	Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Высшего образования «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ **ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
	Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЕН.02 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИК

Специальность:

09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Квалификация выпускника: техник по компьютерным системам

(базовая подготовка)

Разработчик: преподаватель В.В. Болтянский

Методические рекомендации приняты на заседании предметной (цикловой) комиссии дисциплин профессионального цикла Политехнического колледж протокол № 1 от 05.09.2014

Председатель предметной (цикловой) комиссии ____________ Л. Н. Цымбалюк

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы»;

2 Рабочей программой учебной дисциплины;

3 Положением о планировании и организации самостоятельной работы студентов колледжей МПК НовГУ.

Методические рекомендации включают внеаудиторную работу студентов, предусмотренную рабочей программой учебной дисциплины в объёме 36 часов.

Формой внеаудиторной самостоятельной работы являются решение уравнений, выполнение различных упражнений.

В результате выполнения самостоятельной работы обучающийся должен:

уметь:

– применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статических задач;

– пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач:

– применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

знать:

- основные понятия комбинаторики;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- основные понятия теории графов.

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, практические занятия и самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Случайные события		**21**	
Тема 1.1. Основные понятия. Действия над событиями.	**Содержание учебного материала**	2	2
	События. Действия над событиями. Классификация событий		
	Практическое занятие **№1** Действия над событиями	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №1 «Действия над событиями»	2	
Тема 1. 2. Вероятность события	**Содержание учебного материала**	2	2
	Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Формулы комбинаторики, применяемые для вычисления вероятностей событий.		
	Практическое занятие №2 Решение задач по теме «Вероятность события»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №2 «Упражнения на вычисление вероятностей событий»	2	

Тема 1. 3. Основные теоремы	**Содержание учебного материала**	2	2
	Теорема сложения и умножения. Условная вероятность. Надежность цепи.		
	Практическое занятие №3 Решение задач по теме «Основные теоремы»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №3 «Упражнения на вычисление суммы, произведения событий, их условных вероятностей»	2	
Тема 1. 4. Повторение испытаний	**Содержание учебного материала**	3	1
	Схема Бернулли. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях. Производящая функция.		
	Практическое занятие №4 Решение задач по теме «Повторение испытаний»	3	
Раздел 2. Случайные величины		**21**	
Тема 2.1. Дискретные случайные величины (ДСВ).	**Содержание учебного материала**	3	1
	Основные понятия. Закон распределения вероятностей ДСВ. Функция распределения вероятностей. Свойства функции распределения вероятностей. Основные законы распределения. Биномиальный закон распределения. Закон распределения Пуассона. Геометрический закон распределения. Гипергеометрический закон распределения. Простейший поток событий.		

Тема 2.2. Числовые характеристики ДСВ.	**Содержание учебного материала**	3	2
	Математическое ожидание ДСВ и его свойства. Дисперсия. Свойства дисперсии. Среднеквадратичное отклонение ДСВ. Числовые характеристики основных законов распределения ДСВ.		
	Практическое занятие №5 Решение задач по теме «Числовые характеристики ДСВ»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №4 «Упражнения по теме «Числовые характеристики ДСВ»»	4	
Тема 2.3 Непрерывные случайные величины(НСВ)	**Содержание учебного материала**	3	2
	Функция распределения вероятностей случайной величины. Плотность распределения НСВ. Числовые характеристики НСВ. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение и его числовые характеристики. Функция надежности.		
	Практическое занятие №6 Решение задач по теме НСВ	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №5 «Упражнения по теме «НСВ»»	2	
Раздел 3. Элементы математической статистики		**38**	
Тема 3.1. Выборочный метод	**Содержание учебного материала**	2	2
	Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения.		

	Полигон и гистограмма.		
	Практическое занятие №7 Решение задач по теме «Выборочный метод»	3	
Тема 3.2. Статистические оценки параметров распределения	**Содержание учебного материала**	2	2
	Точечные оценки. Метод моментов. Метод наибольшего правдоподобия. Интервальные оценки.		
	Практическое занятие №8 Решение задач по теме «статистические оценки параметров распределения»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №6 «Упражнения по теме «статистические оценки параметров распределения»»	2	
Тема 3.3. Методы расчета сводных характеристик выборок	**Содержание учебного материала**	3	2
	Метод произведений вычисления выборочных средней и дисперсии. Метод сумм вычисления выборочной средней и дисперсии. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения.		
	Практическое занятие №9 Вычисление выборочной средней и дисперсии.	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №7 «Упражнения на вычисление выборочной средней и дисперсии»	5	
Тема 3.4. Понятие точечной оценки	Распределение ХИ-квадрат, распределение Стьюдента. Понятие точечной оценки. Метод максимального правдоподобия	2	2

	Самостоятельная работа обучающихся №8 Подготовка реферата по теме «Понятие точечной оценки», «Метод максимального правдоподобия».	2	
Тема 3.5. Интервальная оценка математического ожидания	Понятие интервальной оценки. Надежность доверительного интервала. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения; интервальное оценивание вероятности события.	4	
	Практическое занятие №10 Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 1).	1	
	Практическое занятие №11 Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 2)	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №9 Выполнение упражнения по теме «Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения; интервальное оценивание вероятности события»	7	
Раздел 4. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний		**7**	
Тема 4.1.	Моделирование случайных величин. Таблицы случайных величин.	4	

Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний	Сущность метода статистических испытаний. Практическая значимость результатов, получаемых методами математической статистики		
	Практическое занятие №12 Моделирование случайных величин, сложных испытаний и их результатов	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №10 Подготовка рефератов по темам: «Моделирование случайных величин», «Моделирование случайной точки, равномерно распределённой в прямоугольнике», «Моделирование нормально распределенной НСВ.», «Моделирование показательно распределённой НСВ»	2	
Раздел 5. Основы теории графов		**28**	
Тема 5.1. Неориентированные графы, основные понятия	Понятие неориентированный граф. Способы задания графа. Подграф. Смежный граф. Путь в графе. Цикл в графе. Связный граф. Степень вершины. Теорема о сумме степеней вершин графа. Формула количества ребер в полном графе. Матрица смежности. Расстояние между вершинами в графе: определение, свойства, методика нахождения. Радиус и диаметр графа. Центры графа	4	
	Двудольные графы. Методика проверки графа на двудольность. Полный двудольный граф. Изоморфные графы. Плоские графы. Грани плоской укладки плоского графа. Соотношение между количествами вершин, ребер и граней в плоском графе. Примеры неплоских графов	3	
	Практическое занятие №13 Метрические характеристики графа	1	
	Практическое занятие	1	

	№14 Проверка графа на двудольность, плоскость		
	Самостоятельная работа обучающихся №11 «Выполнение расчетно-графического задания по теме «Графы»»	5	
Тема 5.2. Ориентированные графы	Понятие орграфа. Способы задания. Матрица смежности для орграфа. Степень входа и выхода вершины. Источник. Сток. Ориентированный путь, цикл. Ориентированный путь. Ориентированный цикл (контур). Понятие достижимость одной вершины из другой. Понятие ориентированное дерево. Ярусное представление ордерева. Высота ордерева	4	
	Практическое занятие №15 Ориентированные деревья и их использование для обработки информации.	2	
Тема 5.3. Эйлеровы и гамильтоновы графы	Эйлеров граф. Теорема Эйлера (критерий эйлеровости графа). Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе. Гамильтонов граф. Некоторые теоремы о гамильтоновости графа. Эйлеров орграф. Гамильтонов орграф	4	
	Практическое занятие №16 Эйлеровы и гамильтоновы графы	2	
	Самостоятельная работа обучающихся №12 «Решение задач по теории графов. Эйлеровы и Гамильтоновы графы»	4	
	Всего:	**112**	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:
1. – **ознакомительный** (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – **репродуктивный** (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)

3. – **продуктивный** (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

Содержание самостоятельной работы

Раздел 1. Случайные события

Тема 1.1. Основные понятия. Действия над событиями

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №1:

1. «Действия над событиями»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Систематизировать и закрепить полученные теоретические знания и практические умения вычисления вероятности событий
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

Критерии оценки:

- оценка **«отлично»** выставляется, если студент выполнил полностью все задания,
- оценка **«хорошо»** выставляется, если студент выполнил одно из заданий 3 уровня сложности, при этом не допустил ни одной ошибки в заданиях 1 и 2 уровней.
- оценка **«удовлетворительно»** выставляется, если студент безошибочно выполнил задания 1 и 2 уровней сложности, но не справился ни с одним заданием 3 уровня.
- Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется, если студент не выполнил 50% контрольных заданий.

1. Выполните действия над событиями, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1 Пятнадцать команд случайным образом разбивают на три группы по пять команд в каждой. Найти вероятность того, что две сильнейшие команды окажутся в одной группе.

2 В квадрате со стороной, равной 5 см, наугад выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от выбранной точки до ближайшей стороны квадрата будет не больше 1 см.

3 В двенадцати папках лежат четыре рукописи (каждая рукопись в трех папках). Наугад взяли пять папок. Найти вероятность того, что три из них содержат некоторую рукопись.

4 В треугольнике с вершинами $A(3;\ 0)$, $B(3;\ 3)$, $C(0;\ 3)$ наугад выбирается точка. Найти вероятность того, что наименьшая из координат выбранной точки не превосходит 1.

5 В ящике двенадцать деталей, из которых восемь окрашенных. Найти вероятность того, что из пяти наугад взятых деталей три детали окрашенные.

6 В квадрате $ABCD$ со стороной, равной 6 см, наугад выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от выбранной точки до диагонали квадрата AC не больше $\sqrt{2}$ см.

7 Номер автомобиля имеет четыре цифры. Что вероятнее: случайно выбранный номер имеет три одинаковые цифры или две пары одинаковых цифр?

8 В треугольнике с вершинами $A(3;0)$, $B(3;\ 3)$ и $C(0;\ 3)$ наугад выбирается точка. Найти вероятность того, что наибольшая из координат выбранной точки не превосходит 2.

9 В квадратной матрице n-ого порядка, где $n \geq 2$, наугад выбирают два элемента. Найти вероятность того, что выбранные элементы не принадлежат одной строке или одному столбцу.

10 В кубе со стороной, равной 2 см, наугад выбрана точка. Найти вероятность того, что расстояние от центра куба до выбранной точки не более 1см.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Под *испытанием (опытом)* понимают осуществление некоторого комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие.

Случайным событием называется событие, связанное с некоторым опытом, про результат которого можно сказать он осуществился или нет.

Случайные события обозначают большими заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C,* … и т. д.

Достоверным событием называется случайное событие, которое непременно произойдет в данном опыте.

Обозначение**:** $\mathbf{\Omega}$ или $\bigcup$**.**

Невозможным событием называется случайное событие, которое не может быть реализовано в данном опыте.

Обозначение: $\varnothing$ или V.

Виды случайных событий.

События $A_1, A_2, ..., A_{n.}$ называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других (т.е. они не могут одновременно произойти в одном опыте).

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *равновозможными*, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате данного испытания, произойдет хотя бы одно из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу несовместных событий*, если в результате данного испытания, произойдет одно и только одно событие данной группы.

Действия над событиями.

Суммой двух событий A и *B* называется событие, состоящее в том, что происходит *или* одно *или* другое событие, или оба этих события.

Обозначение: $A+B \equiv A \bigcup B$.

Сумма событий интерпретируется как объединение множеств

Суммой или *объединением нескольких событий* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Обозначение: $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

Свойства сложения.

1^0. $A+B=B+A$ (сложение коммутативно).

2^0. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (сложение ассоциативно).

3^0. $A+\overline{A}=\Omega$.

Произведением или *пересечением двух событий* A и B называется событие, состоящее в том, что происходит *и* одно *и* другое события (одновременно).

Обозначение: $AB\equiv A\cap B$.

Произведение событий интерпретируется как пересечение множеств.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2,..., A_n$ называется событие, состоящее в одновременном осуществлении всех событий $A_1, A_2,..., A_n$.

Обозначение: $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Свойства произведения.

1^0. $AB=BA$ (произведение коммутативно).

2^0. $(AB)C=A(BC)$ (произведение ассоциативно).

3^0. $A(B+C)=AB+AC$ (произведение коммутативно относительно сложения).

4^0. $A\ddot{A}=\varnothing$.

Пример 1 Брошена монета – испытание.

Появление герба или цифры – событие, которое является достоверным

Пример 2 Брошена монета.

Событие A_1 - "появился герб" и событие A_2 - "появилась цифра" являются несовместными, равновозможными, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 3 В урне имеются два белых шара, пронумерованных цифрами 1,2 и три черных шара, пронумерованных цифрами 1,2,3. Из урны наугад берут один шар. События:

A_1 - «появление шара с цифрой 1»,

A_2 - «появление шара с цифрой 2»,

A_3 - «появление шара с цифрой 3»

образуют полную группу событий.

Пример 4 Бросается кубик. События:

A - «выпадение четного числа очков»

B – «выпадение числа очков больше чем 3».

В чем состоит события $A+B$, AB, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

Решение: Суммой событий A и B является событие состоящее в том, что выпадет или четное число очков или число очков больше трех, т. е.

$A+B$ – «выпадение или 2, или 4, или5, или 6».

Произведением событий A и B является событие состоящее в том, что выпадет и четное число очков, и число очков больше чем 3, т.е.

AB – «выпадение или четверки или шестерки».

$\overline{A}$ - «выпадение нечетного числа очков»,

$\overline{B}$ - «выпадение числа очков меньше чем 4».

Пример 5 В урне 30 шаров, из которых 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность появления красного шара, синего шара.

***Решение*:** Обозначим события:

A – «появление красного шара»,

B – «появление синего шара».

Найдем вероятности событий A и B. Имеем

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Если появление события A (или B) не изменяет вероятность появления события B (или A), эти события называются *независимыми*, в противном случае они называются *зависимыми*.

Для зависимых событий вероятность появления второго события при условии, что первое событие имело место, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(B/A)$ или $P(A/B)$ соответственно.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий записывается так:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).$$

Если события независимы, то

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

События A и B называются *совместимыми (или совместными)*, если появление одного из них не исключает появление и другого. В противном случае они называются *несовместимыми (несовместными)*.

