	Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ **ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
	Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность:
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Квалификация выпускника: Техник по компьютерным системам
(базовая подготовка)

Разработчик: Болтянский В.В. , преподаватель

Методические рекомендации по учебной дисциплине «Элементы высшей математики» приняты на заседании предметной (цикловой) комиссии общеобразовательных, общих гуманитарных и социально-экономических и естественнонаучных дисциплин колледжа протокол №1 от 24. 09. 2015 г.

Председатель предметной (цикловой) комиссии ________________ Л.П. Белорусова

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Элементы высшей математики» составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы;

2 Рабочей программой учебной дисциплины;

3 Положением о планировании и организации самостоятельной работы студентов колледжей МПК НовГУ.

Методические рекомендации включают внеаудиторную работу студентов, предусмотренную рабочей программой учебной дисциплины в объёме 59 часов.

Формой внеаудиторной самостоятельной работы являются решение уравнений, выполнение различных упражнений.

В результате выполнения самостоятельной работы обучающийся должен:

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины «Элементы высшей математики»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, практические занятия и самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Элементы линейной алгебры		**46**	
Тема 1.1. Матрицы.	**Содержание учебного материала** Основные понятия. Действия над матрицами. Элементарные преобразования матриц.	*2*	*2*
	Практическое занятие №1 1. Задания по теме: «Матрицы»	*2*	
	Самостоятельная работа обучающихся №1 1. Упражнения на выполнение действий над матрицами	*4*	
Тема 1. 2. Определители.	Основные понятия. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей.	*2*	*2*
	Практическое занятие №2 1. Вычисление определителя второго, третьего и четвертого порядков	*2*	
	Самостоятельная работа обучающихся №2 1.вычисление определителей n-го порядка	*6*	
Тема 1. 3. Невырожденные матрицы.	Основные понятия. Обратная матрица. Ранг матрицы. Свойства ранга.	*2*	*2*
	Практическое занятие №3 1.нахождение обратной матрицы 2. вычисление ранга матрицы	*4*	
	Самостоятельная работа обучающихся №3 1. упражнения на вычисление обратной матрицы и ранга матрицы	*6*	
Тема 1. 4. Системы линейных алгебраических уравнений	Основные понятия. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формула Крамера. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса.	*2*	*2*
	Практическое занятие №4 1. Исследование системы линейных уравнений на совместность и определенность.	*6*	

	2. Решение систем линейных уравнений		
	Самостоятельная работа обучающихся №4 1. решение систем линейных уравнений	*8*	
Раздел 2. Аналитическая геометрия на плоскости		**19**	
Тема 2.1. Системы координат на плоскости. Линии на плоскости	Основные приложения метода координат на плоскости. Декартова система координат. Полярная система координат. Линии на плоскости. Основные понятия. Уравнение прямой на плоскости. Основные задачи.	*2*	*2*
	Самостоятельная работа обучающихся №5 1. Упражнения по теме «Системы координат. Линии на плоскости»	*7*	
	Практическое занятие №5 1. Упражнения по теме «Системы координат. Линии на плоскости»	*4*	
Тема 2.2. Кривые второго порядка	Основные понятия. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Канонические уравнение кривых второго порядка. Общее уравнение кривых второго порядка	*2*	*2*
	Практическое занятие №6 1. Упражнения по теме «Кривые второго порядка»	*4*	
Раздел 3. Основы дифференциального и интегрального исчисления		**28**	
Тема 3.1. Производная функции	Производные функции. Основные теоремы дифференциального исчисления. Вычисления производной сложной функции. Геометрический и физический смысл производной. Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Таблица производных. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Экстремум функции. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенности при вычислении пределов. Способ хорд и касательных (счисленное дифференцирование). Основные численные методы решения прикладных задач.	*2*	*2*
	Практическое занятие №7 1. Вычисление производных функции 2. Решение задач на тему «Производная»	*2*	
	Самостоятельная работа обучающихся №6	*12*	

	1. Упражнения на вычисление производных функции		
Тема 3.2. Неопределенный интеграл	Неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования. Вычисления неопределенных интегралов. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений.	*2*	*2*
	Практическое занятие №8 1. Упражнения по теме «Неопределенный интеграл»	*4*	
Тема 3.3. Определенный интеграл	Определенный интеграл и его приложение. Решение задач с использованием определенного интеграла. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Основные численные методы решения прикладных задач.	*2*	*2*
	Практическое занятие №9 1. Решение задач с использованием определенного интеграла	*4*	
Раздел 4. Основы теории комплексных чисел		**17**	
Тема 4.1. Понятие и представление комплексных чисел	Основные понятия. Геометрическое изображение комплексных чисел. Формы записи комплексных чисел.	*2*	*2*
	Практическое занятие №10 1. Упражнения по теме «Понятие и представление комплексного числа»	*2*	
Тема 4.2. Действия над комплексными числами	Сложение комплексных чисел. Вычитание комплексных чисел. Умножение комплексных чисел. Деление комплексных чисел. Извлечение корней из комплексных чисел.	*2*	*2*
	Практическое занятие №11 1 Выполнение действий над комплексными числами	*4*	
	Самостоятельная работа обучающихся №7 1. упражнения по теме «Действия над комплексными числами»	*7*	
Раздел 5. Дифференциальные уравнения		**19**	
Тема 5.1. Дифференциальные уравнения первого порядка	Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	*2*	*2*

	Практическое занятие №12 Решение дифференциальных уравнений первого порядка	*4*	
Тема 5.2. Дифференциальные уравнения второго порядка	Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.	*2*	*2*
	Практическое занятие №13 Решение дифференциальных уравнений второго порядка	*4*	
Тема 5.3. Методы решения дифференциальных уравнения	Основные численные методы решения дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений. Решение задач прикладного характера.	*2*	*2*
	Самостоятельная работа обучающихся №8 Решение дифференциальных уравнений	*7*	
Раздел 6. Функция нескольких переменных		**26**	
Тема 6.1. Предел и непрерывность функции нескольких переменных	Основные понятия теории функции нескольких Переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.	*1*	*2*
	Практическое занятие №14 Нахождение предела функции нескольких переменных в точке	*4*	
Тема 6.2. Частичные производные функции нескольких переменных	Частные производные первого порядка функции нескольких переменных. Частные производные второго порядка. Дифференциал функции.	*1*	*2*
	Практическое занятие №15 Нахождение частных производных функции нескольких переменных	*4*	
Тема 6.3. Экстремум функции нескольких переменных	Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.	*2*	*2*
	Практическое занятие №16 Нахождение экстремума функции двух переменных	*6*	
Тема 6.4. Условный	Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области. Условные экстремум. Метод Множителей Лагранжа.	*2*	*2*

экстремум	**Практическое занятие №17** Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных	*4*	
	Самостоятельная работа обучающихся №9 Нахождение функции нескольких переменных	*2*	
	Всего:	179	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:
1. – **ознакомительный** (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – **репродуктивный** (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)
3. – **продуктивный** (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

Содержание самостоятельной работы

Раздел 1. Элементы линейной алгебры
Тема 1.1. Матрицы

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №1:

1. Упражнения на выполнение действий над матрицами

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется, если студент выполнил полностью все задания,
- оценка **«хорошо»** выставляется, если студент выполнил одно из заданий 3 уровня сложности, при этом не допустил ни одной ошибки в заданиях 1 и 2 уровней.
- оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если студент безошибочно выполнил задания 1 и 2 уровней сложности, но не справился ни с одним заданием 3 уровня.
- Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если студент не выполнил 50% контрольных заданий.

1. Выполните действия над матрицами, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

Задание 1. Найти $3A-3B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 6\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти матрицу X из уравнения

$$\text{а) } 4\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 10 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 10\end{pmatrix};$$

$$\text{б) } 3X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 4. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -9 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } 2X - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Определение

Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Будем обозначать матрицы большими буквами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы. Запись вида a_{ij} означает, что элемент находиться в строке с номером i и столбце с номером j, то есть первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца.

Определение

Если $m = n$, то матрица А называется квадратной.

Определение

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой. Нулевая матрица обозначается обычной цифрой 0.

Определение

Совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющем левый верхний угол с правым нижним, называется *главной диагональю* матрицы.

Определение

Единичной матрицей называется матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0. Для обозначения единичной матрицы обычно используется буква $\boldsymbol{E}$.

Операции над матрицами.

Пусть даны две матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lk} \end{pmatrix}$

Две матрицы А и В называются равными, если, они имеют одинаковые размеры и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны друг другу. Т. Е. $m = l,\ n = k$ и $a_{ij} = b_{ij}$.

1. **Сложение матриц.**

Сложение определено только для матриц одинаковых размеров.

