педагогическое образование, (с двумя профилями подготовки), профиль – Математика и информатика / Сост. Д.В. Коваленко. – Великий Новгород: НовГУ, 2017. – 15 с.		

Таблица 2 – Информационное обеспечение модуля

Название программного продукта, интернет-ресурса	Электронный адрес	Примечание
1. Видеолекции М. Светлого «Неевклидова геометрия» Часть первая	https://www.youtube.com/watch?v=ZlhdzGU9ySE	
2. Видеолекции М. Светлого «Неевклидова геометрия» Часть вторая	https://www.youtube.com/watch?v=BpC6jOL-tNk	
3. Видеолекции Фонда «Математические этюды»	http://www.etudes.ru/ru/	

Таблица 3 – Дополнительная литература

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
1. Никулин В.В. Шафаревич, И.С. Геометрии и группы. - М. : Наука, 1983. - 239с..	3	

Действительно для учебного года 2017/2018

Зав. кафедрой алгебры и геометрии

подпись

Т.Г. Сукачева

_____ 20..... г.

СОГЛАСОВАНО

НБ НовГУ:

должность

подпись

расшифровка

Приложение Г

Экзаменационные вопросы

Локально евклидовы и псевдоевклидовы пространства

- 1 Классификация изометрий (движений) евклидова пространства. Дискретные и равномерно разрывные подгруппы группы изометрий и их классификация.
- 2 Двумерные евклидовы пространственные формы и их геометрия. Обобщения по размерности.
- 3 Реализации евклидовых пространственных форм в R^n .
- 4 Псевдоевклидовы пространства и их арифметические модели.
- 5 Основные метрические понятия для псевдоевклидовых пространств. Двумерные и трехмерные псевдоевклидовы пространства и их геометрия. Пространство Минковского.

Геометрия Лобачевского: основные факты

- 6 Теоремы о сумме внутренних углов треугольника и аксиомы параллельности.
- 7 Параллельные прямые на плоскости Лобачевского. Независимость параллельности от выбора точки на прямой.
8. Симметрия отношения параллельности прямых.
- 9 Общий перпендикуляр к расходящимся прямым.
- 10 Теорема о перпендикулярах к стороне острого угла. Функция Лобачевского.
- 11 Расстояние от точек данной прямой до прямой, пересекающей данную.
- 12 Расстояние от точек данной прямой до прямой, расходящейся с ней.
- 13 Расстояние между точками параллельных прямых.
- 14 Пучки прямых и простейшие кривые. Свойства кривых. Равенство орициклов.
- 15 Отношение длин дуг концентрических орициклов. Радиус кривизны плоскости Лобачевского.
- 16 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского. Пространственный аналог аксиомы параллельности евклидовой геометрии.
17. Связки прямых и плоскостей и простейшие поверхности. Геометрия эквидистантной поверхности.
- 18 Геометрия орисферы.
- 19 Взаимное расположение орисферы и плоскости.

Различные модели геометрия Лобачевского

- 20 Построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
 - 21 Построение углов параллельности данных отрезков в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
 - 22 Построение окружности в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
 - 23 Построение эквидистант в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
 - 24 Построение орициклов в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.
 - 25 Инверсия и ее круговое свойство.
 - 26 Конформность инверсии.
 - 27 Построение образов прямых и окружностей при инверсии.
 - 28 Модель Пуанкаре H^2 плоскости Лобачевского на евклидовой полуплоскости: выполнимость аксиом I–II групп.
 - 29 Выполнимость аксиом III группы в модели Пуанкаре H^2 .
 - 30 Отражения и движения H^2 .
-

31 Равенство фигур в H^2 . Выполнимость аксиом IV–VI групп в H^2 .

32 Инвариантность метрики $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ относительно отражений H^2 .

33 Геодезические линии метрики $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

34 Вычисление углов и расстояния между точками в пространстве (H^2, ρ) .

35 Строение движений пространства (H^2, ρ) .

36 Вывод метрики для круговой модели Пуанкаре B^2 плоскости Лобачевского.

37 Вывод формулы расстояния в пространстве (H^2, ρ) .

38 Инвариантность метрики круговой модели Пуанкаре плоскости Лобачевского относительно отражений.

39 Вычисление расстояния между точками в пространстве (B^2, d) .

40 Модель Бельтрами плоскости Лобачевского, вывод ее метрики.

41 Вывод формулы для функции Лобачевского в модели Бельтрами.

42 Метрика псевдоевклидова пространства в псевдосферических координатах.

43 Внутренняя геометрия псевдосферы пространства E_1^3 .

44 Связь между различными моделями плоскости Лобачевского, их изоморфизм.

45 Теорема Пифагора для плоскости Лобачевского.

46 Вывод формулы площади треугольника в H^2 .

47 Вывод формул для длины окружности и площади круга в геометрии Лобачевского.

Приложение Д

Пример экзаменационного билета

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
Кафедра алгебры и геометрии

Экзаменационный билет № 2

УМ «Неевклидовы геометрии»

Для направления 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки),
Профиль – Математика и информатика

1 Двумерные евклидовы пространственные формы и их геометрия. Обобщения по размерности.

2 Построение углов параллельности данных отрезков в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

3 Задача.

Принято на заседании кафедры

Протокол №

Заведующий кафедрой АГ _____ Сукачева Т.Г.