Вероятность суммы совместных событий A и B равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Если же события несовместимы, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Если задача заключается в том, чтобы найти вероятность *хотя бы одного события* (назовем такое сложное событие событием A) из группы независимых событий, т.е. любого из них или любого их сочетания, то эта задача (на сумму событий) проще решается через противоположное событие (не появилось ни одного события из данной группы):

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...$$

Пример 1 В урне 30 шаров, из которых 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность появления цветного шара.

***Решение*:** Появление цветного шара означает, что вынутый шар либо красный, либо синий.

Обозначим события:

A – «появление красного шара»,

B – «появление синего шара».

Тогда событие $A+B$ – «появление цветного шара».

Найдем вероятности событий A и B. Имеем

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны(появление красного шара исключает появление синего шара и наоборот), поэтому применим теорему 1.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2 В ящике 8 окрашенных деталей и две неокрашенные. Найти вероятность того, что три наугад взятые детали будут окрашенными.

Решение: Рассмотрим случайные события:

A = {три взятые детали окрашенные},

A_1 = {первая взятая деталь окрашенная},

A_2 = {вторая взятая деталь окрашенная},

A_3 = {третья взятая деталь окрашенная}.

Поскольку $A = A_1{\cdot}A_2{\cdot}A_3$, то $P(A)$ можно вычислить, используя формулу умножения вероятностей:

$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1{\cdot}A_2)$.

По условию детали берут наугад, поэтому для вычисления вероятностей в правой части формулы можно использовать классическое определение вероятности: $P(A_1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; после того, как взяли одну окрашенную деталь, в ящике осталось 9 деталей, из которых 7 деталей окрашенные. Значит, $P(A_2/A_1) = \frac{7}{9}$ и, аналогично рассуждая, получим, что $P(A_3/A_2) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{15}.$$

Пример 3 Прибор , работающий в течении время t , состоит из трех узлов ,каждый из которых, независим от других, может выйти из строя в течении времени t. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время t вероятность безотказной работы первого узла 0,9, второго узла 0,8 ,а третьего – 0,7. Найдите надежность прибора в целом?

Решение: A – безотказная работа прибора;

A_1 – безотказная работа 1 узла;

A_2 – безотказная работа 2 узла;

A_3 - безотказная работа 3 узла;

$A= A_1{\cdot}A_2{\cdot}A_3$; A_1, A_2, A_3 – независимые события.

$P(A)=P(A1{\cdot}A2{\cdot}A3)= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$= О,9·0,8·0,7= О,504.

Пример 4 Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8; а вторым 0,7. Стрелки делают по цели по одному выстрелу одновременно. Определить вероятность того, что цель будет поражена, если стрелки стреляют не зависимо друг от друга.

Решение: A_1 – цель поражена первым стрелком ;

A_2 – цель поражена вторым стрелком ;

A – цель поражена.

$A = A_1 + A_2$.

По правилу сложения:

$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1A_2)$ = 0,8 + 0,7 – 0,8 · 0,7 = 0,94.

Раздел 1. Случайные события

Тема 1. 2. Вероятность события

Объем учебного времени: 4 часа.

Самостоятельная работа студента №2:

1. «Упражнения на вычисление вероятностей событий»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала

- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Систематизировать и закрепить полученные теоретические знания и практические умения вычисления вероятности событий;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Вычислить вероятность событий, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1. Определите вероятности событий, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий
2. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различны?
3. На 6 одинаковых карточках написаны буквы «а», «в», «к», «М», «о», «с». Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «Москва»?
4. В урне 4 белых и 2 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета?
5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 черные?
6. Какова вероятность того, что в написанном наудачу трехзначном числе 2 цифры одинаковы, а третья отличается от них?
7. В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и 2 урока другого. Какова вероятность того, что эти учителя не будут одновременно заняты?
8. 10 человек случайным образом рассаживаются на десятиместную скамейку. Какова вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом?
9. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?
10. В классе 40 учеников, из которых 10 отличников. Класс наудачу разделен на 2 равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 5 отличников?
11. На 10 карточках написаны буквы «а», «а», «а», «м», «м», «т», «т», «е», «и», «к». После тщательного перемешивания карточки раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «математика»?
12. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на 2 равные части (по 26 карт). Найдите вероятности следующих событий:
13. A — в каждой части окажется по 2 туза;
14. B — в одной из частей не будет ни одного туза;
15. С — в одной из частей будет ровно один туз.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Вероятность — число, характеризующее степень возможности появления события.

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

$$P(A)=m/n \text{ или } P(A)=m:n, \text{ где:}$$

m -число элементарных исходов, благоприятствующих *А;*

n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместные, равновозможные и образуют полную группу.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$ следовательно, р=1

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае m=0, следовательно, р=0.

3.*Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.* $0<p(n)<1$. Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$.

В последующих темах будут приведены теоремы, которые позволяют по известным вероятностям одних событий находить вероятности других событий.

Промер. В группе студентов 6 девушек и 4 юношей. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент будет девушка? будет юноша?

$p_{дев} = 6 / 10 = 0{,}6$ $\qquad$ $p_{юн} = 4 / 10 = 0{,}4$

Понятие «вероятность» в современные строгие курсы теории вероятностей построены на теоретико-множественной основе. Рассмотрим некоторые моменты такого подхода.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий:

w_i (i=1, 2, …. п).

События w_i,- называется *элементарными событиями (элементарными исходами). О*тсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий* **Ω** (греческая буква омега заглавная), а сами элементарные события — *точками этого пространства..*

Событие *А* отождествляют с подмножеством (пространства Ω), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие *А;* событие *В* есть подмножество **Ω**, элементы которого есть исходы, благоприятствующие *В,* и т, д. Таким образом, множества всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств **Ω**, Само **Ω** наступает при любом исходе испытания, поэтому **Ω** — достоверное событие; пустое подмножество пространства **Ω**- -невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания).

Элементарные события выделяются из числа всех событий тем, 'по каждое из них содержит только один элемент **Ω**

Каждому элементарному исходу w_i ставят в соответствие положительное число p_i - вероятность этого исхода, причем сумма всех p_i равна 1 или со знаком суммы этот факт запишется в виде выражения:

По определению, вероятность *Р(А)* события *А* равна сумме вероятностей элементарных исходов, благоприятствующих *А.* Поэтому вероятность события достоверного равна единице, невозможного — нулю, произвольного — заключена между нулем и единицей.

Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновозможные, Число исходов равно л, сумма вероятностей всех исходов равна единице; следовательно, вероятность каждого исхода равна 1/п. Пусть событию *А* благоприятствует m исходов.

Вероятность события *А* равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих *А:*

$$P(A)=1/n + 1/n+\ldots+1/n = n\cdot 1/n=1$$

Получено классическое определение вероятности.

Существует еще *аксиоматический* подход к понятию «вероятность». В системе аксиом, предложенной. Колмогоровым А. Н, неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности.

Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию *А* поставлено в соответствие неотрицательное действительное число *Р(А).* Это число называется вероятностью события *А.*

2. Вероятность достоверного события равна единице:

3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей к зависимости между ними выводят в качестве теорем.

Ограниченность классического определения вероятности.

1. Классический способ определения вероятности не применим к бесконечным множествам событий (исходов).

2. Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий.

3. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равно возможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, предполагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного материала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко.

В связи с этим рассматриваются иные способы вычисления вероятностей. К таковым относятся статистический способ вычисления вероятности и геометрическая вероятность, с которыми мы будем знакомиться в дальнейшем, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям

Статистический способ подсчета вероятности.

Этот способ направлен на неоднократное установление частоты появления события с различным числом объектов в рамках некоторого испытания.

Пример. На бахче готовят партию из десятка тонн арбузов к отправке. Что бы убедиться в их спелости надо просмотреть все арбузы, но тогда придется каждый арбуз пометить и он окажется не пригодным к отправке. На практике можно провести серию испытаний. Выбираем произвольно 10 арбузов и установим число спелых из них. Пусть таких оказалось 9 арбузов, тогда частота p_1=9/10. В другой партии их 15 арбузов оказалось 13 спелых, p_2=13/15. В третей частота оказалась равной p_3=18/18, в четвертой – p_4= 6/7. Все полученные числа будут группировать около некоторого числа, являющееся средним арифметическим вычисленных частот:

$p= (p_1.+ p_2+ p_3 + p_4) / 4 = (9/10+13/15+18/18+6/7) =761 / 840$ »0,9059.

Запишем статистический способ подсчета вероятности в общем виде:

$p_1=m_1 / n_1,\ p_2=m_2 / n_2,\ p_3=m_3 / n_3,\ \ldots\ p_i=m_i / n_i.\quad 1£\ i\ £ k$

m_i — число появления события,

n_i - число проведенных опытов (наблюдений, испытаний),

p_i – частота появления события в каждом опыте

k – опытов

Естественно предположить, что она будет различная. Вероятность рассматриваемого события будет равна среднему арифметическому полученных частот.

$p=(p_1 + p_2+p_3 + \ldots+p_k) / k$, где p – статистическая вероятность.

Вероятность события в данном испытании называется число, около которого «группируются» относительные частоты при нескольких

Для существования статистической вероятности события *А* требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие *А* наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления *А в* различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; значения которой «колеблется около какого-то теоретического числа, например: от 0,39 до 0,41 и др.

Примеры вычисления вероятностей

Задание 1. Вычислить вероятности, приведя полное объяснение.

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через *А* событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу. Благоприятствует событию *А* лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: Р *(А)*= 1/10.

2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры,

Решение. Обозначим через *В* событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. 10-9 = 90. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможные и образуют полную группу. Благоприятствует событию *В* лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов; *Р (В)* = 1/90.

3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4

Решение. Общее число равновозможных исходов испытания равно 6-6 = 36 (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию *А* только 3 исхода: (I; 3), (3; I), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность Р(А)=3:36=1/12.

4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных. Ответ 0,5

3. Вычисление вероятностей событий и комбинаторика.

Комбинаторные задачи в теории вероятностей имею большое практическое применение.. Рассмотрим решения некоторые из таких задач

Задание 1 . Решить задачи средствами комбинаторики

1. Наудачу выбирается трехзначное число в десятичной записи числа, в которой нет нуля. Какова вероятность того, что у выбранного числа ровно 2 одинаковые цифры?

Решение. Представим себе, что на 9 одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и эти карточки помещены в урну. Выбор наудачу трехзначного числа равносилен последовательному извлечению с возвращением из урны 3 карточек и записыванием цифр в порядке их появления. Следовательно, число всех элементарных исходов опыта равно $9^3 = 729$. Количество благоприятных случаев для интересующего нас события подсчитаем так: 2 различные цифры x и y можно выбрать= 36 способами; если x и y выбраны, то из них можно составить 3 различных числа в которых встречается одна из выбранных цифр и другая – тоже три. Всего 6 раз, Число благоприятствующих случаев окажется равным 36 . Искомая вероятность равна: P=216/729=8/27.

Рекомендуется решить эту задачу, если в записи числа используется и цифра 0.

2. Из букв слова «ротор», составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Решение. Чтобы отличать одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: $р_{lt}р_2$, $о_{lf}$ $о_3$. Тогда общее число элементарных исходов равно: размещению из 5 по 3, равное 60. Слово «тор» получится в 1 ·2 ·2= 4 случаях. Это понятно из того, что, буква «Т может быть выбранной только 1 раз, буквы «О» и «Р» каждая по 2 раза. P=4/60=1/15.

При подсчете числа благоприятных случаев мы здесь воспользовались правилом произведения:

3. В партии из n деталей имеется f бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных k деталей окажется s бракованных?

Решение. Количество всех элементарных исходов равно числу сочетаний из n по k. Бракованные детали. могут быть выбранными только из бракованных. Число выбора их равно числу сочетаний из f по s. Остались k-s выбранные не бракованные детали. Они будут выбраны из не бракованных деталей, число которых равно n-f. Вариантов их выбора равно числу сочетаний из n-f по k-s. Ответ:

4. В бригаде 4 женщины и 3 мужчин. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчин?

Решение. Применим схему статистического выбора. Из 7членов бригады 4 человека можно выбрать 35 способами, следовательно, число всех элементарных исходов испытания равно 35. Далее, из 4 женщин можно выбрать 2 женщин 6 способами (число сочетаний из 4 по2). Аналогично, из 3 мужчин можно выбрать 2 мужчин 3 способами. Тогда число благоприятных случаев будет равно 6 · 3 = 18. P=18/35

Раздел 1. Случайные события

Тема 1. 3. Основные теоремы

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №3:

1. Упражнения на вычисление суммы, произведения событий, их условных вероятностей

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:
Студенты должны
уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Вычислите сумму, произведение событий, их условных вероятностей, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

Задача 1. Оператор обслуживает три прибора, работающих независимо друг от друга. Известны вероятности того, что в течение часа приборы потребуют внимания оператора: первый — 0.1; второй — 0.25; третий — 0.3. Найти вероятность того, что в течение часа не более одного прибора потребуют внимания оператора.

Задача 2. Известно, что в апреле бывает в среднем 16 солнечных дней. Найти вероятность того, что первого и второго апреля будет различная погода.

Задача 3. Радист вызывает корреспондента. Вероятность того, что вызов будет принят, равна 0.6. Найти вероятность того, что корреспондент ответит лишь на четвертый вызов.

Задача 4. При каждом включении стартера двигатель начинает работать с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что для запуска двигателя нужно не более двух включений.

Задача 5. В НИИ работают 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 — немецкий, 50 — знают оба языка. Найти вероятность того, что наудачу выбранный сотрудник не знает ни одного иностранного языка.

Задача 6. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему Зная, что надежность блоков соответственно равна 0.6 для a, 0.7 — для b, 0.8 – для c, 0.9 — для d, найти надежность системы.

Задача 7. В группе из 10 экипажей имеются два отличных, пять хороших и три удовлетворительных. Вероятность выполнения упражнения отличным экипажем 0.9, хорошим — 0.8; удовлетворительным — 0.5. Какова вероятность того, что наудачу выбранный экипаж выполнит упражнение? Ответ: Р = 0, 73

Задача 8. Прибор на борту самолета может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя во время полета в нормальном режиме равна 0.1, в условиях перегрузки — 0.4. Какова надежность прибора во время полета?