Суммой матриц $\boldsymbol{A}$и $\boldsymbol{B}$размеров $m \times n$ назовем матрицу $\boldsymbol{C}$этого же размера, каждый элемент которой, есть сумма соответствующих элементов матриц А и В, т.е. $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

2. **Умножение матрицы на число.**

Произведением матрицы $\boldsymbol{A}$размера $m \times n$ *на число* $\lambda \neq 0$ называется матрица $\boldsymbol{C}$того же размера, у которой $c_{ik} = \lambda a_{ik}$

Свойства:

a) + коммутативно. A+B = B+A
b) + ассоциативно A+(B+C)=(A+B)+C
c) + обратимо A+0 = A, A+ (-A) = 0
d) * ассоциативно $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu) A$
e) +, * дистрибутивно $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$
f) +, * дистрибутивно $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
g) $1 \bullet A = A$

3. **Умножение матриц**

Произведением матрицы $\boldsymbol{A}$размера $m \times n$ на матрицу $\boldsymbol{B}$размера $n \times k$ называется матрица $\boldsymbol{C}$ размеров, $n \times k$ элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj},$$

Свойства произведения:

a) * Не коммутативно $A * B \neq B * A$
b) * ассоциативно (A*B)*C = A*(B*C)
c) * дистрибутивно (A+B)*C=A*C+B*C
d) * дистрибутивно C*(A+B)=C*A+C*B

4. **Транспонирование матриц**

Пусть $\boldsymbol{A}$ - матрица размером $m \times n$. Тогда *транспонированной матрицей* А называется такая матрица $\boldsymbol{B}$ размеров $m \times n$, что $b_{ik} = a_{ki}$. Транспонированная матрица А обозначается A^T. Операция транспонирования заключается в том, что строки и столбцы в исходной матрице меняются местами.

Свойства:

a) $\left(A^T\right)^T = A$

b) $\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$

c) $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$

d) Если произведение матриц А и В определено, то $\left(AB\right)^T = B^T A^T$

Определение:

Квадратная матрица называется обратимой, если существует такая матрица В, для которой выполняется: $\begin{matrix} AB = \mathrm{E} \\ BA = \mathrm{E} \end{matrix}$. Обозначим В = A^{-1}.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры
Тема 1. 2. Определители

Объем учебного времени: 2 часа.
Самостоятельная работа студента №2:

1. Вычисление определителей n-го порядка

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Задание 1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 0{,}1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определители третьего порядка по правилу Саррюса (треугольника) и разложением по первой строке:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

1	$\begin{cases} 2x_1+5x_2-6x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=5 \\ x_1-3x_2+x_3=-2 \end{cases}$	3	$\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ x_1+2x_2+5x_3=0 \\ x_1-3x_2+x_3=5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=13 \\ x_1+3x_3=-3 \\ x_1-3x_2+x_3=-2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=0 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-1 \\ 3x_2-x_3=5 \end{cases}$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Теорема ***(Формула Крамера)*** *Если в системе n линейных уравнений с n неизвестными с $\Delta \neq 0$, то система имеет решение и притом единственное. Это решение задается формулами*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = -3, \\ 5x_1 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и столбец свободных членов

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, можно применить правило Крамера. Находим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20.$$

Итак,

$$x_1 = \frac{-18}{-15} = \frac{6}{5}, \qquad x_2 = \frac{-1}{-15} = \frac{1}{15}, \qquad x_3 = \frac{20}{-15} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ:
$x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{15}, \quad x_3 = -\frac{4}{3}$
.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры
Тема 1. 3. Невырожденные матрицы

Объем учебного времени: 2 часа.
Самостоятельная работа студента №3:

1. Упражнения на вычисление обратной матрицы и ранга матрицы

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:
Студенты должны
уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Задание 1. Найти $3A+2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти произведения AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix},$$ и сравнить их.

Задание 3. Найти $f(A)$, если $f(x)=3x^2-2x+10$, $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix}$.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Ранг матрицы. Элементарные строковые и столбцовые преобразования

Пусть дана матрица А порядка $m\times n$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

Матрица – система из m векторов (строк) и n векторов (столбцов) с m координатами.

Определение:

Строковым рангом называется, максимальное число линейно независимых строк матрицы А. Обозначим *r(A)*.

Столбцовым рангом называется, максимальное число линейно независимых столбцов матрицы А. Обозначим $\rho(A)$.

Определение:

Элементарными строчными (столбцовыми) преобразованиями матрицы назовем:

1. умножение строки (столбца) на число
2. сложение сток (столбцов).
3. перестановка строк (столбцоа) местами
4. приписывание строк (столбцов), которые линейно выражается через остальные строки (столбцы) матрицы.
5. отбрасывание строк (столбцов), которые линейно выражается через остальные строки (столбцы) матрицы.

Теорема:

При любом элементарном преобразовании строчный ранг не меняется.

Теорема:

$r(A)=\rho(A)$

Сточный ранг матрицы равен её столбцовому рангу.

Следствие:

$rangA = rangA^T$

Ступенчатые матрицы

Определение:

Матрица называется ступенчатой, если

$$\left(\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2k} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{matrix}\right)\right.$$

Теорема:

Всякая матрица с помощью элементарных преобразований может быть преобразована к ступенчатому виду.

Доказательство по методу Гаусса.

Теорема:

Ранг ступенчатой матрицы равен числу её не нулевых строк

Применение понятия ранг матрицы

1. Критерий совместности (критерий Кронекера)

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим матрицу A из коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица системы.

Столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов

Добавим к матрице A столбец свободных членов B, получим

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$ - расширенная матрица системы.

Любую систему можно записать в матричной форме AX=B

Теорема:

Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда и только тогда когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

2. Критерий определенности

Совместная система линейных уравнений определена тогда и только тогда когда ранг основной матрицы системы равен числу неизвестных этой системы, т.е. система определенна, если rang A = n.

Совместная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений если ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных этой системы, т.е. система определенна, если rang A < n.

3. Преобразование неособенной матрицы в единичную матрицу.

Определение:
Квадратная матрица называется неособенной, если её ранг равен её размеру.

Теорема:
Всякая неособенная матрица путем элементарных строчных преобразований может быть преобразована в единичную матрицу.

4. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

Определение:
Система решений однородной системы линейных уравнений называется фундаментальной если:
1. она линейно независима
2. любое другое решение однородной системы линейных уравнений линейно выражается через фундаментальную систему.

Теорема:
Фундаментальная система однородной системы линейных уравнений состоит из *n-r* векторов, где *n*- число неизвестных системы, а *r*- ранг основной матрицы системы.

Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

Теорема

Однородная система уравнений линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

всегда является совместной

.

Доказательство. Для однородной системы набор чисел $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, является решением.

Теорема

Сумма решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы. Решение, умноженное на число, тоже является решением.

Доказательство. Пусть c и d - решения системы $Ax = 0$. Тогда $Ac = 0$ и $Ad = 0$. Пусть $g = c + d$. Тогда

$$Ag = A(c + d) = Ac + Ad = 0 + 0 = 0.$$

Так как $Ag = 0$, то g - решение.

Пусть α- произвольное число, $h = \alpha c$. Тогда

$$Ah = A(\alpha c) = \alpha(Ac) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Так как $Ah = 0$, то h - решение.

Следствие

Если однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много различных решений.

Определение

Пусть $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - фундаментальная система решений однородной системы $Ax = 0$.

Тогда выражение

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n$$

где C_i произвольные числа, будем называть *общим решением* системы $Ax = 0$.

Общее решение неоднородной системы

Пусть дана неоднородная система линейных уравнений, записанная в матричном виде $Ax = b$.

Теорема:

Пусть c и d -- решения неоднородной системы $Ax = b$. Тогда их разность $g = c - d$ является решением однородной системы с той же матрицей, то есть решением системы $Ax = 0$.

Доказательство. По условию $Ac = b$ и $Ad = b$. Тогда

$$Ag = A(c - d) = Ac - Ad = b - b = 0.$$

Так как $Ag = 0$, то g - решение однородной системы

Теорема:

Пусть c- решение неоднородной системы $Ax = b$,g - любое решение однородной системы $Ax = 0$. Тогда $d = g + c$ - решение неоднородной системы.

Определение

Пусть x_0 - некоторое решение неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$, z - общее решение однородной системы $Ax = 0$. Тогда выражение $x = x_0 + z$ называется общим решением неоднородной системы.

Учитывая запись общего решения однородной системы через фундаментальную систему ее решений $x_1, x_2, \cdots, x_n$, получаем для общего решения неоднородной системы формулу

$$x = x_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n$$

Теорема

Система линейных уравнений $Ax = b$ может иметь либо бесконечно много решений, либо одно решение, либо не иметь решений.

Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений, когда $m = n$, то есть когда число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Если число уравнений равно числу неизвестных, то матрица A исходной системы - квадратная, порядка n, x и b - столбцы высоты n. Пусть определитель основной матрицы системы А отличен от нуля. Тогда существует обратная матрица. Умножив слева обе части равенства на A^{-1}, получим

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad x = A^{-1}b.$$

Таким образом, система уравнений имеет единственное решение, и оно в матричной форме может быть записано в виде:

$x = A^{-1}b.$

Это так называемый *матричный способ* решения системы линейных уравнений.

Введем следующие обозначения.

Пусть Δ_i определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой столбца с номером i на столбец b свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Раздел 1. Элементы линейной алгебры
Тема 1. 4. Системы линейных алгебраических уравнений

Объем учебного времени: 8 часов.
Самостоятельная работа студента №4:

1. Решение систем линейных уравнений

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Задание 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Найти решение уравнения $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Задание 3. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

1	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -12 \end{cases}$

Задание 1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 0{,}1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определители третьего порядка по правилу Саррюса (треугольника) и разложением по первой строке:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Найти решение СЛАУ по формулам Крамера:

1	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$	3	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 13 \\ x_1 + 3x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Алгоритм нахождения решений произвольной системы линейных уравнений (метод Гаусса)

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными $Ax = b$. Требуется найти ее общее решение, если она совместна, или установить ее несовместность. Предлагаемый алгоритм называется *методом Гаусса* или *методом последовательного исключения неизвестных*.

Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Назовем *элементарными операциями* следующие действия с матрицами:

1. перестановка строк;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. сложение строки с другой строкой, умноженной на число.

Отметим, что при решении системы уравнений, в отличие от вычисления определителя и нахождения ранга, нельзя оперировать со столбцами.

Цель алгоритма – привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований.

Шаг алгоритма заключается в следующем. Находим первый ненулевой столбец в матрице A^*. Пусть это будет столбец с номером i. Находим в нем ненулевой элемент и строку с этим элементом меняем местами с первой строкой. Чтобы не нагромождать дополнительных обозначений, будем считать, что такая смена строк в матрице A^* уже произведена, то есть

$a_{1i} \neq 0$. Тогда ко второй строке прибавим первую, умноженную на число $\left(-\frac{a_{2i}}{a_{1i}}\right)$, к третьей строке прибавим первую, умноженную на число $\left(-\frac{a_{3i}}{a_{1i}}\right)$, и т.д.

В результате получим матрицу

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2i+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mi+1}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

(Первые нулевые столбцы, как правило, отсутствуют.)

Если в матрице A_1^* встретилась строка с номером k, в которой все элементы $a_{kj}^{(1)}$ равны нулю, а $b_k^{(1)} \neq 0$, то выполнение алгоритма останавливаем и делаем вывод, что система несовместна.

Матрицу A_1^* можно записать в виде

$$A_1^* = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & B^* & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \end{array}\right),$$

где

$$B^* = \begin{pmatrix} a_{2i+1}^{(1)} & a_{2i+2}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{3i+1}^{(1)} & a_{3i+2}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mi+1}^{(1)} & a_{mi+2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

По отношению к матрице B^* выполняем описанный шаг алгоритма. Получаем матрицу

$$B_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{2j}^{(2)} & a_{2j+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{3j+1}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mj+1}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{pmatrix},$$

где $j > i$, $a_{2j}^{(2)} \neq 0$. Эту матрицу снова можно записать в виде

$$B_1^* = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & 0 & a_{2j}^{(2)} & a_{2j+1}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & C^* & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \end{array} \right),$$

и к матрице C^* снова применим описанный выше шаг алгоритма.

Процесс останавливается, если после выполнения очередного шага новая уменьшенная матрица состоит из одних нулей или если исчерпаны все строки. Заметим, что заключение о несовместности системы могло остановить процесс и ранее.

Если бы мы не уменьшали матрицу, то в итоге пришли бы к матрице вида

$$\tilde{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i}^{(1)} & \dots & a_{1j-1}^{(1)} & a_{1j}^{(1)} & \dots & a_{1s-1}^{(1)} & a_{1s}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1j}^{(2)} & \dots & a_{1s-1}^{(2)} & a_{1s}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rs}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выполняется так называемый обратный ход метода Гаусса. По матрице $\tilde{A}^*$ составляем систему уравнений. В левой части оставляем неизвестные с номерами, соответствующими первым ненулевым элементам в каждой строке, то есть $x_i, x_j, \dots, x_r$. Заметим, что $r = \mathrm{Rg} A$. Остальные неизвестные переносим в правую часть. Считая неизвестные в правой части некоторыми фиксированными величинами, несложно выразить через них неизвестные левой части.

Теперь, придавая неизвестным в правой части произвольные значения и вычисляя значения переменных левой части, мы будем находить различные решения исходной системы $Ax = b$. Чтобы записать общее решение, нужно неизвестные в правой части обозначить в каком-либо порядке буквами $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$, включая и те неизвестные, которые явно не выписаны в правой части из-за нулевых коэффициентов, и тогда столбец неизвестных можно записать в виде столбца, где каждый элемент будет линейной комбинацией произвольных величин $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ (в частности, просто произвольной величиной C_k). Эта запись и будет общим решением системы.

Если система была однородной, то получим общее решение однородной системы. Коэффициенты при C_1, взятые в каждом элементе столбца общего решения, составят первое решение из фундаментальной системы решений, коэффициенты при C_2 -- второе решение и т.д.

Пример Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 13x_5 + 2x_6 = 14, \\ 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 - x_6 = 18, \end{cases}$$

где неизвестными являются $x_1, \ldots, x_6$.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & -8 & 13 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & 3 & -6 & 6 & -1 & 18 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на число

$$\left(-\frac{8}{2}\right) = -4$$

,

к третьей строке прибавим первую, умноженную на

$$\left(-\frac{6}{2}\right) = -3$$

.

В результате получим

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на число

$$\left(-\frac{-6}{-3}\right) = -2$$

.

Получим

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Выписываем по матрице A_2^* систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad -3x_5 - 2x_6 = 6. \end{cases}$$

Переносим в правую часть неизвестные x_1, x_3, x_4, x_6 (неизвестное x_1 реально в ней присутствовать не будет, коэффициент перед ним равен нулю). Получаем

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_5 = 2 - x_3 + 2x_4 - x_6, \\ -3x_5 = 6 + 2x_6. \end{cases}$$

Пусть $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$, $x_6 = C_4$.

Из уравнений находим:

$$x_5 = -2 - \frac{2}{3}C_4,$$

$$x_2 = -2x_5 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 = 4 + \frac{4}{3}C_4 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 = 5 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 + \frac{5}{6}C_4.$$

$x_1 = C_1$, $x_2 = 5 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 + \frac{5}{6}C_4$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$, $x_5 = -2 - \frac{2}{3}C_4$, $x_6 = C_4$,

Пример Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4), к четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-5):

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку, умноженную на (-1), прибавим к третьей:

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{pmatrix}.$$

В третьей строке все элементы $a_{3j}^{(2)}$ равны нулю, а элемент $b_3^{(2)} \neq 0$. Значит, система несовместна.

Ответ: Система несовместна.

Пример Решите систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первую строку, умноженную на числа $\left(-\frac{3}{2}\right)$, (-1), (-2), прибавим соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке прибавим вторую, умноженную на $\left(-\frac{4}{7}\right)$. Получим

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

К четвертой строке прибавим третью, умноженную на $\frac{49}{15}$:

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{61}{5} & -\frac{14}{15} \end{pmatrix}.$$

Выписываем по матрице A_3^* систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = & 1, \\ \quad \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 = & \frac{1}{2}, \\ \quad\quad \frac{15}{7}x_3 - \frac{24}{7}x_4 = & -\frac{2}{7}, \\ \quad\quad\quad -\frac{61}{5}x_4 = & -\frac{14}{15}. \end{cases}$$

Находим последовательно значения неизвестных:

$$x_4 = \frac{14}{183}, \quad x_3 = \left(-\frac{2}{7} + \frac{24}{7}x_4\right) : \frac{15}{7} = \left(-\frac{2}{7} + \frac{24}{7} \cdot \frac{14}{183}\right) : \frac{15}{7} = -\frac{2}{183},$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4\right) : \frac{7}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{183} - \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{183}\right) : \frac{7}{2} = \frac{13}{183},$$

$$x_1 = (1 + x_2 - 3x_3 + x_4) : 2 = \left(1 + \frac{13}{183} + \frac{6}{183} + \frac{14}{183}\right) : 2 = \frac{108}{183}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{108}{183}, \quad x_2 = \frac{13}{183}, \quad x_3 = -\frac{2}{183}, \quad x_4 = \frac{14}{183}$.

Пример Найдите фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_3 = 0, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 10x_4 - 11x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 10 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку последовательно на (-2), 5 и 1 и прибавим соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам. Получим матрицу

$$A_1^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 20 & -16 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 10 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку умножим последовательно на числа 4 и 2 и прибавим соответственно к третьей и четвертой строкам. Получим матрицу

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. У полученной матрицы легко определить ранг, ее базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$. Отсюда следует, что $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, A_2^* = 2$. Число решений в фундаментальной системе равно разности между числом неизвестных и рангом матрицы, в нашем случае фундаментальная система состоит из трех решений.

Переходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 оставляем в левой части, остальные переносим в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5, \\ -3x_2 = -x_3 + 5x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Положим $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Получим $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$. Первое решение из фундаментальной системы:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$. Получим $x_2 = -\frac{5}{3}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$. Второе решение из фундаментальной системы решений:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Получим $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$. Третье решение из фундаментальной системы решений:

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений найдена. Общее решение имеет вид

$$x = C_1 x^{(1)} + C_2 x^{(2)} + C_3 x^{(3)}.$$

Ответ: Фундаментальная система решений:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

общее решение:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Раздел 2. Аналитическая геометрия на плоскости
Тема 2.1. Системы координат на плоскости. Линии на плоскости

Объем учебного времени: 2 часа.
Самостоятельная работа студента №5:

1. Упражнения по теме «Системы координат. Линии на плоскости»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Выполнить следующие задания:

1. Определить какие из точек M1 (3;1), M2 (2;3), M3 (6;3), M4 (-3;-3), M5 (3;-1), M6(-2;1) лежат на прямой 2x-3y-3=0 и какие не лежат на ней.
2. Точки P1, P2, P3, P4, P5 расположены на прямой 3x-2y-6=0; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2, -6. Определить ординаты этих точек.
3. Точки Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 расположены на прямой x-3y+2=0; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, -1, 3. Определить абсциссы этих точек.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M1(2;-3) параллельно прямой:
 1) 3x-7y+3=0; 2) x+9y-11=0; 3) 16x-24y-7=0; 4) 2x+3=0; 5) 3y-1=0.

5. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

6. Стороны треугольника AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

7. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$,$7x+y+19=0$. Вычислить площадь треугольника.

8. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угол и отрезок, отсекаемый на оси оу: а) $\varphi = \pi$, $b=3$; б) $\varphi =$,$b=5$.

9. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки P (2;-8) , Q (-1;7).

10. Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой:

1) параллельной данной прямой

2) перепендикулярной к данной прямой.

11. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.

12. Даны вершины треугольника A(4;6), B(-4;0), C(-1;-4). Составить уравнения

а) трёх его сторон;

б) медианы, проведённой из вершины A;

в) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

13. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину B(2;-1), а также уравнение высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведенных из различных вершин.

14. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину C(4;-1), а также уравнение высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

15. Определить угол φ , образованный двумя прямыми:

1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$;

2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

3) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$.

16. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже. Записать уравнение этой прямой в отрезках.

17. Даны прямые: 1)$2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4)$3x-5y-2=0$.

Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые на чертеже.

18. Через точку M(4;3) проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

19. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку C(1;1) и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 2.

20. Найти проекцию точки P(-8;12) на прямую, проходящую через точки A(2;-3) и B(-5;1).

21. Найти точку M1, симметричную точке M2(8;-9) относительно прямой, проходящей через точки A(3;-4) и B(-1;-2).

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Уравнение прямой на плоскости - определение.

Пусть на плоскости зафиксирована прямоугольная декартова система координат *Oxy* и в ней задана прямая линия.

Прямая, как и любая другая геометрическая фигура, состоит из точек. В фиксированной прямоугольной системе координат каждая точка прямой имеет свои координаты – абсциссу и ординату. Так вот зависимость между абсциссой и ординатой каждой точки прямой в фиксированной системе координат, может быть задана уравнением, которое называют уравнением прямой на плоскости.

Другими словами, **уравнение прямой на плоскости** в прямоугольной системе координат *Oxy* есть некоторое уравнение с двумя переменными *x* и *y*, которое обращается в тождество при подстановке в него координат любой точки этой прямой.

Осталось разобраться с вопросом, какой вид имеет уравнение прямой на плоскости. Ответ на него содержится в следующем пункте статьи. Забегая вперед, отметим, что существуют различные формы записи уравнения прямой, что объясняется спецификой решаемых задач и способом задания прямой линии на плоскости. Итак, приступим к обзору основных видов уравнения прямой линии на плоскости.

Общее уравнение прямой.

Вид уравнения прямой в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости задает следующая теорема.

Теорема.

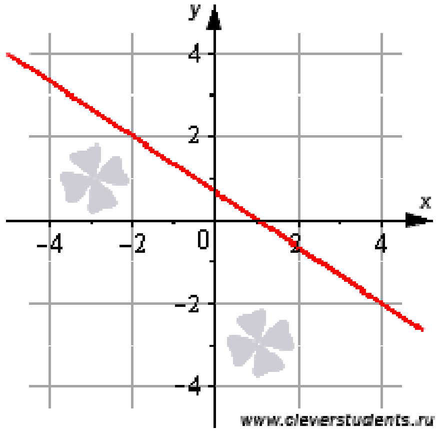
Всякое уравнение первой степени с двумя переменными *x* и *y* вида $Ax+By+C=0$, где *A*, *B* и *C* – некоторые действительные числа, причем *A* и *B* одновременно не равны нулю, задает прямую линию в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости, и всякая прямая на плоскости задается уравнением вида $Ax+By+C=0$.

Уравнение $Ax+By+C=0$ называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

Поясним смысл теоремы.

Заданному уравнению вида $Ax+By+C=0$ соответствует прямая на плоскости в данной системе координат, а прямой линии на плоскости в данной системе координат соответствует уравнение прямой вида $Ax+By+C=0$.

Посмотрите на чертеж.



С одной стороны можно сказать, что эта линия определяется общим уравнением прямой вида $2x+3y-2=0$, так как координаты любой точки изображенной прямой удовлетворяют этому уравнению. С другой стороны, множество точек плоскости, определяемых уравнением $2x+3y-2=0$, дают нам прямую линию, приведенную на чертеже.

Общее уравнение прямой называется **полным**, если все числа A, B и C отличны от нуля, в противном случае общее уравнение прямой называется **неполным**. Неполное уравнение прямой вида $Ax+By=0$ определяют прямую, проходящую через начало координат. При $A=0$ уравнение $Ax+By+C=0$ задает прямую, параллельную оси абсцисс Ox, а при $B=0$ – параллельную оси ординат Oy.

Таким образом, любую прямую на плоскости в заданной прямоугольной системе координат Oxy можно описать с помощью общего уравнения прямой при некотором наборе значений чисел A, B и C.

Нормальный вектор прямой, заданной общим уравнением прямой вида $Ax+By+C=0$, имеет координаты (A, B).

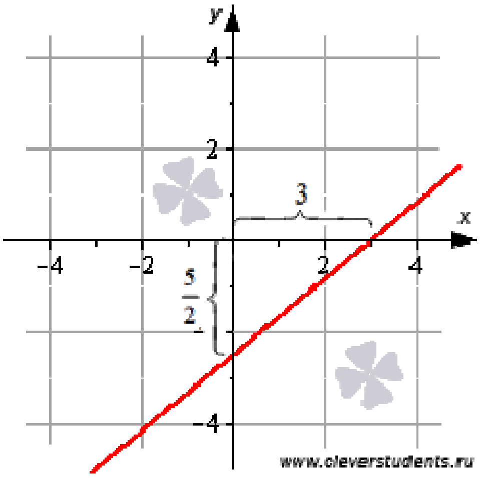
Все уравнения прямых, которые приведены в следующих пунктах этой статьи, могут быть получены из общего уравнения прямой, а также могут быть обратно приведены к общему уравнению прямой.

Рекомендуем к дальнейшему изучению статью общее уравнение прямой. Там доказана теорема, сформулированная в начале этого пункта статьи, приведены графические иллюстрации, подробно разобраны решения примеров на составление общего уравнения прямой, показан переход от общего уравнения прямой к уравнениям другого вида и обратно, а также рассмотрены другие характерные задачи.

Уравнение прямой в отрезках.

Уравнение прямой вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a и b – некоторые действительные числа отличные от нуля, называется **уравнением прямой в отрезках**. Это название не случайно, так как абсолютные величины чисел a и b равны длинам отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат). Таким образом, уравнение прямой в отрезках позволяет легко строить эту прямую на чертеже. Для этого следует отметить в прямоугольной системе координат на плоскости точки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$, и с помощью линейки соединить их прямой линией.

Для примера построим прямую линию, заданную уравнением в отрезках вида $\frac{x}{3}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$. Отмечаем точки $(3, 0), \left(0, -\frac{5}{2}\right)$ и соединяем их.



Детальную информацию об этом виде уравнения прямой на плоскости Вы можете получить в статье уравнение прямой в отрезках.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение прямой вида $y = k \cdot x + b$, где *x* и *y* - переменные, а *k* и *b* – некоторые действительные числа, называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом** (*k* – угловой коэффициент). Уравнения прямой с угловым коэффициентом нам хорошо известны из курса алгебры средней школы. Такой вид уравнения прямой очень удобен для исследования, так как переменная y представляет собой явную функцию аргумента x.

Определение углового коэффициента прямой дается через определение угла наклона прямой к положительному направлению оси *Ox*.

Определение.

Углом наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс в данной прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* называют угол α, отсчитываемый от положительного направления оси *Ox* до данной прямой против хода часовой стрелки.

Если прямая параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, то угол ее наклона считают равным нулю.

Определение.

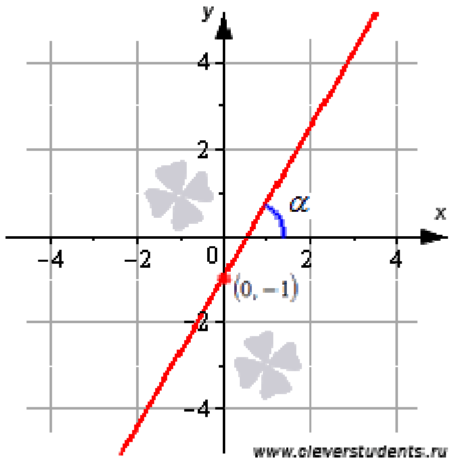
Угловой коэффициент прямой есть тангенс угла наклона этой прямой, то есть, $k = tg\alpha$.

Если прямая параллельна оси ординат, то угловой коэффициент обращается в бесконечность (в этом случае также говорят, что угловой коэффициент не существует). Другими словами, мы не можем написать уравнение прямой с угловым коэффициентом для прямой, параллельной оси *Oy* или совпадающей с ней.

Заметим, что прямая, определяемая уравнением $y = k \cdot x + b$, проходит через точку $(0, b)$ на оси ординат.

Таким образом, уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = k \cdot x + b$ определяет на плоскости прямую, проходящую через точку $(0, b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси абсцисс, причем $k = tg\alpha$.

В качестве примера изобразим прямую, определяемую уравнением вида $y = \sqrt{3} \cdot x - 1$. Эта прямая проходит через точку $(0, -1)$ и имеет наклон $\alpha = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ радиан (*60*градусов) к положительному направлению оси *Ox*. Ее угловой коэффициент равен $\sqrt{3}$.



Отметим, что уравнение касательной к графику функции в точке очень удобно искать именно в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом.