Задача 9. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин, дальтоники. Случайно выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что он мужчина? Считать равными количество мужчин и женщин.

Задача 10. Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет критический сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности идентифицировать сбои соответственно равны 0.8, 0.9, 0.9. Какова вероятность того, что произошедший сбой был обнаружен в оперативной памяти?

Задача 11. В партии 120 лампочек, из них 70 изготовлены на первом заводе, 50 — на втором. Продукция первого завода содержит 80% стандартных ламп, второго — 60%. Найти вероятность события А = {НАУДАЧУ ВЗЯТЫЕ ДВЕ ЛАМПОЧКИ ЯВЛЯЮТСЯ СТАНДАРТНЫМИ}. Если событие А произошло, то какова вероятность, что обе лампочки изготовлены на первом заводе.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Теорема 1 (*Теорема сложения вероятностей*). Вероятность суммы (объединения; появления одного из них, безразлично какого) двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их совместного появления, т.е. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Следствие 1. Вероятность суммы (объединения) попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е. $P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Следствие 2. Пусть $A_1, A_2, ... , A_n$ – полная группа попарно несовместных событий, тогда $P(A_1)+P(A_2)+ ... +P(A_n) = 1$.

Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A) + P(\grave{}A) = 1$.

Пример 1. В урне 5 белых, 6 черных и 9 красных шаров. Какова вероятность того, что первый наугад вынутый шар окажется черным или красным?

Решение. Здесь имеется всего 20 элементарных исходов, из которых появлению черного шара благоприятствует 6, а появлению красного - 9. Поэтому вероятность события A - появление черного шара: $P(A) = 6/20$, а вероятность события B - появление красного шара: $P(A) = 9/20$. Поскольку события A и B несовместны (вынимается всего один шар), то $P(A+B) = P(A) + P(B) = 6/20 + 9/20 = 0,75$. ***Ответ*: 0,75.**

Условная вероятность события B ($P_A(B)$)*- вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A уже произошло.* Если A и B – независимые события, то $P_A(B) = P(B)$, $P_B(A) = P(A)$.

Теорема 2 (*Теорема умножения вероятностей*). Вероятность произведения (пересечения; совместного появления) двух произвольных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило, т.е. $P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A)$.

Пример 2. На полке стоят 11 научно-популярных книг и 5 художественных. Какова вероятность того, что две подряд наугад взятые книги окажутся художественными?

Решение. Рассмотрим два события B_1 и B_2: B_1 - при первом испытании взята художественная книга, B_2 - при втором испытании взята художественная книга. По теореме 2.7 вероятность такого события равна $P(B_1B_2)=P(B_1)\cdot P_{B1}(B_2)$. Вероятность события B_1 $P(B_1) = 5/16$. После первого испытания на полке останется 15 книг, из которых 4 художественные, поэтому условная вероятность $P_{B1}(B_2) = 4/15$. Отсюда искомая вероятность равна: $P(B_1B_2) = \frac{5}{16}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{12}$. ***Ответ*: 1/12.**

Следствие 1. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют при условии, что все предыдущие события уже наступили, т.е. $P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P_{A1}(A_2)\ P_{A1A2}(A_3).\ \cdot\ ...\ \cdot P_{A1A2...An\text{-}1}(A_n)$.

Пример 3. Из десяти карточек составлено слово «МАТЕМАТИКА». Из них школьник наудачу выбирает поочередно четыре карточки и приставляет одну к другой. Какова вероятность того, что получится слово «ТЕМА»?

Решение. Введем события A_1, A_2, A_3, A_4, состоящие в том, что первая выбранная буква - Т, вторая - Е, третья – М и четвертая - А. Нам нужно найти вероятность произведения этих событий. По следствию 1 из теоремы 2.7 имеем:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) \cdot P_{A1A2A3}(A_4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{420}$. ***Ответ*: 1/420.**

Следствие 2. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – независимые события, то вероятность их произведения (совместного появления) равна произведению вероятностей этих событий, т.е. $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Пример 4. Два стрелка независимо один от другого делают по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком – 0,7, вторым – 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что мишень поразил первый стрелок, а событие В - в том, что мишень поразил второй стрелок. По условию $P(A) = 0,7$ и $P(B) =0,8$.

1-й способ. Рассмотрим противоположные события: A - промах первого стрелка, B - промах второго. По следствию 3 из теоремы 2.6 получаем $P(\bar{A}) = 1-0,7 = 0,3$ и $P(\bar{B}) = 1-0,8 = 0,2$. Произведение событий $\bar{A} \cdot \bar{B}$ означает промах обоих стрелков. По смыслу задачи события A и B являются независимыми, поэтому и противоположные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также будут независимыми. По следствию 2 из теоремы 2.7 получаем вероятность того, что оба стрелка промахнутся: $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$. Нас же интересует вероятность противоположного события, состоящего в том, что мишень поражена. Поэтому искомую вероятность мы находим по следствию 3 из теоремы 2.6: 1 - 0,06 = 0,94.

2-й способ. Искомая событие (мишень будет поражена хотя бы одним стрелком) есть сумма событий A и B. По теореме 2.6. $P(A+B) =P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 – 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 – 0,56 = 0,94$. ***Ответ*: 0,94.**

Пример 5. В студенческой группе 25 человек. Какова вероятность того, что дни рождения хотя бы у двоих совпадают?

Решение. Вероятность того, что дни рождения у двух произвольно взятых людей совпадают, равна 1/365 (считаем, что попадания дня рождения на любой день в году - равновозможные случаи). Тогда вероятность того, что дни рождения двух людей не совпадают, т.е. вероятность противоположного события равна 1-1/365 = 364/365. Вероятность того, что день рождения третьего отличается от дней рождения двух предыдущих, составит 363/365 (363 случая из 365 благоприятствуют этому событию). Рассуждая аналогично, находим, что для 25-го члена группы эта вероятность равна 341/365. Далее найдем вероятность того, что дни рождения всех 25 членов группы не совпадают. Поскольку все эти события (несовпадение дня рождения каждого очередного члена группы с днями рождения предыдущих) независимы, то по следствию 2 из теоремы 2 получаем:

$$P(A_2A_3 \ldots A_{25}) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{341}{365} = 0,43.$$

Это вероятность того, что дни рождения у всех 25 человек не совпадают. Вероятность противоположного события будет вероятностью того, что хотя бы у двоих дни рождения совпадают, т.е. искомой вероятностью P » 1-0,43 = 0,57. ***Ответ*: 0,57.**

Теорема 3. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа попарно несовместных событий. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A, т.е.

$$\mathbf{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A).}$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События $B_1, B_2, \ldots, B_n$, удовлетворяющие условию теоремы 2.8, называют *гипотезами*.

Пример 6.Турист равновероятно выбирает один из трех маршрутов: конный, водный и горный. Вероятность, что он успешно преодолеет путь при выборе конного способа передвижения, равна 0,75, при выборе водного пути – 0,8, при выборе горного маршрута – 0,55. Найдите вероятность, что турист успешно преодолеет весь путь при любом выборе маршрута.

Решение. Введем события: A – «Турист успешно преодолеет весь путь при любом выборе маршрута», B_1, B_2, B_3 – выбран соответственно, конный, водный и горный маршрут. Поскольку выбор маршрута равновероятен, то вероятности выбора каждого маршрута $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$. По условию $P_{B1}(A) = 0{,}75$; $P_{B2}(A) = 0{,}8$; $P_{B3}(A) = 0{,}55$. Тогда по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B3}(A) = (1/3)\cdot 0{,}75 + (1/3)\cdot 0{,}8 + (1/3)0{,}55 = 0{,}7$.

Ответ: 0,7.

Теорема 4. Условная вероятность любой гипотезы B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) вычисляется по *формуле Бейеса*:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 7.Имеется три набора микросхем, первый из которых содержит 100, второй 300 и третий 600 микросхем. Вероятность того, что микросхема, взятая наугад из первого набора, исправна, равна 0,9, а для второго и третьего наборов – соответственно 0,85 и 0,8. Какова вероятность того, что: а) произвольно взятая микросхема исправна: б) исправная микросхема извлечена из второго набора?

Решение. а) В данном случае имеется три гипотезы, вероятности которых $P(B_1) = 0{,}1$, $P(B_2) = 0{,}3$, $P(B_3) = 0{,}6$. Пользуясь формулой полной вероятности, находим $P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B3}(A) = 0{,}1\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}85 + 0{,}6\cdot 0{,}8 = 0{,}825$.

б) Допустим, что искомое событие A произошло – извлечена исправная микросхема. Найдем вероятность $P_A(B_2)$ того, что эта микросхема извлечена из второго набора. Согласно формулы Бейеса,

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}85}{0{,}825} = \frac{17}{55}$$ ***Ответ*: а) 0,825; б) 17/55.**

Пример 8. Из 10 учеников, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо – хорошо, двое – удовлетворительно, а один совсем не готовился. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся ученики могут ответить на все 20 вопросов, хорошо – на 16 вопросов, удовлетворительно – на 10, и не подготовившийся – на 5 вопросов. Каждый ученик получает наугад 3 вопроса из 20. Ученик, приглашенный первым, ответил на все 3 вопроса. Какова вероятность того, что он отличник?

Решение. Обозначим события: B_1 – «Приглашен ученик, подготовившийся отлично», B_2 – «Приглашен ученик, подготовившийся хорошо», B_3 – «Приглашен ученик, подготовившийся удовлетворительно», B_4 – «Приглашенный ученик к экзамену не готов», A – «Приглашенный ученик ответил на 3 вопроса». Согласно условию задачи $P(A_1) = 0{,}3$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(A_3) = 0{,}2$, $P(A_4) = 0{,}1$. Кроме того, ясно, что $P_{B1}(A) = 1$, $P_{B2}(A) = \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}$ » 0,491, $P_{B3}(A) = \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}$ » 0,105, $P_{B3}(A) = \frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}$ » 0,009.

Нам необходимо найти $P_A(B_1)$. По формуле Бейеса $P_A(B_1) = \frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1 + 0{,}4\cdot 0{,}491 + 0{,}2\cdot 0{,}105 + 0{,}1\cdot 0{,}009}$ » 0,58.

Как видим, искомая вероятность сравнительно не велика, Поэтому учителю придется предложить ученику еще несколько дополнительных вопросов. ***Ответ*: 0,58.**

Раздел 2. Случайные величины

Тема 2.2. Числовые характеристики ДСВ

Объем учебного времени: 6 часов.

Самостоятельная работа студента №4:

1. «Упражнения по теме «Числовые характеристики ДСВ»»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Определите вероятность ДСВ, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1. На пути движения автомашины 4 светофора, каждый из которых запрещает дальнейшее движение автомашины с вероятностью 0,5. Найти ряд распределения числа светофоров, пройденных машиной до первой остановки. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

2. В магазине имеется 15 автомобилей определенной марки. Среди них 7 черного цвета, 6 серого и 2 белого. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им 3 автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Составьте ряд распределения числа проданных автомобилей черного цвета при условии, что автомобили отбирались случайно.

3. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20%. Составьте ряд распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

4. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Составить закон распределения числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти дисперсию этой случайной величины.

5. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа импортных из четырех наудачу выбранных телевизоров. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

6. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x\le\pi, \\ -\cos x \ \text{при} \ \pi<x\le\frac{3}{2}\pi, \\ 0 \ \text{при} \ x>\frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

1.Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал [π, 5/4π]. 2.Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

7. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ C\cdot(x-1), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3;\end{cases}\quad \alpha=0,\ \beta=3$$

требуется:

а) найти коэффициент C;
б) найти функцию распределения F(x);
в) найти M(X), D(X), σ(X)
г) найти вероятность P(α < X < β);
д) построить графики f(x) и F(x).

8. Случайная величина X задана функцией распределения F(x).
А) является ли случайная величина X непрерывной?
Б) имеет ли случайная величина X плотность вероятности f(X)? Если имеет, найти ее.
В) постройте схематично графики f(X) и F(X).

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Методическими указаниями к выполнению заданий:

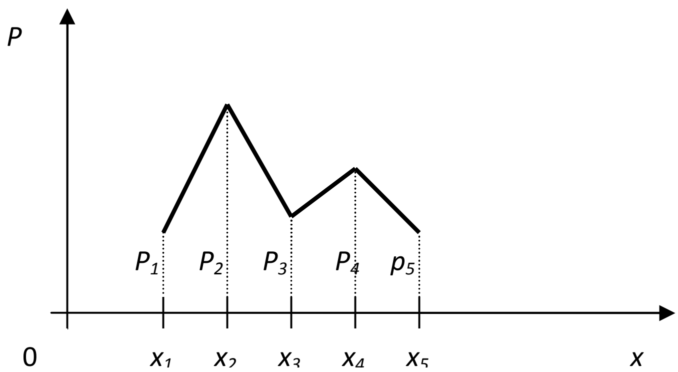
Случайная величина называется *дискретной*, если ее значения можно пронумеровать $X=(x_1,x_2,x_3,...x_n,...)$. Она может быть задана рядом распределения, многоугольником или функцией распределения.

Рядом распределения называется совокупность всех частных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i=P(X=x_i)$. Ряд распределения оформляется обычно в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

$$\sum_i p_i=1$$

Многоугольником распределения называется графическое изображение ряда распределения.



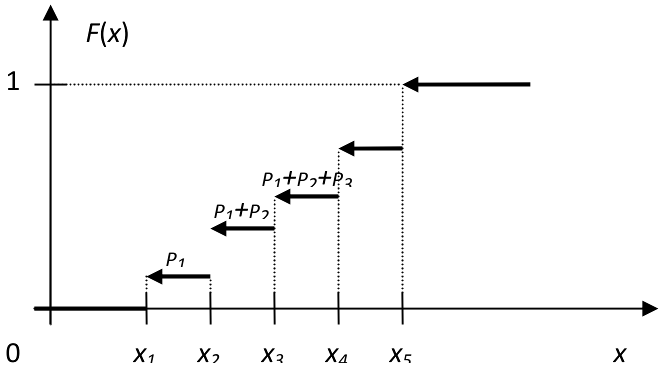
Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет значения меньшее выбранного значения, т.е. $F(x)=P(X<x)$.

Функция $F(x)$ вычисляется по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по всем значениям *i*, для которых $x_i < x$.

Свойства функции распределения

1. $F(x)$ – функция неубывающая.
2. $F(+\infty) = 1; \quad F(-\infty) = 0$.
3. $P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

График имеет вид



Пример Составить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при одном броске $p = 0{,}3$. Построить многоугольник и функцию распределения.

Решение: Случайная величина X – число попаданий мячом в корзину при трех бросках. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3. Соответствующие вероятности могут быть вычислены по формуле:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Этой формулой можно пользоваться, если независимые испытания производятся *n* раз, вероятность события в каждом испытании постоянна и равна *p*, а $q = 1 - p$. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из *n* по *k*.

Здесь $n = 3; p = 0{,}3; q = 0{,}7$.

$P_3(X = 0) = q^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343.$

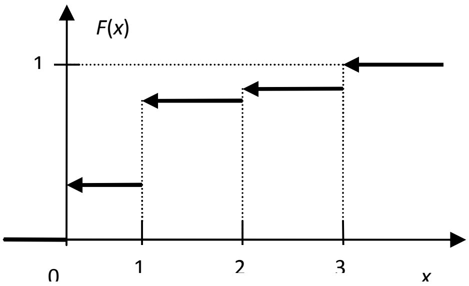
$P_3(X = 1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441.$

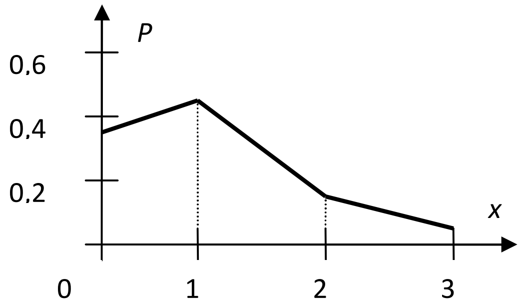
$P_3(X = 2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189.$

$P_3(X = 3) = p^3 = 0{,}3^3 = 0{,}027.$

Ряд распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027





Основные числовые характеристики для дискретных случайных величин определяются по формулам:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i; \quad D(X)=M(X-M(X))^2 \cdot p_i\,; \ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Отметим еще формулу, удобную при вычислении дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X, которое характеризует среднее значение случайной величины, центр распределения. $D(X)$ – дисперсия, определяет рассеивание случайной величины около центра. $\sigma(X)$ – среднее квадратичное отклонение.

Пример. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины из предыдущего примера.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0\cdot 0{,}0016+1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}032+3\cdot 0{,}16+4\cdot 0{,}8=0{,}8704\,;$$

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i = 0^2\cdot 0{,}0016+1^2\cdot 0{,}0064+2^2\cdot 0{,}032+3^2\cdot 0{,}16+4^2\cdot 0{,}8=14{,}3744$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=14{,}3744-0{,}8704^2=13{,}6168;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}69.$$

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна.

Для описания непрерывных законов распределения чаще используется понятие *плотности распределения*:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}P(x<X<x+\Delta x)=F'(x) \quad .$$

$y=f(x)$ называют также *дифференциальной функцией* распределения, а ее график – кривой распределения.

Свойства дифференциальной функции распределения.

1 $f(x) \geq 0.$ 2 $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 4 $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$

Учитывая свойство (4), функцию $F(x)$ часто называют *интегральной функцией* распределения непрерывной величины X.

Математическое ожидание и дисперсия в случае непрерывной случайной определяется формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Пример1 Непрерывная случайная величина имеет интегральную функцию распределения:

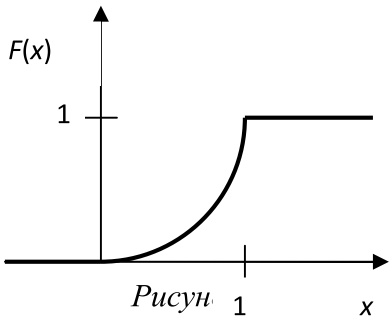
$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0; \\ ax^2 & при \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти $a, f(x), P(-0{,}25 < x < 0{,}5)$. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение: По условию задачи функция $F(x)$ непрерывна. При $x = 0$ разрыва нет. $\lim\limits_{x \to 1-0} F(x) = a$; $\lim\limits_{x \to 1+0} F(x) = 1$, чтобы при $x = 1$ не было разрыва, выбираем $a = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0; \\ x^2 & при \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases} \text{. Тогда } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0; \\ 2x & при \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Графики функций имеют вид:



Рисун

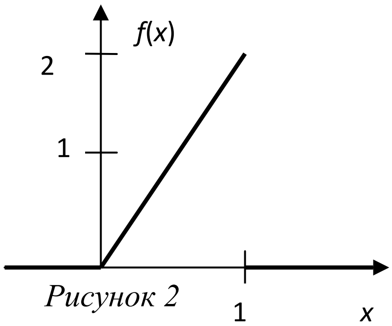


Рисунок 2

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-0{,}25; \quad 0{,}5)$, определяется по одной из двух формул

$P(-0{,}25 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}25) = (0{,}25)^2 - 0 = 0{,}25$ или

$$P(-0{,}25 < X < 0{,}5) = \int_{-0{,}25}^{0{,}5} f(x)dx = \int_{0}^{0{,}5} 2xdx = 0{,}25.$$

Пример 2 Вычислить математическое ожидание и дисперсию для непрерывной случайной величины, заданной следующей функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0; \\ 2x & при \quad 0 \le x \le 1; \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Решение: Найдем *M(X):*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{4}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

Тогда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} = 0{,}0555;$$

Раздел 2. Случайные величины

Тема 2.3 Непрерывные случайные величины (НСВ)

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №5:

1. «Упражнения по теме «НСВ»»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Определите вероятность НСВ, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

Задача 1. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \text{при} \ x \le \pi, \\ -\cos x \ \text{при} \ \pi < x \le \frac{3}{2}\pi, \\ 0 \ \text{при} \ x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

1) Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал [π,5/4π][π,5/4π].

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Задача 2. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1; \\ C\cdot(x-1), & 1 < x \le 3; \\ 0, & x > 3; \end{cases} \quad \alpha = 0, \ \beta = 3$$

Требуется:
а) найти коэффициент C;
б) найти функцию распределения F(x);
в) найти M(X), D(X), σ(X)
г) найти вероятность P(α < X < β);
д) построить графики f(x) и F(x).

Задача 3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x).
А) является ли случайная величина X непрерывной?
Б) имеет ли случайная величина X плотность вероятности f(X)? Если имеет, найти ее.
В) постройте схематично графики f(X) и F(X).

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x \le 1, \\ x-1, \ 1 < x \le 2, \\ 1, \ x > 2. \end{cases}$$

Задача 4. Дана функция распределения F(x) непрерывной случайной величины X.
1. Найти значения параметров a,b
2. Построить график функции распределения F(x)
3. Найти вероятность P(α < X < β)
4. Найти плотность распределения p(x) и построить ее график.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x < 0, \\ 1-ae^{-2x}, \ x \ge 0. \end{cases}$$

$\alpha = -1, \ \beta = 1.$

Задача 5. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины такова: $f(t)=2e^{-2t}$ при $t \ge 0$ и $f(t)=0$ при $t<0$.

1) Найти формулу функции распределения этой случайной величины.
2) Определить вероятность того, что прибор проработает не более года.
3) Определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года.
4) Определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

<u>Основные определения и формулы :</u>

Случайная величина называется *непрерывной* (НСВ), если ее функция распределения F(x) непрерывна при любом ***x*** и имеет производную F'(x) везде, кроме, может быть, конечного числа точек.

Плотностью распределения НСВ X называется производная ее функции распределения: f (x) = F'(x).

Свойства плотности НСВ X:

1. f (x) ³ 0;
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$
3. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx;$
4. P(x < X < x+Dx) » f (x)Dx ;
5. Если P(a < X < b) = 1, то f (x) = 0 вне [a; b].

Для НСВ вводятся те же числовые характеристики, что и для ДСВ. В формулах для их вычисления суммы заменяются интегралами, например:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx,$$

причем, требуется, чтобы написанный несобственный интеграл сходился абсолютно.

Для НСВ X вводится еще одна характеристика – медиана Me(X) – следующим равенством:

$$P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)).$$

<u>Решение типовых примеров :</u>

<u>Пример 1.</u> НСВ X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2, & при \ -1 < x < 1 \\ 0, & при \ x \le -1, x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) параметр ***к***; б) функцию распределения; в) числовые характеристики; г) вероятность P(|X – M(x)| < s (x)); д) вероятность того, что в 10 независимых наблюдениях СВ X ровно 7 раз примет положительные значения.

<u>Решение :</u>

а) Неизвестный параметр плотности обычно находят, используя одно из ее свойств:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = k\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{kx^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}k, \quad тв. \quad k = \frac{3}{2}.$$

б) Связь между плотностью и функцией распределения устанавливается с использованием еще одного свойства плотности:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Для нашей задачи имеем:

$$1)\quad при\, x \le -1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$$

$$2)\quad при\, -1 < x < 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{-1}^{x} kx^2 dx = k\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{x} = \frac{(x^3+1)}{2};$$

$$3)\quad при\, x > 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{1} kx^2 dx + \int_{1}^{x} 0dx = 1.$$

Итак, получили:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad при \quad x \le -1, \\ 0{,}5(x^3+1), \quad при \quad -1 < x \le 1, \\ 1, \quad при \quad x > 1. \end{cases}$$

Значения 0 и 1 для F(x) вытекают из общих ее свойств:

Если СВ Х принимает значения только на промежутке [a; b] ,то левее a F(x) = 0 и правее b F(x) = 1.

в) находим числовые характеристики:

1) *Математическое ожидание*

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-1}^{1} x\, k x^2 dx = \frac{kx^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

2) *Дисперсия*

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(x)\right]^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 kx^2 dx = \frac{kx^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1} = 0{,}6.$$

3) *Среднее квадратичное отклонение.*

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 0{,}775.$$

4) *Коэффициент вариации*

$$V(x) = \frac{\sigma(x)}{M(x)} - \textit{не существует}$$

5) *Асимметрия*

$$A(x) = \frac{1}{\sigma^3(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^3 f(x)dx = 0{,}6^{\frac{-3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3 kx^2 dx = 0.$$

6) *Эксцесс:*

$$E(x) = \frac{1}{\sigma^4(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^4 f(x)dx - 3 = 0{,}6^{-2} \int_{-1}^{1} x^4 kx^2 dx - 3 = -1{,}810$$

7) *Мода для НСВ – это точка максимума плотности распределения. В нашей задаче такой точки нет, а есть, напротив, точка минимума: х = 0. Такое распределение называют* ***антимодальным.***

8) *Медиана* ***m*** *формально находится из равенства:*

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)dx = \int_{\mu}^{+\infty} f(x)dx$$

В нашем примере

$$\int_{-1}^{\mu} kx^2 dx = \int_{\mu}^{1} kx^2 dx.$$

Геометрически медиана – это точка, в которой площадь под плотностью делится пополам. Т.к. наше распределение симметрично относительно х = 0, то медиана **m** = 0. Кстати, равенство М(х) = 0 также следует из этой симметрии.

$$г)\ P(|X-0|<0{,}775)=P(-0{,}775<X<0{,}775)=\int_{-0{,}775}^{0{,}775}kx^2dx=0{,}775^3=0{,}465.$$

д) Каждое из 10 наблюдений СВ X – это испытание, в котором может появиться событие A = {x > 0}. Вероятность этого события:

$$p=P(X>0)=\int_0^1 kx^2dx=0{,}5.$$

Тогда искомая вероятность семи положительных значений в 10 наблюдениях есть:

$$P(10;7)=C_{10}^7 0{,}5^7(1-0{,}5)^{10-7}=0{,}117.$$

Пример 2. На окружности радиуса ***R*** с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Ее абсцисса – некоторая НСВ X. Найти $M(X^2)$.

Решение :

Точка выбирается на окружности наудачу, т.е. можно считать, что полярный угол U этой точки есть НСВ, равномерно распределенная на промежутке [0, 2p]. Ее плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & при\quad 0\le x\le 2\pi,\\ 0, & при\quad x<0,\quad x>2\pi.\end{cases}$$

Точка имеет полярные координаты ***(R; U)***, поэтому ее абсцисса ***x = R cos(U)***. Итак, требуется найти $M(R^2\cos^2 U)$. Используем следующее свойство математического ожидания: если НСВ ***U*** имеет плотность распределения f (x), а g(x) – некоторая функция, то:

$$M[g(U)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx.$$

В нашем случае имеем:

$$M(x^2)=M[R^2\cos^2 U]=\int_0^{2\pi}R^2\cos^2 x\frac{1}{2\pi}dx=\frac{R^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)dx=0{,}5R^2.$$

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.2. Статистические оценки параметров распределения

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №6:

1. «Упражнения по теме «Статистические оценки параметров распределения»»

Цель:

- Проверить на практике знание понятия статистические оценки параметров распределения
- умение оценить параметры распределения.

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Определите вероятность НСВ, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1. Дан следующий вариационный ряд
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 1 2 2 4 4 4 5 5 5
Требуется
1) Построить полигон распределения
2) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.
3) Построить выборочную функцию распределения
4) Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

2. Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (xi – товарооборот, млн. руб.; ni – число магазинов).
xi 25-75 75-125 125-175 175-225 225-275 275-325
ni 12 15 9 7 4 3
Найти
а) среднее, среднее квадратическое отклонение S и коэффициент V;
б) построить гистограмму и полигон частот.

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.
10,5 11 11,5 12 12,5 13 13,5
2 18 40 25 6 5 4

4. Дана выборка. Требуется:
а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;
б) Вариационный ряд;
в) Найти оценки математического ожидания и дисперсии;
г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.
10,20,20,5,15,20,5,10,20,5.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов. *Выборка* – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности. Объем генеральной совокупности ***N*** и объем выборки ***n*** – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Первичная обработка результатов.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 – n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n,$ где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2,…, x_к$ называют вариантами, а $n_1, n_2,…, n_к$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}$. Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной *d,* а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в *i-й* интервал. Составленная по этим результатам таблица называется группированным статистическим рядом

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	(a, a + h)	(a + h, a + 2h)	…	(b – h, b)
Сумма частот вариант, попавших в интервал	n_1	n_2	…	n_k

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки.