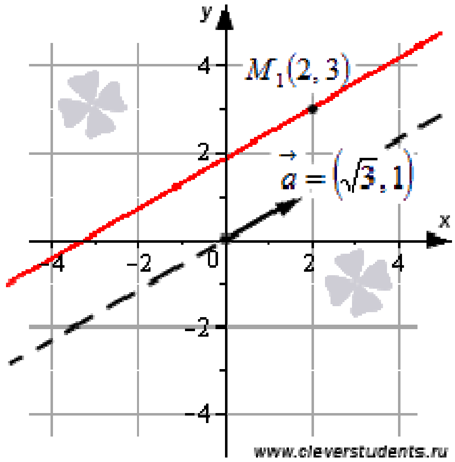
Рекомендуем продолжить изучение этой темы в разделе уравнение прямой с угловым коэффициентом. Там представлена более подробная информация, приведены графические иллюстрации, детально разобраны решения характерных примеров и задач.

Каноническое уравнение прямой на плоскости.

Каноническое уравнение прямой на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* имеет вид $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$, где x_1, y_1, a_x и a_y – некоторые действительные числа, причем a_x и a_y одновременно не равны нулю.

Очевидно, что прямая линия, определяемая каноническим уравнением прямой, проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. В свою очередь числа a_x и a_y, стоящие в знаменателях дробей, представляют собой координаты направляющего вектора этой прямой. Таким образом, каноническое уравнение прямой $\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y}$ в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости соответствует прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

Для примера изобразим на плоскости прямую линию, соответствующую каноническому уравнению прямой вида $\frac{x - 2}{\sqrt{3}} = \frac{y - 3}{1}$. Очевидно, что точка $M_1(2, 3)$ принадлежит прямой, а вектор $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$ является направляющим вектором этой прямой.



Каноническое уравнение прямой вида $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ используют даже тогда, когда одно из чисел a_x или a_y равно нулю. В этом случае запись $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}$ считают условной (так как содержится ноль в знаменателе) и ее следует понимать как $a_y(x-x_1)=a_x(y-y_1)$. Если $a_x=0$, то каноническое уравнение принимает вид $\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{a_y}$ и определяет прямую, параллельную оси ординат (или совпадающую с ней). Если $a_y=0$, то каноническое уравнение прямой принимает вид $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{0}$ и определяет прямую, параллельную оси абсцисс (или совпадающую с ней).

Детальная информация об уравнении прямой в каноническом виде, а также подробные решения характерных примеров и задач собраны в статье каноническое уравнение прямой на плоскости.

Параметрические уравнения прямой на плоскости.

Параметрические уравнения прямой на плоскости имеют вид $\begin{cases} x=x_1+a_x\cdot\lambda \\ y=y_1+a_y\cdot\lambda \end{cases}$, где x_1, y_1, a_x и a_y – некоторые действительные числа, причем a_x и a_y одновременно не равны нулю, а λ - параметр, принимающий любые действительные значения.

Параметрические уравнения прямой устанавливают неявную зависимость между абсциссами и ординатами точек прямой линии с помощью параметра λ (отсюда и название этого вида уравнений прямой).

Пара чисел (x, y), которые вычисляются по параметрическим уравнениям прямой при некотором действительном значении параметра λ, представляет собой координаты некоторой точки прямой. К примеру, при $\lambda = 0$ имеем $\begin{cases} x = x_1 + a_x \cdot 0 \\ y = y_1 + a_y \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$, то есть, точка с координатами (x_1, y_1) лежит на прямой.

Следует отметить, что коэффициенты a_x и a_y при параметре λ в параметрических уравнениях прямой являются координатами направляющего вектора этой прямой.

Для примера приведем параметрические уравнения прямой вида $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \cdot \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$. Эта прямая в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости проходит через точку с координатами (x_1, y_1) и имеет направляющий вектор $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$.

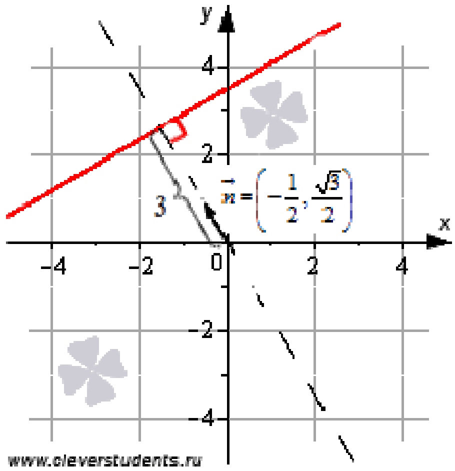
В статье параметрические уравнения прямой на плоскости Вы можете ознакомиться с подробным решением примеров и задач по этой теме.

Нормальное уравнение прямой.

Если в общем уравнении прямой вида $Ax + By + C = 0$ числа *A*, *B* и *C* таковы, что длина вектора $\vec{n} = (A, B)$ равна единице, а $C \leq 0$, то это общее уравнение прямой называется **нормальным уравнением прямой**. Нормальное уравнение прямой определяет в прямоугольной системе координат *Oxy* прямую линию, нормальным вектором которой является вектор $\vec{n} = (A, B)$, причем эта прямая проходит на расстоянии $|C|$ от начала координат в направлении вектора $\vec{n} = (A, B)$.

Часто можно видеть другую форму записи нормального уравнения прямой: $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y - p = 0$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - действительные числа, представляющие собой направляющие косинусы нормального вектора прямой единичной длины (то есть, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ и справедливо равенство $|\vec{n}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} = 1$), а величина *p* ($p \geq 0$) равна расстоянию от начала координат до прямой.

Для примера приведем общее уравнение прямой $-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y - 3 = 0$. Это общее уравнение прямой является нормальным уравнением прямой, так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ и $C = -3 \leq 0$. Оно в прямоугольной системе координат *Oxy* на плоскости задает прямую линию, нормальный вектор которой имеет координаты $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, и эта прямая удаленна от начала координат на 3единицы в направлении нормального вектора $\vec{n} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



Отметим, что уравнение прямой в нормальном виде позволяет находить расстояние от точки до прямой на плоскости.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ числа A, B и C таковы, что уравнение $Ax + By + C = 0$ не является нормальным уравнением прямой, то его можно привести к нормальному виду. Об этом читайте в статье нормальное уравнение прямой.

Раздел 3. Основы дифференциального и интегрального исчисления
Тема 3.1. Производная функции

Объем учебного времени: 12 часов.
Самостоятельная работа студента №6:

1. Упражнения на вычисление производных функции

Цель:

- Проверить на практике знание понятия производной функции
- умение находить производные элементарных функций, сложной функции, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования
- Закрепить навык нахождения производной высшего порядка.

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1\. 1) $y = 3x^2 - \sin^3 x$ 2) $y = \sqrt{x}\, tgx,$

3) $y = \dfrac{\ln x}{4 - 3\cos x},$ 4) $\begin{cases} x = \arcsin 2t, \\ y = 1/(1-4t^2). \end{cases}$

2\. 1) $y = 4x^4 + e^x,$ 2) $y = \sin x \cdot \ln x,$

3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctgx},$ 4) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(1-t)^2. \end{cases}$

3\. 1) $y = 3\sqrt[3]{x} - \ln^3 x,$ 2) $y = e^x \arcsin x,$

3) $y = \dfrac{ctgx}{x^4},$ 4) $\begin{cases} x = (t-1)^2, \\ y = \sin(t-1)^2. \end{cases}$

4\. 1) $y = 5x^2 - \arcsin^3 x,$ 2) $y = \sqrt[3]{x^2 \ln x},$

3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$ 4) $\begin{cases} x = tg(t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

5\. 1) $y = 4\sqrt[4]{x} + arctg^3 x,$ 2) $y = x^5 e^x,$

3) $y = \dfrac{tgx}{\ln x},$ 4) $\begin{cases} x = 7 + t^2 \\ y = ctg(3t^2). \end{cases}$

6\. 1) $y = 5\sqrt[5]{x} - 7\, arcctg^3 x,$ 2) $y = \cos x(3x - 1),$

3) $y = \dfrac{3x^5}{e^x},$ 4) $\begin{cases} x = \ln(1 - t^4), \\ y = \arccos(t^2). \end{cases}$

7\. 1) $y = 10x^3 + 2\cos^3 x,$ 2) $y = \sin x\sqrt[4]{x},$

3) $y = \dfrac{\ln x}{\arcsin x}$,

4) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{1+t^2}, \\ y = arcctgt. \end{cases}$

8. 1) $y = 6\sqrt[3]{x^2} - 7tg^3 x$,

2) $y = e^x \arccos x$,

3) $y = \dfrac{ctgx}{2x^4}$,

4) $\begin{cases} x = arctg\,(1+t)^2 \\ y = \sqrt{t^2+2t+2}. \end{cases}$

9. 1) $y = 7x^6 + 2\arccos^3 x$,

2) $y = e^x ctgx$,

3) $y = \dfrac{5\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$,

4) $\begin{cases} x = 3e^{-t} \\ y = (2+e^{-t})^2. \end{cases}$

10. 1) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3ctgx$,

2) $y = \sin x arctgx$,

3) $y = \dfrac{e^x}{\arcsin x}$,

4) $\begin{cases} x = \sin^2(1-4t), \\ y = \cos^2(1-4t). \end{cases}$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Определение: Производной функции f(x) (f'(x0)) в точке x0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Производная сложной функции:

Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке x значение производной $f'(x)$. Эта функция f' называется производной функции f, или *первой производной* от f. (Иногда саму исходную функцию f называют *нулевой производной* и обозначают тогда $f^{(0)}$.) Функция $g_1(x) = f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках x интервала $(a;b)$, которую мы обозначим $g_1'(x) = f''(x)$ и назовём *второй производной* функции $f(x)$. Если предположить, что вторая производная $g_2(x) = f''(x)$ существует во всех точках $x \in (a;b)$, то она может также иметь производную $g_2'(x) = f'''(x)$, называемую *третьей производной* функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n*-й производной* функции $f(x)$ называется производная от предыдущей, $(n-1)$-й производной $g_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = g_{n-1}'(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

если эта производная существует. n-я производная называется также *производной* n*-го порядка*, а её номер n называется *порядком производной*.

При $n = 1; 2; 3$ первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: $f'(x), f''(x), f'''(x)$ или y', y'', y'''; при прочих n -- числом в скобках в верхнем индексе: $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots$ или $y^{(4)}, y^{(5)}, \dots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задаёт мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени x, то вторая производная, то есть производная от $f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть *ускорение* значений $f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $(f''(x))' = (f'(x))''$).

Пример 1. Найдём вторую производную функции $f(x)=\sin^3 x$. Первая производная равна

$$f'(x)=(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cos x;$$

далее находим

$$f''(x)=3(\sin^2 x\cos x)'=3(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x)=3\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x).$$

Пример 2. Пусть $y=f(x)=e^{kx}$. Тогда

$$y'=e^{kx}\cdot k=ke^{kx};\, y''=k(e^{kx})'=ke^{kx}\cdot k=k^2e^{kx};\ldots;y^{(n)}=k^ne^{kx};\ldots.$$

При $k=1$ все производные оказываются равными исходной функции: $(e^x)^{(n)}=e^x$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $y=f(x)=\sin x$. Тогда

$$y'=\cos x,\ y''=-\sin x,\ y'''=-\cos x,\ y^{(4)}=\sin x.$$

Поскольку четвёртая производная $y^{(4)}$ совпала с исходной функцией y, то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при $k=0;1;2;\ldots$ получаем

$$y^{(4k)}(x)=\sin x;\, y^{(4k+1)}(x)=\cos x;\, y^{(4k+2)}(x)=-\sin x;\, y^{(4k+3)}(x)=-\cos x.$$

Заметим также, что

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y''=-\sin x=\sin(x+2\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=-\cos x=\sin(x+3\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)}=\sin x=\sin(x+4\frac{\pi}{2}).$$

Легко видеть, что имеет место общая формула:

$$y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2}).$$

Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x;dx)=f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении dx аргумента x) как функцию переменного x и найдём её дифференциал $d(df(x;dx))=d^2f(x;dx)$:

$$d^2 f(x; dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3 f(x; dx) = (f''(x)(dx)^2)' dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, n*-й дифференциал* $d^n f(x; dx)$, или *дифференциал* n*-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении dx); для него имеет место формула:

$$d^n f(x; dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Раздел 4. Основы теории комплексных чисел
Тема 4.2. Действия над комплексными числами

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №7:

1. Упражнения по теме «Упражнения по теме «Действия над комплексными числами»»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Выполните действия: 1) $(3+i)+(-3-8i)$; 2) $(5-4i)+(7+4i)$; 3) $(-6+2i)+(-6-2i)$; 4) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$; 5) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$; 6) $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

2. Вычислите: 1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$; 4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

3. Выполните действия: 1) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$; 2) $(5-3i)\cdot 2i$; 3) $(3+4i)(3-4i)$; 4) $(5+3i)(2-5i)$; 5) $(-2-i)(1+i)$; 6) $4+2i+(-1+6i)(6-i)$; 7) $(3-2i)(5+4i)-7i+1$; 8) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$; 6) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}4i)$.

4. Выполните действия: 1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{1-i}{1+i}$; 4) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 6) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 7) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 8) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 9) $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$; 10) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 11) $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$; 12) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.

5. Разложите на комплексные множители: 1) m^2+n^2; 2) $4m^2+9n^2$; 3) $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}$; 4) $m+n$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $1+\sin^2\alpha$; 7) 3.

6. Вычислите: 1) $(1-i)^{12}$; 2) $(1+i)^{17}$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$; 5) $(1+i)^{-2}$; 6) $(1-i)^{-3}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Комплексным числом z называется пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

1) два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) **суммой** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида $z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) **произведением** комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;

4) множество комплексных чисел $(x,\ 0),\ x\in\mathbf{R}$, отождествляется с множеством действительных чисел **R**.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2\cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Комплексное число (0, 1) обозначается символом $i = (0,\ 1)$. Тогда $(0,\ 1)\cdot(0,\ 1) = (-1,\ 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число z можно записать в виде

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$.

Эта запись называется **алгебраической формой** комплексного числа. Комплексное число $\bar{z} = (x,\ -y) = x - iy$ называется **сопряженным** по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами x и y. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**, при этом ось Ox называется **действительной**, а Oy -**мнимой**.

Расстояние r точки z от нулевой точки, т. е. число

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}},$$

называется **модулем** комплексного числа z и обозначается символом $|z|$.

Число

$$\theta = \begin{cases} arctg(y/x), & если \quad x > 0, \\ arctg(y/x) + \pi, & если \quad x < 0,\ y \geq 0, \\ arctg(y/x) - \pi, & если \quad x < 0,\ y < 0, \\ (\pi/2)\operatorname{sgn} y, & если \quad x = 0 \end{cases}$$

называем **аргументом** комплексного числа z и обозначаем символом $\theta = \arg z$. При заданном r углы, отличающиеся на $2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$, соответствуют одному и тому же числу. В этом случае записываем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z};\ \arg z$ называем **главным значением**аргумента.

Числа r и θ называют **полярными координатами** комплексного числа z. В этом случае

$z = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

Если $z_1 = (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$, $z_2 = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$, то

$z_1z_2 = (r_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2), r_1r_2\sin(\theta_1 + \theta_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2),\ \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2) \right).$$

Для n-й степени числа $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ формула приобретает вид $z^n = (r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta)$.

При $r = 1$ соотношение приобретает вид $z^n = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ и называется **формулой Муавра**.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),\ k = \overline{0,\ n-1}.$$

Раздел 5. Дифференциальные уравнения
Тема 5.3. Методы решения дифференциальных уравнения

Объем учебного времени: 7 часов.
Самостоятельная работа студента №8:

1. Решение дифференциальных уравнений

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Решить задачи Коши:

1. $y'y^2\left(3+e^x\right)-e^x=0, \quad y(0)=1;$

2. $xy'=\left(y+\sqrt{xy}\right), \quad y(1)=4;$

3. $(xy'-1)\ln x=2y, \quad y(e)=3;$

4. $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x, \quad y(\pi)=1;$

5. $y''=2yy', \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2;$

6. $y''-3y'-28y=0, \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=-25;$

7. $y''-6y'+9y=0, \quad y(0)=\frac{1}{2}, \quad y'(0)=3;$

8. $y''-10y'+41y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=14;$

9. $y''+\frac{1}{4}y=3\sin x, \quad y(0)=10, \quad y'(0)=-1.$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Уравнение вида F(x,y,y',y'',…,y(n)) = 0, связывающее аргумент x, функцию y(x) и ее производные, называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция y = φ(x, C1,C2,…,Cn), которая зависит от аргумента x и n независимых произвольных постоянных C1, C2, …, Cn, обращающая вместе со своими производными y', y'',…, y(n) уравнение (*) в тождество.

Определение. Частным решением уравнения (*) называется решение, которое получается из общего решения, если придавать постоянным C1, C2, …, Cn определенные числовые значения.

2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида y'+ρ(x)y=f(x), где ρ(x) и f(x) непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пример. Найти общее решение уравнения y'+3y=e2x и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям x=0, y=1.

Решение. Данное уравнение является линейным.

возьмем ρ(x)=3 и f(x)=e2x.

Решение ищем в виде y=U υ, где U и υ – некоторые функции от x. Находим y'= U'υ+ Uυ' и подставляем в уравнение значение y и y', получаем: U'υ+Uυ'+3Uυ=e2 x или U'υ+U(υ'+3υ)= e2x.

Найдем одно значение υ, при котором выражение в скобках, обращается в нуль: υ'+3υ=0. Получим уравнение с разделяющимися переменными. Решая его получаем: ln υ =–3x,υ=e–3x.Подставляем найденное значение υ в исходное дифференциальное уравнение, получаем уравнение с разделяющимися переменными. Итак, общее решение данного уравнения имеет вид: Найдем частное решение. Для этого подставим начальные условия в выражение для общего решения и найдем C.

3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида y''+ρy'+qy=f(x), где ρ и q – вещественные числа, f(x) – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида

y''+ρy'+qy=0,(1)

у которого правая часть f(x) равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение

K2+ρK+q=0 (2)

называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через K1 и K2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта D=ρ2–4q уравнения (2) следующим образом:

1. При D>0 корни характеристического уравнения вещественные и различные (K1≠K2), и общее решение имеет вид .

2. При D=0 корни характеристического уравнения вещественные и равные (K1=K2=K), и общее решение имеет вид:

3. Если D<0, то корни характеристического уравнения комплексные: , где – мнимая единица, и общее решение (K1=α+βi, K2=α–βi, β≠0), имеет вид y=eαx(C1 cosβx+C2 sinβx).

Пример 1. Найти общее уравнение y''–y'–2y=0.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид K2–K–2=0, его корни K1=1, K2=–2 вещественные и различные. Общее решение уравнения имеет вид y=C1ex+C2e–2x.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''–2y'+y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $K2–2K+1=0$, его корни $K1 = K2=1$ – вещественные и равные. Общее решение уравнения имеет вид $y=ex(C1+C2x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''–4y'+13y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $K2–4K+13=0$, его корни $K1=2+3i$, $K2=2–3i$ комплексные. Общее решение уравнения имеет вид $y=e2x(C1 cos3x+C2sin3x)$.