Свойства эмпирической функции распределения:

1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$.
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2),…, (x_k, n_k)$, где x_i откладываются на оси абсцисс, а n_i – на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот (рис.3).

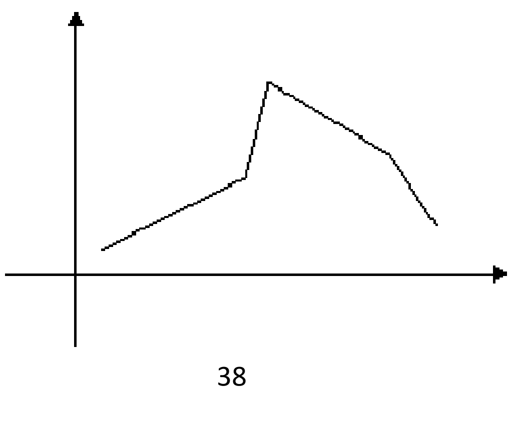


Рисунок 3

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит гистограмма, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной d, а высотами – отрезки длиной n_i /d (гистограмма частот) или w_i /d(гистограмма относительных частот). В первом случае площадь гистограммы равна объему выборки, во втором – единице (рис.4).

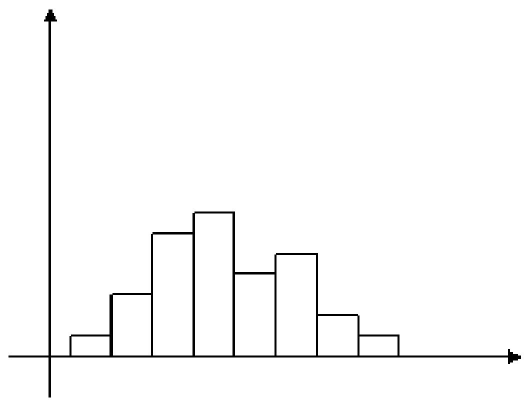


Рисунок 4

Выборочным средним называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Выборочной дисперсией называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n},$$

а 3. *Выборочным средним квадратическим отклонением* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Так же, как в теории случайных величин справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

Заданная таким образом оценка математического ожидания является *несмещенной*, то есть математическое ожидание выборочного среднего равно оцениваемому параметру (математическому ожиданию исследуемой случайной величины). Выборочная дисперсия, напротив, смещенная оценка генеральной дисперсии, и $M(D_B) = \dfrac{n-1}{n} D_Г$. Поэтому вводится несмещенная оценка генеральной дисперсии – *исправленная выборочная дисперсия,* которая определяется формулой

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2,$$

Соответственно число $s = \sqrt{s^2}$ является несмещенной точечной оценкой среднего квадратического отклонения.

Точечная оценка при малом объеме выборки может существенно отличаться от оцениваемого параметра, поэтому важно Знать, насколько истинное значение параметра может отклоняться от найденной точечной оценки. Интервал вида $|\theta - \theta^*| < \delta$, где θ -

истинное значение оцениваемого параметра, а Θ^* - его точечная оценка, называется *доверительным интервалом*, а вероятность $\gamma = p(|\theta - \theta^*| < \delta) -$ *доверительной вероятностью* или *надежностью*. Для построения доверительного интервала требуется знать закон распределения исследуемой случайной величины. Пусть эта величина распределена по нормальному закону. Если при этом известно ее среднее квадратическое отклонение *σ*, то доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\bar{x}_B - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где *a* – оцениваемое математическое ожидание, x_B – выборочное среднее, *n* – объем выборки, *t* – такое значение аргумента функции Лапласа *Ф* (*t*), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном среднем квадратическом отклонении доверительный интервал для математического ожидания при заданной надежности *γ* задается так:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Здесь *s* – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а $t_\gamma = t_\gamma(n, \gamma) -$ критическая точка распределения Стьюдента, значение которой можно найти из таблицы приложения 3 по известным *n* и *γ*.

Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения *σ* имеет вид

$$s\,(1-q) < \sigma < s\,(1+q), \text{если}\; q < 1$$
$$0 < \sigma < s\,(1+q), \;\text{если}\; q \geq 1.$$

где *s* – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение,
а $q = q(n, \gamma)$ – значение, определяемое из таблицы приложения 4.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.3. Методы расчета сводных характеристик выборок

Объем учебного времени: 5 часов.
Самостоятельная работа студента №7:

1. Упражнения по теме «Упражнения на вычисление выборочной средней и дисперсии»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:
Студенты должны
уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Рассчитайте сводные характеристики выборок, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1. Найти методом произведений среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки:
а) варианта x 18,6 19,0 19,4 19,8 20,2 20,6.
частота n 4 6 30 40 18 3.
б) варианта x 65 70 75 80 85.
частота n б 5 25 15 3.
2. При вычислении дисперсии распределения неравно отстоящих вариант выборка была разбита на пять интервалов длины h=12. Выборочная дисперсия равноотстоящих вариант (середин частичных интервалов) DB = 52,4. Найти выборочную дисперсию, учитывая поправку Шеппарда.
3. а) Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению неравно отстоящих вариант выборки объема n=50:
x 6 8 11 13 15,5 17,5 20 23,5 24,5 26.
n 1 9 6 6 4 6 8 5 4 1.
б) найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда.
4. а) Найти методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению неравно отстоящих вариант выборки объема n=100:
x 10 13 15 17 19 23 24 26 28 32 34 35.
n 2 4 6 8 9 6 20 15 10 8 7 5.
б) найти выборочную дисперсию с учетом поправки Шеппарда.

5. Найти методом сумм выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема n=100:
а) варианта Xi 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75.
частота п 4 6 8 15 25 20 8 7 5 2.
б)варианта x 122 128 134 140 146 152 158 164 170 176.
частота n 7 8 12 16 4 20 13 10 7 3.
в)варианта x 12 14 16 18 20 22.
частота n 5 15 50 16 10 4.
г)варианта X 10,2 10,4 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8 12,0.
частота п 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Условные варианты

Предположим, что варианты выборки расположены в возрастающем порядке, то есть в виде ***вариационного ряда***.

Равноотстоящими называются варианты, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью h. **Условными** вариантами называют варианты, определяемые равенством: $u_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, где $C-$ ложный нуль (новое начало отсчета); $h-$ шаг, то есть разность между любыми двумя соседними первоначальными вариантами (новая единица масштаба).

Упрощенные методы расчета сводных характеристик выборки основаны на замене первоначальных вариант условными. Если вариационный ряд состоит из равноотстоящих вариант с шагом h, то условные варианты суть целые числа. В самом деле, выбирая в качестве ложного нуля произвольную варианту x_m будем иметь: $u_i = \dfrac{x_i - x_m}{h} = \dfrac{x_1 + (i-1)h - \left[x_1 + (m-1)h\right]}{h} = i - m.$

Так как $i, m \in \mathbf{Z}$ (множеству целых чисел, то и их разность есть целое число.

Условные варианты – это небольшие целые числа. Разумеется оперировать с ними проще, чем с первоначальными вариантами.

Обычные, начальные и центральные эмпирические моменты

Для вычисления сводных характеристик выборки удобно пользоваться эмпирическими моментами, определения которых аналогичны определениям соответствующих теоретических моментов. Эмпирические моменты вычисляются по данным наблюдений.

Определение 1. ***Обычным эмпирическим моментом порядка*** k называют среднее значение k-х степеней разностей $x_i - C$

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - C)^k}{n},$$

где $x_i -$ наблюдаемая варианта,

$n_i -$ частота варианты,

$n = \sum n_i -$ объем выборки,

$C -$ произвольное постоянное число (ложный нуль).

Определение 2. ***Начальным эмпирическим моментом порядка*** k называется обычный эмпирический момент порядка k при $C = 0$

$$M'_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

В частности

$$M'_1 = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \bar{x}_в.$$

Определение 3. ***Центральным эмпирическим моментом порядка*** k называется обычный момент порядка k при $C = \bar{x}_в$

$$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^k}{n}.$$

В частности

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = D_в. \qquad \text{(IV.1)}$$

Легко выразить центральные моменты через обычные:

$$m_2 = M_2' - \left(M_1'\right)^2; \quad \text{(IV.2)}$$

$$m_3 = M_3' - 3M_2'M_1' + 2\left(M_1'\right)^3;$$

$$m_4 = M_1' - 4M_3'M_1' + 6M_2'\left(M_1'\right)^2 - 3\left(M_1'\right)^4. \quad \text{(IV.3)}$$

Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным

Определение 4. ***Условным эмпирическим моментом порядка*** k называется начальный момент порядка k, вычисленный для условных вариант

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n}.$$

В частности

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{\sum n_i x_i}{n} - C\frac{\sum n_i}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\left(x_i - C\right).$$

Откуда: $\bar{x}_в = M_1^* h + C.$

Выразим обычные моменты через условные:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k}\cdot\frac{\sum n_i\left(x_i - C\right)^k}{n} = \frac{M_k'}{h^k}.$$

Отсюда: $M_k' = M_k^* h^k.$

Найдя обычные моменты, легко найти центральные моменты по соотношениям (IV.2) и (IV.3), тогда будем иметь удобные формулы для вычислений

$$m_2 = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]\cdot h^2; \quad \text{(IV.4)}$$

$$m_3 = \left[M_3^* - 3M_2^*M_1^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right]\cdot h^3;$$

$$m_4 = \left[M_4^* - 4M_3^*M_1^* + 6M_2^*\left(M_1^*\right)^2 - 3\left(M_1^*\right)^4\right]\cdot h^4. \quad \text{(IV.5)}$$

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.4. Понятие точечной оценки

Объем учебного времени: 4 часа.
Самостоятельная работа студента №8:

1. Подготовка реферата по темам: «Понятие точечной оценки», «Метод максимального правдоподобия»

Цель самостоятельной работы:

- Развитие культуры речи: формирование умения аргументировано отстаивать свою точку зрения, умения слушать других и отвечать на их вопросы, правильно и конкретно формулировать и задавать вопросы;
- Развитие умений и навыков работы с дополнительной литературой; а также поиска материалов в Internet;
- Развитие умений оформлять реферат в соответствии с требованиями по оформлению текстовой документации: ЕСКД ГОСТ 2.105–95. «Общие требования к текстовой документации» (Приложение А).

Содержание задания:

- подобрать литературу;
- разработать план написания реферата и последовательность изложения темы;
- оформить реферат в соответствии с «Общими требованиями к текстовой документации».

Объем работы: 5 – 15 страниц машинописного текста формата А-4

Срок выполнения: В соответствии с рабочей программой по дисциплине, на написание реферата по теме отводится 2 часов внеаудиторной работы студентов. Реферат сдается через 5-7 дней, со дня получения темы реферата.

Форма контроля – устная защита реферата на уроке или преподавателю.

Методические рекомендации по написанию рефератов

Реферат – это краткое изложения научной проблемы, как в письменной, так и в устной форме.

Важно предоставить студентам возможность выбора темы реферата или студенческого доклада. Помимо разработки сущности содержания плана, структуры студенческих работ, необходимо научить кратко и свободно излагать это содержание.

Такая работа должна иметь введение, основную часть, заключение (выводы, рекомендации), библиографию, приложение (если оно необходимо), содержащее таблицы, рисунки, схемы фотографий и др.

Немаловажное значение имеют обсуждение и оценка этой работы студентами группы. Обсуждая и оценивая реферат или доклад, студенты могут дополнять его, задавать выступающему вопросы, оспаривать некоторые положения и выводы. Для активизации обсуждения обычно назначаются оппоненты или рецензенты из числа студентов, которые заранее знакомятся с работой и свои замечания высказывают на семинарском занятии.

Реферат – это показатель интеллектуальной зрелости студента, его общекультурной и специальной подготовки. В реферате должно быть раскрыто знание студентом конкретной темы в контексте всего предмета, его умение решать чисто «технологические» задачи: как «выстроить» работу, чем начать и закончить, как правильно соотнести критический, научный, практический, цитатный материал и собственный взгляд и суждения. При этом важным является способность выразить свое мнение, свое авторство, т.е. не «остаться за кадром».

Продуманность, свежесть и новизна раскрытия темы, четкость и ясность изложения проблемных вопросов, композиционная стройность, привлечение цитируемого материала для подтверждения собственных мыслей – таковы основные требования к написанию реферата. «Нахватанность», ориентированная на готовую, часто поверхностно усвоенную информацию, перезагруженность цитатным материалом, не всегда удачное введение его в рассуждения не должны иметь места в реферате.

Чтобы написать содержательный реферат, необходимо придерживаться **следующих рекомендаций:**

1. Выберите себе тему, которая позволит вам выразить со всей полнотой идеи, знания по данной проблеме. Она должна быть актуальной, т.е. входить в одно из современных направлений науки.

2. Сформулируйте для себя проблему, которую вы будете раскрывать в соответствии с темой реферата.

3. Составьте краткий план реферата, который позволит вам изложить материал логично, последовательно, не повторяясь. В плане должны найти отражение разделы:

а) вступление, в котором обосновываются актуальность выбранной темы, её значение, степень разработанности;

б) литературный обзор, работа над которым заключается в тщательном изучении нужных публикаций последних лет, в умелом пользовании ими.

Знакомство со специальной литературой позволит представить состояние всей проблемы в целом;

в) основная часть, отражающая опорные мысли разрабатываемой темы;

г) заключение с освещением итогов изучения проблемы. Отбираются только кардинальные вопросы. Здесь можно обосновать новый взгляд на проблему и выдвинуть оригинальную гипотезу;

д) выводы, которые завершают реферат. Чётко и кратко сформулированные, они должны носить строго декларативный характер и не иметь никакой дополнительной аргументации. Любой вывод должен быть совершенно независимым от предыдущего или последующего.

е) в конце текста приводится список использованной литературы. В нём даются только те источники, с которыми вы работали.

Реферат должен быть содержательным, логичным, аргументированным, отражать личностную позицию автора. Оформление должно быть правильным (пронумерованы страницы; сокращение слов не допускается; текст должен быть разделён на логические части - абзацы; обязательны сноски). Работа не должна быть перегружена цитатами, цифрами, таблицами.