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$y''+\rho x+qy=f(x)$ (3), где $f(x)$ – непрерывная функция, отличная от нуля.

Общее решение такого уравнения представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения (3) и общего решения уо соответствующего однородного уравнения (1):

Поскольку нахождение общего решения однородного уравнения мы уже рассмотрели, то остаются рассмотреть вопрос о нахождении частного решения. Рассмотрим различные виды правых частей уравнения (3).

1) Пусть правая часть имеет вид $f(x)=e\alpha xPn(x)$, где $Pn(x)$ – многочлен степени n. Тогда частное решение ищем в виде , где $Qn(x)$ – многочлен той же степени, что и $Pn(x)$, а r – число, показывающее, сколько раз α является корнем характеристического уравнения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y''–2y'+y=x2+1$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $yo=ex(C1+C2x\ )$(см. пример 2). Так как правая часть уравнения является многочленом второй степени и ни один из корней характеристического уравнения не равен нулю ($K1=K2=1$), то частное решение ищем в виде , где A, B, C – неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $=Ax2+Bx+C$ и подставляя $=Ax2+Bx+C$, , в данное уравнение находим $2A–4Ax–2B+Ax2+Bx+C=x2+1$, или $Ax2+(B–4A)x+2A–2B+C=x2+1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем $A=1$, $B-4A=0$, $2A-2B+C=1$, Находим $A=1$, $B=4$, $C=7$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид , а общее решение - .

Пример 5. Найти общее решение уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y o=C1ex+C2e–2x$ (см. пример 1). В правой части данного уравнения стоит произведение многочлена нулевой степени на показательную функцию $e\alpha x$ при $\alpha=2$. Так как среди корней характеристического уравнения нет корней, равных 2, то частное решение данного уравнения ищем в виде $=A\ e2x$.

Дифференцируя и подставляя в уравнение получаем, и , откуда Подставляя найденное значение A в выражение для , найдем частное решение данного уравнения и общее решение запишется в виде . Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Для этого продифференцируем y. Подставляем начальные условия в y и y', находим C1 и C2 .Подставляя найденное значение C1 и C2 в выражение для y, найдем частное решение данного уравнения

2) Пусть правая часть имеет вид и $\alpha+\beta i$, $(\alpha–\beta i)$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищем в виде .Если же $\alpha+\beta i$, $(\alpha–\beta i)$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение находим в виде .

Раздел 6. Функция нескольких переменных
Тема 6.4. Условный экстремум

Объем учебного времени: 2 часа.
Самостоятельная работа студента №9:

1. Нахождение функции нескольких переменных

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:
Студенты должны
уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Найти экстремумы функции двух переменных z(x,y)

№	$z(x,y)$	№	$z(x,y)$
1	$x^3+8y^2+\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$	8	$\ln(x+y)-2x^4-2y^4$
2	$-3x^4-3y^4+12x+12y$	9	$x^2y^2-xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
3	$3x^2+y-6\ln x-8\ln y$	10	$3xy+\frac{4}{x}+\frac{5}{y}$
4	$3x^3+3y^3+x^2y+xy^2-3x-3y$	11	$\ln(x^2y)-x^2-9y^3,\quad (x>0)$
5	$5xy+\frac{6}{x}+\frac{5}{y}$	12	$4+xy+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{y}$
6	$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2y^2}+xy$	13	$4x^4+y^3-\ln x-3\ln y$
7	$x^3+y^3+x^2y+xy^2-24x-24y$	14	$2x^3+2y^3+x^2y+xy^2-9x-9y$

Найти экстремумы функции трех переменных u(x,y,z)

№	$u(x,y,z)$	№	$u(x,y,z)$
1	$x^2+2y^2+2z^2+2xy+2y-4z$	10	$x^2+y^2+4z^2+xy-8z+3y$
2	$x^4+y^4+z^4+2x^3+x^2+4y+4z$	11	$\sqrt[6]{xyz}-\frac{x+y+z}{6},(x>0,y>0,z>0)$
3	$\sqrt[4]{xyz}-\frac{x+y+z}{4},\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$	12	$x^2+4y^2+\frac{z^2}{9}-2xy-6y-\frac{2z}{9}$
4	$x^2+y^2+z^2+xz+zy-3x-3y-4z$	13	$x^4+y^4+z^4+2x^3-2x^2-\frac{y}{2}+4z$
5	$x^2+4y^2+9z^2-162\ln x-288\ln y-72\ln z$	14	$\sqrt[3]{xyz}-\frac{x+y+z}{3},\ (x>0,y>0,z>0)$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Экстремум функции двух переменных. Примеры исследования функций на экстремум

Пусть функция z=f(x,y) определена в некоторой окрестности точки (x0,y0). Говорят, что (x0,y0) – точка (локального) максимума, если для всех точек (x,y) некоторой окрестности точки (x0,y0) выполнено неравенство f(x,y)<f(x0,y0). Если же для всех точек этой окрестности выполнено условие f(x,y)>f(x0,y0), то точку (x0,y0) называют точкой (локального) минимума.

Точки максимума и минимума часто называют общим термином – точки экстремума.

Если (x0,y0) – точка максимума, то значение функции f(x0,y0) в этой точке называют максимумом функции z=f(x,y). Соответственно, значение функции в точке минимума именуют минимумом функции z=f(x,y). Минимумы и максимумы функции объединяют общим термином – экстремумы функции.

Алгоритм исследования функции z=f(x,y) **на экстремум**

1. Найти частные производные ∂z∂x и ∂z∂y. Составить и решить систему уравнений ∂z∂x=0;∂z∂y=0.. Точки, координаты которых удовлетворяют указанной системе, называют стационарными.
2. Найти ∂2z∂x2, ∂2z∂x∂y, ∂2z∂y2 и вычислить значение Δ=∂2z∂x2 ∂2z∂y2 (∂2z∂x∂y)2 в каждой стационарной точке. После этого использовать следующую схему:

1. Если Δ>0 и ∂2z∂x2>0 (или ∂2z∂y2>0), то в исследуемая точка есть точкой минимума.
2. Если Δ>0 и ∂2z∂x2<0 (или ∂2z∂y2<0), то в исследуемая точка есть точкой максимума.
3. Если Δ<0, то в расматриваемой стационарной точке экстремума нет.
4. Если Δ=0, то ничего определённого про наличие экстремума сказать нельзя; требуется дополнительное исследование.

Пример №1

Исследовать на экстремум функцию z=4x2 6xy 34x+5y2+42y+7.

Решение

Будем следовать указанному выше алгоритму. Для начала найдём частные производные первого порядка:

∂z∂x=8x 6y 34;∂z∂y= 6x+10y+42.

Составим систему уравнений ∂z∂x=0;∂z∂y=0.:

{8x 6y 34=0; 6x+10y+42=0.

Сократим каждое уравнение этой системы на 2 и перенесём числа в правые части уравнений:

{4x 3y=17; 3x+5y= 21.

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений. Мне в этой ситуации кажется наиболее удобным применение метода Крамера для решения полученной системы.

Δ=|||4 3 35|||=4 5 (3) (3)=20 9=11;Δx=|||17 21 35|||=17 5 (3) (21)=85 63=2 2;Δy=|||4 317 21|||=4 (21) 17 (3)= 84+51= 33.x=ΔxΔ=2211=2;y=ΔyΔ= 3311= 3.

Значения x=2, y= 3 – это координаты стационарной точки (2; 3). Теперь приступим ко второму шагу алгоритма. Найдём частные производные второго порядка:

∂2z∂x2=8;∂2z∂y2=10;∂2z∂x∂y= 6.

Вычислим значение Δ:

Δ=∂2z∂x2 ∂2z∂y2 (∂2z∂x∂y)2=8 10 (6)2=80 36=44.

Так как Δ>0 и ∂2z∂x2>0, то согласно алгоритму точка (2; 3) есть точкой минимума функции z. Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки (2; 3):

Zmin =z(2; 3)=4 22 6 2 (3) 34 2+5 (3)2+42 (3)+7= 90.

Ответ: (2; 3) – точка минимума; zmin= 90.

Пример №2

Исследовать на экстремум функцию z=x3+3xy2 15x 12y+1.

Решение

Будем следовать указанному выше алгоритму. Для начала найдём частные производные первого порядка:

∂z∂x=3x2+3y2 15;∂z∂y=6xy 12.

Составим систему уравнений ∂z∂x=0;∂z∂y=0.:

{3x2+3y2 15=0;6xy 12=0.

Сократим первое уравнение на 3, а второе – на 6.

{x2+y2 5=0;xy 2=0.

Если x=0, то второе уравнение приведёт нас к противоречию: 0 y 2=0, 2=0. Отсюда вывод: x≠0. Тогда из второго уравнения имеем: xy=2, y=2x. Подставляя y=2x в первое уравнение, будем иметь:

x2+(2x)2 5=0;x2+4x2 5=0;x4 5x2+4=0.

Получили биквадратное уравнение. Делаем замену t=x2 (при этом имеем в виду, что t>0):

t2 5t+4=0;D=(5)2 4 1 4=9;t1= (5) 9√2=5 32=1;t2= (5)+9√2=5+32=4.

Если t=1, то x2=1. Отсюда имеем два значения x: x1=1, x2= 1. Если t=4, то x2=4, т.е. x3=2, x4= 2. Вспоминая, что y=2x, получим:

y1=2x1=21=2;y2=2x2=2 1= 2;y3=2x3=22=1;y4=2x4=2 2= 1.