На титульном листе указываются (Приложение Б) :

учебное заведение;

тема реферата;

группа, фамилия, имя автора (полностью);

фамилия, имя, отчество преподавателя

При необходимости к реферату оформляются приложения (документы, иллюстрации, таблицы, схемы и т.д.)

После выполнения реферат сдается на проверку преподавателю. Преподаватель проводит со студентом беседу, и обсуждение выполненного реферата или студент докладывает результаты своего исследования на уроке с последующим обсуждением в группе.

Критерии оценки реферата:

- глубина и полнота раскрытия темы;
- логичность, связность;
- соблюдение требований к структуре реферата;
- соблюдение требований к оформлению реферата;
- обоснование выбора темы, ее актуальности;
- структурирование материала по главам.

5 (отлично) выставляется студенту если:

- полностью раскрыта тема;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- соответствие оформления реферата стандартам;
- логичность, связность разделов.

4 (хорошо) выставляется студенту если:

- полностью раскрыта тема;
- соответствие содержания теме;
- отступления в оформлении реферата от стандарта;
- логичность, связность разделов.

3 (удовлетворительно) выставляется студенту если:

- тема раскрыта не полностью;
- соответствие содержания теме;
- отступления в оформлении реферата от стандарта.

2 (неудовлетворительно) выставляется студенту если:

- тема не раскрыта, не соответствует содержанию.

Качество усвоения материала, выявляется при выступлении и обсуждении темы реферата (доклада).

Критерии оценки собеседования по реферату:

5 (отлично) - студент

- последовательно, связно излагает материал, показывая знание и глубокое понимание темы реферата (доклада);
- делает необходимые выводы и обобщения;
- в пределах темы отвечает на поставленные (основные и дополнительные) вопросы.

4 (хорошо) - студент

- твердо усвоил основной материал реферата (доклада);
- ответ, в основном, удовлетворяет установленным требованиям, но при этом студент делает несущественные пропуски при изложении фактического материала.
- допускает две негрубые ошибки или неточности в формулировках.

3 (удовлетворительно) - студент

- знает и понимает основной материал темы реферата (доклада) , но материал излагается упрощенно, с ошибками и затруднениями.

2 (неудовлетворительно) – студент излагает материал бессистемно или при отсутствии ответа.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.5. Интервальная оценка математического ожидания

Объем учебного времени: 7 часов.

Самостоятельная работа студента №9:

1. Выполнение упражнения по теме «Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения; интервальное оценивание вероятности события»

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- Формирование новых умений и навыков и включение их в общую систему уже сформированных знаний, умений и навыков по дисциплинам общеобразовательной подготовки

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- Работать с технической литературой;
- Решать задачи по данной теме.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Определите интервальные оценки математического ожидания нормального распределения; интервальные оценки вероятности события, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

1. Из 500 случайным образом отобранных деталей оказалось 25 нестандартных. Найдите интервальную оценку вероятности события A – выбрать нестандартную деталь - с надежностью 0,95.
2. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально, σ = 0,40. Найти по данным выборки доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью γ = 0,99, если n = 20, =6,34
3. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найти доверительный интервал для с надежностью γ = 0,99, если n = 20, = 6,34, s = 0,40.
4. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найти доверительный интервал для $\sigma_г$ с надежностью γ = 0,95, если n = 20, s = 0,40.
5. Дано: Объем выборки n=20, $X_{сред}$ =340, «исправленное» среднее квадратическое отклонение s= 20.

Определить:

1) Доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью γ =0,95;

2) Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с той же надежностью.

При решении задачи исходить из предположения, что данные взяты из нормальной генеральной совокупности.

Признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объемаn = 10 найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,16. Найти доверительный интервал для σ с надежностью 0,999.

По данным 9 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений =42,319 и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 5,0. Требуется оценить истинное значение *a* измеряемой величины с надежностью y = 0,99.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Доверительный интервал. Доверительная вероятность

Точечная оценка неизвестного (оцениваемого) параметра распределения (фактически — приближенное значение параметра) является случайной величиной. Если известно ее распределение (или хотя бы дисперсия), то можно указать пределы, в которых с достаточно большой вероятностью лежит неизвестное значение параметра. Важно понимать, что пользоваться полученными значениями пределов можно только тогда, когда они *не зависят* от самого оцениваемого параметра. Зададимся достаточно малой с практической точки зрения вероятностью *a*и рассмотрим выборку *x*1, *x*2, …, *xn* из генеральной совокупности, отвечающей случайной величине *x*, функция распределения которой $F_\xi(x,\theta)$, а *q*— неизвестный параметр. Предположим, что удалось найти две такие функции $\underline{\theta}(x_1,...,x_n)$ и $\overline{\theta}(x_1,...,x_n)$, что

- $\underline{\theta}(x_1,...,x_n) < \overline{\theta}(x_1,...,x_n)$ при всех *x*1, *x*2, …, *xn*;
- $P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = 1-\alpha$ при любых значениях параметра *q*.

То есть интервал $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ накрывает неизвестный параметр *q*и не зависит от этого параметра.

Интервал $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ называется *доверительным интервалом* для параметра *q*, соответствующим *доверительной вероятности* 1-*a*.

Доверительные интервалы для математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известной дисперсией

Пусть *x* — нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием *a* и известной дисперсией *Dx = s2*, представленная выборочными значениями

*x*1, *x*2, …, *xn*.

Задача состоит в построении доверительного интервала для неизвестного математического ожидания *a*.

В качестве оценки параметра *a* возьмем выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

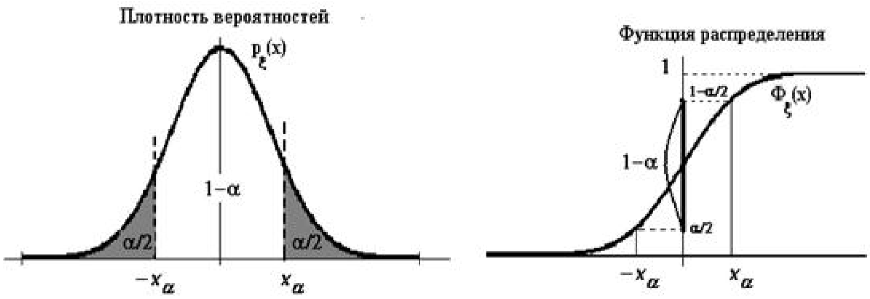
Относительно случайной величины $\overline{x}$ известно:

- случайная величина $\overline{x}$ распределена нормально и ее математическое ожидание равно *a*, $M\overline{x} = a$;
- случайная величина $\overline{x}-a$ тоже распределена нормально и ее математическое ожидание равно нулю, $M(\overline{x}-a)=0$;
- дисперсия случайной величины $\overline{x}-a$ равна $D(\overline{x}-a) = \frac{D\xi^2}{n}$;
- случайная величина $\frac{\overline{x}-a}{\sqrt{\frac{D\xi}{n}}}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Таким образом построен «агрегат», случайная функция выборочных значений, $\frac{\overline{x}-a}{\sqrt{\frac{D\xi}{n}}}$,который представляет собой случайную величину со стандартным нормальным распределением *N*(0,1). Распределение *N*(0,1) не зависит ни от оцениваемого параметра *a*, ни от единиц измерения выборочных значений.

Это означает, что получен универсальный алгоритм построения доверительных интервалов для неизвестного математического ожидания при известной дисперсии. Пусть F(x) — функция распределения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$. Зададимся доверительной вероятностью 1-*a* и определим величину x_α из уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Из приведенного ниже рисунка видно, что если случайная величина *x* имеет стандартное нормальное распределение, то с вероятностью 1-*a* ее значение попадает в интервал (-*x*a., *x*a).



Рис….. Доверительный интервал для математического ожидания

Случайная величина $\frac{\bar{x}-a}{\sqrt{\frac{D\xi}{n}}}$ имеет стандартное нормальное распределение, с вероятностью 1-*a* ее значение лежит в интервале (-*x*a , *x*a), т.е. с вероятностью 1-*a* выполняется неравенство

$$\bar{x} - x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}} \le a \le \bar{x} + x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}.$$

Это означает, что с вероятностью $P = 1-\alpha$ интервал $\left(\bar{x} - x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}, \bar{x} + x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}\right)$ — доверительный интервал математического ожидания нормально распределённой случайной величины с известной дисперсией *Dx*.

Используя стандартное обозначение *Dx = s2*, имеем

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha\right)$$

Т.е. в данном случае $\underline{\theta} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha$, $\bar{\theta} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\alpha$.

Раздел 4. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний

Тема 4.1. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний

Объем учебного времени: 4 часа.

Самостоятельная работа студента №10:

Подготовка рефератов по темам: «Моделирование случайных величин», «Моделирование случайной точки, равномерно распределённой в прямоугольнике», «Моделирование нормально распределенной НСВ», «Моделирование показательно распределённой НСВ»

Цель самостоятельной работы:

- Развитие культуры речи: формирование умения аргументировано отстаивать свою точку зрения, умения слушать других и отвечать на их вопросы, правильно и конкретно формулировать и задавать вопросы;

- Развитие умений и навыков работы с дополнительной литературой; а также поиска материалов в Internet;
- Развитие умений оформлять реферат в соответствии с требованиями по оформлению текстовой документации: ЕСКД ГОСТ 2.105–95. «Общие требования к текстовой документации» (Приложение А).

Содержание задания:

- подобрать литературу;
- разработать план написания реферата и последовательность изложения темы;
- оформить реферат в соответствии с «Общими требованиями к текстовой документации».

Объем работы: 5 – 15 страниц машинописного текста формата А-4

Срок выполнения: В соответствии с рабочей программой по дисциплине, на написание реферата по теме отводится 2 часов внеаудиторной работы студентов. Реферат сдается через 5-7 дней, со дня получения темы реферата.

Форма контроля – устная защита реферата на уроке или преподавателю.

Методические рекомендации по написанию рефератов

Реферат – это краткое изложения научной проблемы, как в письменной, так и в устной форме.

Важно предоставить студентам возможность выбора темы реферата или студенческого доклада. Помимо разработки сущности содержания плана, структуры студенческих работ, необходимо научить кратко и свободно излагать это содержание.

Такая работа должна иметь введение, основную часть, заключение (выводы, рекомендации), библиографию, приложение (если оно необходимо), содержащее таблицы, рисунки, схемы фотографий и др.

Немаловажное значение имеют обсуждение и оценка этой работы студентами группы. Обсуждая и оценивая реферат или доклад, студенты могут дополнять его, задавать выступающему вопросы, оспаривать некоторые положения и выводы. Для активизации обсуждения обычно назначаются оппоненты или рецензенты из числа студентов, которые заранее знакомятся с работой и свои замечания высказывают на семинарском занятии.

Реферат – это показатель интеллектуальной зрелости студента, его общекультурной и специальной подготовки. В реферате должно быть раскрыто знание студентом конкретной темы в контексте всего предмета, его умение решать чисто «технологические» задачи: как «выстроить» работу, чем начать и закончить, как правильно соотнести критический, научный, практический, цитатный материал и собственный взгляд и суждения. При этом важным является способность выразить свое мнение, свое авторство, т.е. не «остаться за кадром».

Продуманность, свежесть и новизна раскрытия темы, четкость и ясность изложения проблемных вопросов, композиционная стройность, привлечение цитируемого материала для подтверждения собственных мыслей – таковы основные требования к написанию реферата. «Нахватанность», ориентированная на готовую, часто поверхностно усвоенную информацию, перезагруженность цитатным материалом, не всегда удачное введение его в рассуждения не должны иметь места в реферате.

Чтобы написать содержательный реферат, необходимо придерживаться **следующих рекомендаций:**

1. Выберите себе тему, которая позволит вам выразить со всей полнотой идеи, знания по данной проблеме. Она должна быть актуальной, т.е. входить в одно из современных направлений науки.

2. Сформулируйте для себя проблему, которую вы будете раскрывать в соответствии с темой реферата.

3. Составьте краткий план реферата, который позволит вам изложить материал логично, последовательно, не повторяясь. В плане должны найти отражение разделы:

а) вступление, в котором обосновываются актуальность выбранной темы, её значение, степень разработанности;

б) литературный обзор, работа над которым заключается в тщательном изучении нужных публикаций последних лет, в умелом пользовании ими.

Знакомство со специальной литературой позволит представить состояние всей проблемы в целом;

в) основная часть, отражающая опорные мысли разрабатываемой темы;

г) заключение с освещением итогов изучения проблемы. Отбираются только кардинальные вопросы. Здесь можно обосновать новый взгляд на проблему и выдвинуть оригинальную гипотезу;

д) выводы, которые завершают реферат. Чётко и кратко сформулированные, они должны носить строго декларативный характер и не иметь никакой дополнительной аргументации. Любой вывод должен быть совершенно независимым от предыдущего или последующего.

е) в конце текста приводится список использованной литературы. В нём даются только те источники, с которыми вы работали.

Реферат должен быть содержательным, логичным, аргументированным, отражать личностную позицию автора. Оформление должно быть правильным (пронумерованы страницы; сокращение слов не допускается; текст должен быть разделён на логические части - абзацы; обязательны сноски). Работа не должна быть перегружена цитатами, цифрами, таблицами.

На титульном листе указываются (Приложение Б) :

учебное заведение;

тема реферата;

группа, фамилия, имя автора (полностью);

фамилия, имя, отчество преподавателя

При необходимости к реферату оформляются приложения (документы, иллюстрации, таблицы, схемы и т.д.)

После выполнения реферат сдается на проверку преподавателю. Преподаватель проводит со студентом беседу, и обсуждение выполненного реферата или студент докладывает результаты своего исследования на уроке с последующим обсуждением в группе.

Критерии оценки реферата:

- глубина и полнота раскрытия темы;
- логичность, связность;
- соблюдение требований к структуре реферата;
- соблюдение требований к оформлению реферата;
- обоснование выбора темы, ее актуальности;
- структурирование материала по главам.

5 (отлично) выставляется студенту если:

- полностью раскрыта тема;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- соответствие оформления реферата стандартам;
- логичность, связность разделов.

4 (хорошо) выставляется студенту если:

- полностью раскрыта тема;
- соответствие содержания теме;
- отступления в оформлении реферата от стандарта;
- логичность, связность разделов.