Итак, у нас есть четыре стационарные точки: M1(1;2), M2(1; 2), M3(2;1), M4(2; 1). На этом первый шаг алгоритма закончен.

Теперь приступим ко второму шагу алгоритма. Найдём частные производные второго порядка:

∂2z∂x2=6x;∂2z∂y2=6x;∂2z∂x∂y=6y.

Найдём Δ:

Δ=∂2z∂x2 ∂2z∂y2 (∂2z∂x∂y)2=6x 6x (6y)2=36x2 36y2=36(x2 y2).

Теперь будем вычислять значение Δ в каждой из найденных ранее стационарных точек. Начнём с точки M1(1;2). В этой точке имеем: Δ(M1)=36(12 22)= 108. Так как Δ(M1)<0, то согласно алгоритму в точке M1экстремума нет.

Исследуем точку M2(1; 2). В этой точке имеем: Δ(M2)=36((1)2 (2)2)= 108. Так как Δ(M2)<0, то согласно алгоритму в точке M2 экстремума нет.

Исследуем точку M3(2;1). В этой точке получим:

Δ(M3)=36(22 12)=108;∂2z∂x2|||M3=6 2=12.

Так как Δ(M3)>0 и ∂2z∂x2|||M3>0, то согласно алгоритму M3(2;1) есть точкой минимума функции z. Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки M3:

zmin=z(2;1)=23+3 2 12 15 2 12 1+1= 27.

Осталось исследовать точку M4(2; 1). В этой точке получим:

Δ(M4)=36((2)2 (1)2)=108;∂2z∂x2|||M4=6 (2)= 12.

Так как Δ(M4)>0 и ∂2z∂x2|||M4<0, то согласно алгоритму M4(2; 1) есть точкой максимума функции z. Максимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки M4:

zmax=z(2; 1)=(2)3+3 (2) (1)2 15 (2) 12 (1)+1=29.

Исследование на экстремум завершено. Осталось лишь записать ответ.

Ответ:

- (2;1) – точка минимума, zmin= 27;
- (2; 1) – точка максимума, zmax=29.

Примечание

Вычислять значение Δ в общем случае нет необходимости, потому что нас интересует лишь знак, а не конкретное значение данного параметра. Например, для рассмотренного выше примера №2 в точке M3(2;1) имеемΔ=36 (22 12). Здесь очевидно, что Δ>0 (так как оба сомножителя 36 и (22 12) положительны) и можно не находить конкретное значение Δ. Правда, для типовых расчётов это замечание бесполезно, – там требуют довести вычисления до числа :)

Пример №3

Исследовать на экстремум функцию z=x4+y4 2x2+4xy 2y2+3.

Решение

Будем следовать алгоритму. Для начала найдём частные производные первого порядка:

∂z∂x=4x3 4x+4y;∂z∂y=4y3+4x 4y.

Составим систему уравнений ∂z∂x=0;∂z∂y=0.:

{4x3 4x+4y=0;4y3+4x 4y=0.

Сократим оба уравнения на 4:

{x3 x+y=0;y3+x y=0.

Добавим к второму уравнению первое и выразим y через x:

y3+x y+(x3 x+y)=0;y3+x3=0;y3= x3;y= x.

Подставляя y= x в первое уравнение системы, будем иметь:

x3 x x=0;x3 2x=0;x(x2 2)=0.

Из полученного уравнения имеем: x=0 или x2 2=0. Из уравнения x2 2=0 следует, что x= 2√ или x=2√. Итак, найдены три значения x, а именно: x1=0, x2= 2√, x3=2√. Так как y= x, то y1= x1=0, y2= x2=2√, y3= x3= 2√.

Первый шаг решения окончен. Мы получили три стационарные точки: M1(0;0), M2(2√,2√), M3(2√, 2√).

Теперь приступим ко второму шагу алгоритма. Найдём частные производные второго порядка:

∂2z∂x2=12x2 4;∂2z∂y2=12y2 4;∂2z∂x∂y=4.

Найдём Δ:

Δ=∂2z∂x2 ∂2z∂y2 (∂2z∂x∂y)2=(12x2 4)(12y2 4) 42==4(3x2 1) 4(3y2 1) 16=16(3x2 1)(3y2 1) 16=16 ((3x2 1)(3y2 1) 1).

Теперь будем вычислять значение Δ в каждой из найденных ранее стационарных точек. Начнём с точки M1(0;0). В этой точке имеем: $\Delta(M1)=16\ ((3\ 02\ \ 1)(3\ 02\ \ 1)\ \ 1)=16\ 0=0$. Так как $\Delta(M1)=0$, то согласно алгоритму требуется дополнительное исследование, ибо ничего определённого про наличие экстремума в рассматриваемой точке сказать нельзя. Оставим покамест эту точку в покое и перейдём в иным точкам.

Исследуем точку M2(2√,2√). В этой точке получим:

$$\Delta(M2)=16\ ((3\ (\ \ 2\surd)2\ \ 1)(3\ (2\surd)2\ \ 1)\ \ 1)=16\ 24=384;\partial 2z\partial x2|||M2=12\ (\ \ 2\surd)2\ \ 4=24\ \ 4=20.$$

Так как $\Delta(M2)>0$ и $\partial 2z\partial x2|||M2>0$, то согласно алгоритму M2(2√,2√) есть точкой минимума функции z. Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки M2:

$$zmin=z(\ \ 2\surd,2\surd)=(\ \ 2\surd)4+(2\surd)4\ \ 2(\ \ 2\surd)2+4\ (\ \ 2\surd)2\surd\ \ 2(2\surd)2+3=\ \ 5.$$

Аналогично предыдущему пункту исследуем точку M3(2√, 2√). В этой точке получим:

$$\Delta(M3)=16\ ((3\ (2\surd)2\ \ 1)(3\ (\ \ 2\surd)2\ \ 1)\ \ 1)=16\ 24=384;\partial 2z\partial x2|||M3=12\ (2\surd)2\ \ 4=24\ \ 4=20.$$

Так как $\Delta(M3)>0$ и $\partial 2z\partial x2|||M3>0$, то согласно алгоритму M3(2√, 2√) есть точкой минимума функции z. Минимум функции z найдём, подставив в заданную функцию координаты точки M3:

$$zmin=z(2\surd,\ \ 2\surd)=(2\surd)4+(\ \ 2\surd)4\ \ 2(2\surd)2+4\ \ \ 2\surd(\ \ 2\surd)\ \ 2(\ \ 2\surd)2+3=\ \ 5.$$

Настал черёд вернуться к точке M1(0;0), в которой $\Delta(M1)=0$. Согласно алгоритму требуется дополнительное исследование. Под этой уклончивой фразой подразумевается "делайте, что хотите" :). Общего способа разрешения таких ситуаций нет, – и это понятно. Если бы такой способ был, то он давно бы вошёл во все учебники. А покамест приходится искать особый подход к каждой точке, в которой $\Delta=0$. Ну что же, поисследуем поведение функции в окрестности точки M1(0;0). Сразу отметим, что z(M1)=z(0;0)=3. Предположим, что M1(0;0) – точка минимума. Тогда для любой точки M из некоторой окрестности точки M1(0;0) получим z(M)>z(M1), т.е. z(M)>3. А вдруг любая окрестность содержит точки, в которых z(M)<3? Тогда в точке M1 уж точно не будет минимума.

Рассмотрим точки, у которых y=0, т.е. точки вида (x,0). В этих точках функция z будет принимать такие значения:

$$z(x,0)=x4+04\ \ 2x2+4x\ \ \ 0\ \ 2\ \ \ 02+3=x4\ \ 2x2+3=x2(x2\ \ 2)+3.$$

В всех достаточно малых окрестностях M1(0;0) имеем x2 2<0, посему x2(x2 2)<0, откуда следует x2(x2 2)+3<3. Вывод: любая окрестность точки M1(0;0) содержит точки, в которых z<3, посему точка M1(0;0) не может быть точкой минимума.

Но, может быть, точка M1(0;0) – точка максимума? Если это так, то для любой точки M из некоторой окрестности точки M1(0;0) получим z(M)<z(M1), т.е. z(M)<3. А вдруг любая окрестность содержит точки, в которых z(M)>3? Тогда в точке M1 точно не будет максимума.

Рассмотрим точки, у которых y=x, т.е. точки вида (x,x). В этих точках функция z будет принимать такие значения:

$$z(x,x)=x4+x4\ \ 2x2+4x\ \ \ x\ \ 2\ \ \ x2+3=2x4+3.$$

Так как в любой окрестности точки M1(0;0) имеем 2x4>0, то 2x4+3>3. Вывод: любая окрестность точки M1(0;0) содержит точки, в которых z>3, посему точка M1(0;0) не может быть точкой максимума.

Точка M1(0;0) не является ни точкой максимума, ни точкой минимума. Вывод: M1 вообще не является точкой экстремума.

Ответ: (2√,2√), (2√, 2√) – точки минимума функции z. В обеих точках zmin= 5.

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
4. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Дополнительные источники:

1. Алгебра и начало анализа / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2003. – 384с.
2. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Дрофа, 2002. – 396с.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. – М.: Мнемозина, 2003. – 335с.
4. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2008. – 320с.
5. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
6. Кочетков Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2005, 2008. – 239с.
7. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: Юрайт, 2011. – 440с.; ил.
8. Сидняев Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / Н.И. Сидняев. – М.: Юрайт, 2011. – 219с.: ил.
9. Шипачев В.С. Математический анализ. М.: Высшая школа, 2001. – 176с.

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер измен ения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				