3 (удовлетворительно) выставляется студенту если:

- тема раскрыта не полностью;
- соответствие содержания теме;
- отступления в оформлении реферата от стандарта.

2 (неудовлетворительно) выставляется студенту если:

- тема не раскрыта, не соответствует содержанию.

Качество усвоения материала, выявляется при выступлении и обсуждении темы реферата (доклада).

Критерии оценки собеседования по реферату:

5 (отлично) - студент

- последовательно, связно излагает материал, показывая знание и глубокое понимание темы реферата (доклада);
- делает необходимые выводы и обобщения;
- в пределах темы отвечает на поставленные (основные и дополнительные) вопросы.

4 (хорошо) - студент

- твердо усвоил основной материал реферата (доклада);
- ответ, в основном, удовлетворяет установленным требованиям, но при этом студент делает несущественные пропуски при изложении фактического материала.
- допускает две негрубые ошибки или неточности в формулировках.

3 (удовлетворительно) - студент

- знает и понимает основной материал темы реферата (доклада) , но материал излагается упрощенно, с ошибками и затруднениями.

2 (неудовлетворительно) – студент излагает материал бессистемно или при отсутствии ответа.

Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.1. Неориентированные графы, основные понятия

Объем учебного времени: 5 часов.
Самостоятельная работа студента №11:

1. «Выполнение расчетно-графического задания по теме «Графы»»

   Цель:
   - Повторение раннее изученного материала
   - ознакомление с основными понятиями теории графов, приобретение практических навыков решения задач раскраски графов, поиска кратчайших путей, деревьев Хаффмана, поиска основного дерева, поиска максимального потока.

Основные результаты самостоятельной работы:
Студенты должны
уметь:
- находить кратчайший путь;
- решать задачи по раскраске графов.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Выполните следующие задания, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

Задача 1. Найдите хроматический многочлен данного графа.

Задача 2. Дан граф, найдите кратчайший путь между указанными вершинами.

Задача 3. Найдите, для данного графа матрицу кратчайших расстояний.

Задача 4. Заданы символы с их частотами, постройте дерево Хаффмана, определите код Хаффмана.

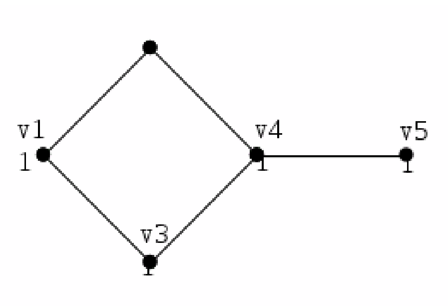
Задача 5. Найдите минимальное основное дерево представленного графа поиском в ширину.

Задача 6. Найдите минимальное основное дерево представленного графа поиском в глубину.

Задача 7. Найдите максимальный поток в сети и минимальное сечение.

Задача 1.

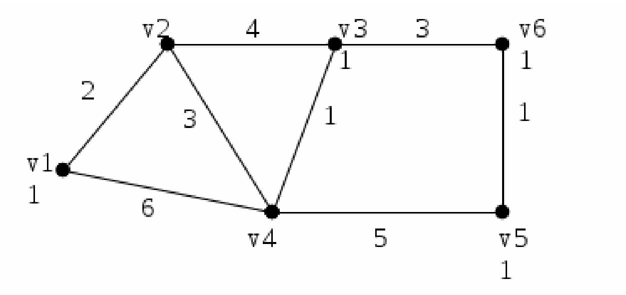
Дан граф:



Найдите его хроматический многочлен.

Задача 2.

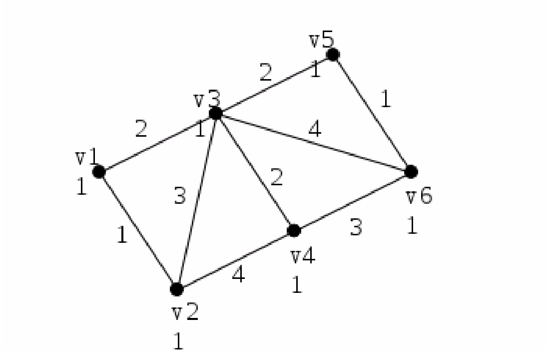
Дан граф:



Найдите, используя Алгоритм Дейкстры кратчайший путь из вершины v1 в v6.

Задача 3

Дан граф:



Используя алгоритм Флойда-Уоршолла найдите матрицу кратчайших расстояний.

Задача 4.

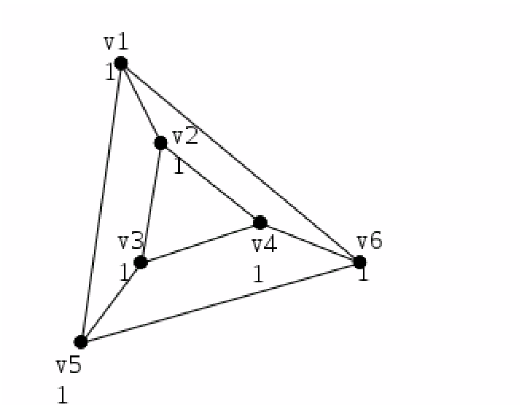
Заданы следующие символы с их частотами:

символ	частота
a	8
b	5
e	10
k	1
r	3

Постройте Дерево Хаффмана, определите код Хаффмана, найдите вес кода.

Задача 5.

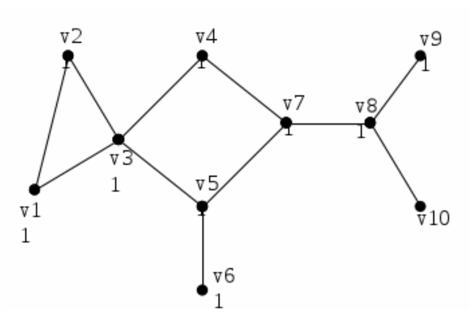
Дан граф**:**



Найдите его минимальное основное дерево поиском в ширину.

Задача 6.

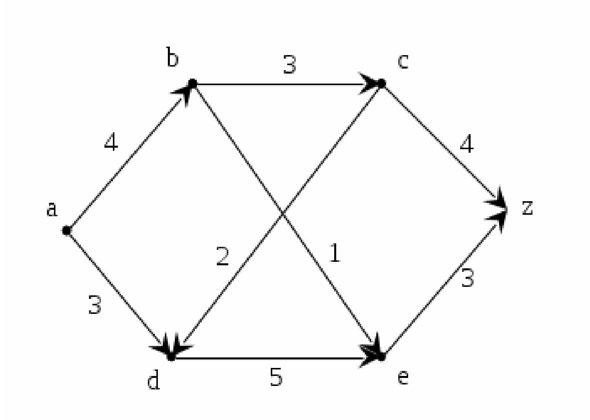
Дан граф:



Найдите его минимальное основное дерево поиском в глубину.

Задача 7.

Дана сеть.



Определите максимальный поток в сети и найдите минимальное сечение.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

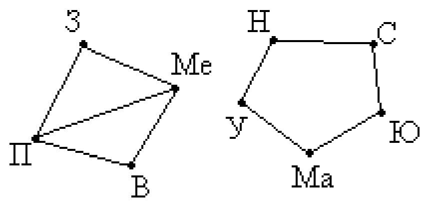
Графы – замечательные математические объекты, с их помощью можно решать очень много различных, внешне не похожих друг на друга задач. В математике существует целый раздел – теория графов, который изучает графы, их свойства и применение. Мы же обсудим только самые основные понятия, свойства графов и некоторые способы решения задач.

Понятие графа

Рассмотрим две задачи.

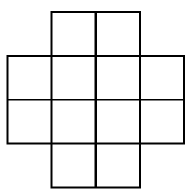
Задача 1. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Вене; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса ?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.



Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4х4 убрать угловые клетки.

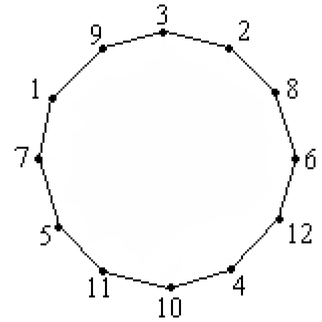


Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках ровно по одному разу ?

Решение: Занумеруем последовательно клетки доски:

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

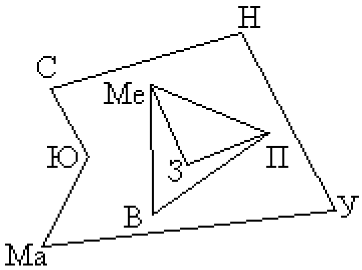
А теперь с помощью рисунка покажем, что такой обход таблицы, как указано в условии, возможен:



Мы рассмотрели две непохожие задачи. Однако решения этих двух задач объединяет общая идея – графическое представление решения. При этом и картинки, нарисованные для каждой задачи, оказались похожими: каждая картинка – это несколько точек, некоторые из которых соединены линиями.

Такие картинки и называются *графами*. Точки при этом называются *вершинами*, а линии – *ребрами* графа. Заметим, что не каждая картинка такого вида будет называться графом. Например. если вас попросят нарисовать в тетради пятиугольник, то такой рисунок графом не будет. Будем называть что рисунок такого вида, как в предыдущих задачах, графом, если есть какая-то конкретная задача для которой такой рисунок построен.

Другое замечание касается вида графа. Попробуйте проверить, что граф для одной и той же задачи можно нарисовать разными способами; и наоборот для разных задач можно нарисовать одинаковые по виду графы. Здесь важно лишь то, какие вершины соединены друг с другом, а какие – нет. Например, граф для задачи 1 можно нарисовать по-другому:



Такие одинаковые, но по-разному нарисованные графы, называются *изоморфными*.

Степени вершин и подсчет числа ребер графа

Запишем еще одно определение: Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер. В связи с этим, вершина, имеющая четную степень, называется четной вершиной, соответственно, вершина, имеющая нечетную степень, называется нечетной вершиной.

С понятием степени вершины связана одна из основных теорем теории графов – теорема о честности числа нечетных вершин. Докажем ее мы немного позднее, а сначала для иллюстрации рассмотрим задачу.

Задача 3. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими ?

Решение: Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра – провода, их соединяющие.

Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, т.е. степень каждой вершины нашего графа – *5*. Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2 (т.к. каждый провод имеет два конца, то при суммировании степеней каждый провод будет взят 2 раза). Но тогда количество проводов получится разным $15 \cdot 5/2 = 37{,}5$. Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным.

Ответ. Соединить телефоны таким образом невозможно.

Теорема*:* Любой граф содержит четное число нечетных вершин.

Доказательство: Количество ребер графа равно половине суммы степеней его вершин. Так как количество ребер должно быть целым числом, то сумма степеней вершин должна быть четной. А это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

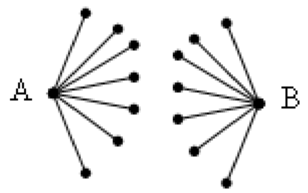
Связность графа

Есть еще одно важное понятие, относящееся к графам – понятие связности.

Граф называется *связным,* если из любые две его вершины можно соединить *путем,* т.е. непрерывной последовательностью ребер. Существует целый ряд задач, решение которых основано на понятии связности графа.

Задача 4. В стране Семерка 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города модно добраться в любой другой.

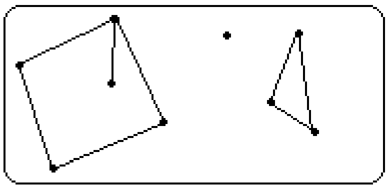
Доказательство: Рассмотрим два произвольных А и В города и допустим, что между ними нет пути. Каждый из них соединен дорогами не менее, чем с семью другими, причем нет такого города, который был бы соединен с обоими рассматриваемыми городами (в противном случае существовал бы путь из А в В). Нарисуем часть графа, соответствующую этим городам:



Теперь явно видно, что мы получили не менее различных 16 городов, что противоречит условию задачи. Значит утверждение доказано от противного.

Если принять во внимание предыдущее определение, то утверждение задачи можно переформулировать и по-другому: “Доказать, что граф дорог страны Семерка связен.”

Теперь вы знаете, как выглядит связный граф. Несвязный граф имеет вид нескольких “кусков”, каждый из которых – либо отдельная вершина без ребер, либо связный граф. Пример несвязного графа вы видите на рисунке:



Каждый такой отдельный кусок называется *компонентой связности графа.* Каждая компонента связности представляет собой связный граф и для нее выполняются все утверждения, которые мы доказали для связных графов. Рассмотрим пример задачи, в которой используется компонента связности:

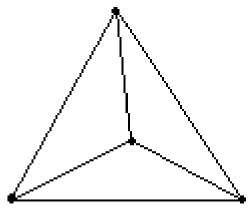
Задача 5*.* В Тридевятом царстве только один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 newline ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в город Дальний.

Доказательство: Понятно, что если нарисовать граф ковролиний Царства, то он может быть несвязным. Рассмотрим компоненту связности, которая включает в себя столицу Царства. Из столицы выходит 21 ковролиния, а из любых других городов, кроме города Дальний – по 20, поэтому, чтобы выполнялся закон о четном числе нечетных вершин необходимо, чтобы и город Дальний входил в эту же самую компоненту связности. А так как компонента связности – связный граф, то из столицы существует путь по ковролиниям до города Дальний, что и требовалось доказать.

Графы Эйлера

Вы наверняка сталкивались с задачами, в которых требуется нарисовать какую-либо фигуру не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждую линию только один раз. Оказывается, что такая задача не всегда разрешима, т.е. существуют фигуры, которые указанным способом нарисовать нельзя. Вопрос разрешимости таких задач также входит в теорию графов. Впервые его исследовал в 1736 году великий немецкий математик Леонард Эйлер, решая задачу о Кенигсбергских мостах. Поэтому графы, которые можно нарисовать указанным способом, называются Эйлеровыми графами.

Задача 6. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз ?



Решение. Если мы будем рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. То есть все вершины графа, кроме двух должны быть четными. В нашем же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным в условии способом.

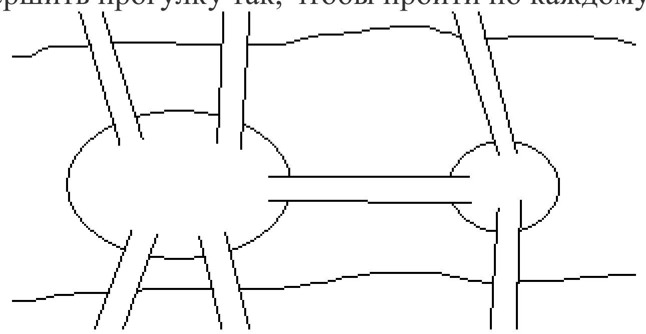
Сейчас мы доказали теорему об Эйлеровых графах:

Теорема: *Эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.*

И в заключение – задача о Кенигсбергских мостах.

Задача 7. На рисунке изображена схема мостов города Кенигсберга.

Можно ли совершить прогулку так, чтобы пройти по каждому мосту ровно 1 раз?



3. Примеры решения задач к теме «Графы»

Понятие графа.

1. На квадратной доске 3х3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

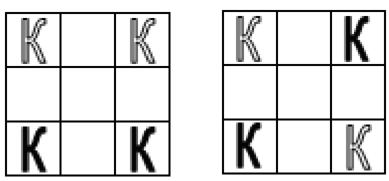
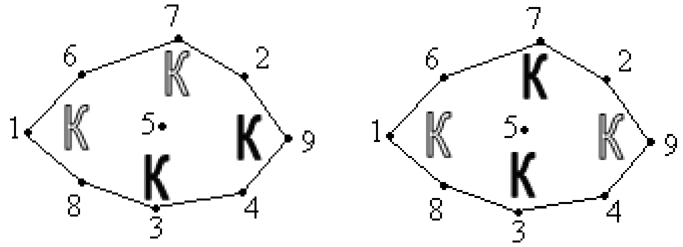


Рис. 1 *Рис. 2*

Решение. Занумеруем клетки доски, как показано на рисунке:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Каждой клетке поставим в соответствие точку на плоскости и, если из одной клетки можно попасть в другую ходом шахматного коня, то соответствующие точки соединим линией. Исходная и требуемая расстановки коней показаны на рисунках:



При любой последовательности ходов конями порядок их следования, очевидно, измениться не может. Поэтому переставить коней требуемым образом невозможно.

2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

Решение. Поставив в соответствие каждому городу точку и соединив точки линией, если сумма цифр делится на 3, получим граф, в котором цифры 3, 5, 9 связаны между собой, но не связаны с остальными. Значит долететь из города 1 в город 9 нельзя.

Степени вершин и подсчет числа ребер.

3. В государстве 100 городов к из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.

Решение. Подсчитаем общее количество выходящих городов дорог – $100 \cdot 4 = 400$. Однако при таком подсчете каждая дорога посчитана 2 раза – она выходит из одного города и входит в другой. Значит всего дорог в два раза меньше, т.е. 200.

4. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей ?

Ответ. Нет (теорема о четности числа нечетных вершин).

5. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей ?

Ответ. Нет, не может.

6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Решение. Подсчитаем число городов. Число дорог равно числу городов x, умноженному на 3 (число выходящих из каждого города дорог) и разделенному на 2 (см. задачу 3). Тогда $100 = 3x/2 \Rightarrow 3x=200$, чего не может быть при натуральном x. Значит 100 дорог в таком государстве быть не может.

7. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Доказательство непосредственно следует из теоремы о четности числа нечетных вершин графа.

Связность.

8. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться до любого другого.

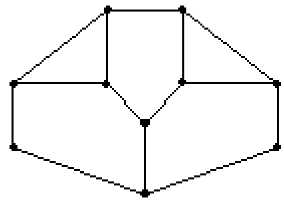
Доказательство. Рассмотрим компоненту связности, в которую входит один из городов, дорогу между которыми закрыли. По теореме о четности числа нечетных вершин в нее входит и второй город. А значит по-прежнему можно найти маршрут и добраться из одного из этих городов в другой.

Графы Эйлера.

9. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту розно 1 раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?
б) с него начал, но не на нем закончил?
в) с него начал и на нем закончил?

10. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей заборами. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор розно 1 раз?



Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.3. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Объем учебного времени: 6 часов.
Самостоятельная работа студента №12:

1. Решение задач по теории графов. Эйлеровы и Гамильтоновы графы

Цель:

- Повторение раннее изученного материала
- изучение алгоритма поиска Эйлерова, гамильтонова цикла (пути) в графе, рассмотрение на конкретных примерах ориентированные и неориентированные графы.

Основные результаты самостоятельной работы:

Студенты должны

уметь:

- находить кратчайший путь;
- решать задачи по поиску алгоритма Эйлерова, гамильтонова цикла (пути) в графе.

Форма контроля - задание выполняется письменно и предоставляется на проверку преподавателю в течение изучения темы.

1. Выполните следующие задания, пользуясь Методическими указаниями к выполнению заданий

Задание 1. Изобразите графы на 8 вершинах, обладающие (не обладающие) эйлеровым путем; эйлеровым циклом.

Задание 2. Пусть в связном графе две вершины u и v имеют нечетную степень, а степень остальных вершин четна. Докажите, что вершины u и v соединены путем.

Задание 3. В некоторой стране из любого города выходит ровно 100 дорог таким образом, что из любого города можно попасть в любой другой город. Докажите, что сообщение между городами не нарушится, если в этой стране закрыть одну дорогу на ремонт.

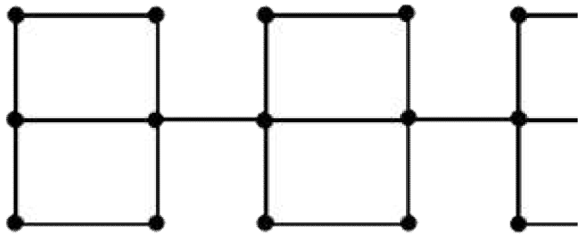
Задание 4. Докажите, что связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда множество его ребер можно разбить на непересекающиеся циклы.

Задание 5. Докажите, что линейный граф эйлерова графа является эйлеровым. Если линейный граф эйлеров, будет ли эйлеровым сам граф?

Задание 6. Докажите, что граф K_5 имеет 264 эйлеровых цикла.

Задание 7. Пусть граф *G* – эйлеров. Что можно сказать о его дополнении $\overline{G}$?

Задание 8. На рисунке представлен план художественной выставки. Где на выставке следовало бы сделать вход, а где – выход?

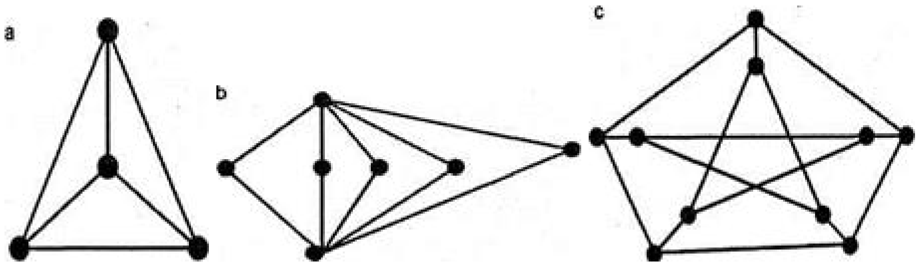


Задание 9. Докажите, что для любого связного графа можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности 2 раза, по 1 разу в каждом направлении.

Замечание. Если у лабиринта все стенки связаны друг с другом, то такой лабиринт всегда можно обойти, касаясь стенки одной рукой.

Задание 10. Эйлеров граф называется *произвольно вычерчиваемым* из данной вершины если, начиная от этой вершины и обходя граф произвольным образом, но не перемещаясь дважды ни по одному из ребер, мы всегда получим эйлеров цикл. Приведите пример эйлерова графа, не обладающего этом свойством.

Задание 11. Являются ли указанные на рисунках графы гамильтоновыми?



Задание 12. Приведите пример гамильтонова, но не эйлерова графа; эйлерова, но не гамильтонова графа. Что можно сказать о графах, одновременно являющихся и эйлеровыми, и гамильтоновыми графами?

Задание 13. Постройте гамильтонов цикл на графе додекаэдра.

Задание 14. Докажите, что если в графе на $n \geq 3$ вершинах $d(v)+d(u) \geq n$ для каждой пары вершин, то граф является гамильтоновым. Выведите отсюда теорему Дирака.

Задание 15. Девять гурманов во время конференции садятся за круглый стол, причем любые два из них занимают соседние места только 1 раз. Что можно сказать о продолжительности конференции?

Задание 16. Найдите в графе K_{2n+1} n гамильтоновых циклов, никакие два из которых не имеют общих ребер. Выполните аналогичное задание для $K_{n,n}$.

Методическими указаниями к выполнению заданий:

Эйлеровы графы

К задачам на Эйлеровы графы относятся головоломки, в которых требуется вычертить на плоскости одним росчерком замкнутые кривые, обводя каждый участок в точности один раз. Введём следующие понятия.

Эйлеровым путём в графе называется путь, содержащий все рёбра графа.

Эйлеровым циклом или эйлеровой цепью называется цикл, содержащий все рёбра графа и притом по одному разу. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом. Замкнутую линию, если её можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, принято называть уникурсальной. Рисунок графа, обладающий эйлеровым путём или эйлеровым циклом, является уникурсальной линией. Докажем следующие две теоремы

Теорема 1. Если граф G(V,E) обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные.

Доказательство. Связность графа следует из определения эйлерова цикла. Эйлеров цикл содержит каждое ребро и притом только один раз, поэтому, сколько раз эйлеров путь приведет конец карандаша в вершину, столько и выведет, причём уже по одному ребру. Следовательно, степень каждой вершины графа должна состоять из двух одинаковых слагаемых: одно – результат подсчета входов в вершину, другое – выходов.

Теорема 2. Если граф G(V,E) связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

Доказательство. Если начать путь из произвольной вершины графа G(V,E) , то найдётся цикл, содержащий все рёбра графа. Пусть i v - произвольная вершина. Из i v начнём путь по l по одному из рёбер и продолжим его, проходя каждый раз по новому ребру. Все вершины графа имеют чётные степени, поэтому если l есть «выход» из i v , то должен быть и «вход» в i v , также как и для любой вершины другой вершины. И если есть «вход» в вершину, то должен быть и «выход». Так как число Чащина Е.А. г. Прокопьевск Чащина г. Прокопьвск ребер конечно, то это путь должен окончиться, причём в вершине i v . Если путь, замкнувшийся в i v , проходит через все рёбра графа, то мы получим искомый эйлеров цикл.

Для построения эйлерова цикла в связном графе со всеми вершинами чётной степени применяется следующий алгоритм:

1. Выйти из произвольной вершины i v . Каждое пройденное ребро зачеркнуть. Если путь 1 l замыкается в i v и проходит через все рёбра графа, то получим искомый эйлеров цикл.

2. Если остались непройденные рёбра, то должна существовать вершина , 2 v принадлежащая 1 l и ребру, не вошедшему в . 1 l

3. Так как v2 – чётная, то число рёбер, которым принадлежит 2 v и которые не вошли в путь , 1 l тоже чётно. Начнём новый путь 2 l из 2 v и используем только рёбра, не принадлежащие . 1 l Этот путь кончится в . 2 v

4. Объединим теперь оба цикла: из i v пройдём по пути 1 l к , 2 v затем по 2 l и, вернувшись в , 2 v пройдём по оставшейся части 1 l обратно в i v . 5. Если снова найдутся рёбра, которые не вошли в путь, то найдём новые циклы. Так как число рёбер и вершин конечно, то процесс закончится. Таким образом, замкнутую фигуру, в которой все вершины чётные, можно начертить одним росчерком без повторений и начиная с любой точки. На практике эйлеровым графом может быть план выставки; это позволяет расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

Гамильтоновы графы

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом. Гамильтоновым циклом, или путём в графе, называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все рёбра, и притом по одному разу, вторые – все вершины по одному разу. Но, несмотря на внешнее сходство, задачи их отыскания резко отличаются по степени трудности.

Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины чётные. Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе ещё не найден. Однако есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

1. Всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.

2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие рёбра, то он также является гамильтоновым.

3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Алгоритма проверки существования эйлерова пути

Представим динамику выполнения алгоритма проверки существования эйлерова пути (цикла) из вершины 0 для представленного на рисунке 1 графа.

Цикл существует.

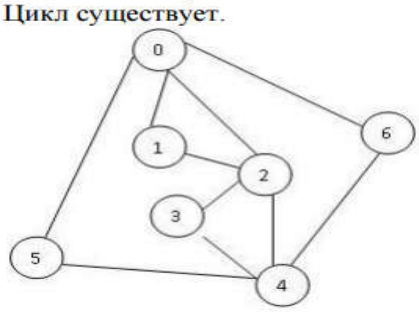


Рисунок 1

Например, один из возможных путей прохождения всех ребер графа из вершины 0 может быть следующим:

0 – 1 – 2 – 0 – 6 – 4 – 2 – 3 – 4 – 5 – 0

В приведенном списке вершин, следующих за 0, каждая вершина является одновременно концом предыдущего ребра и началом следующего.

В соответствии с алгоритмом:

0 – степень 4;

1 – 2;

2 – 4;

3 – 2;

4 – 4;

5 – 2;

6 – 2;

Степени всех вершин четные, следовательно, эйлеров цикл в данном графе существует.

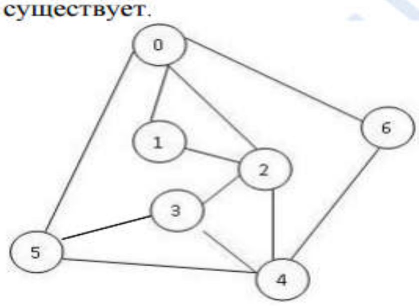


Рисунок 2

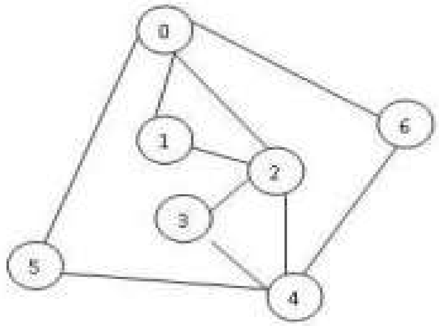
Граф, изображенный на рисунке 2 отличается от рисунка 1 только добавлением ребра (3 – 5).

При этом степени вершин 3 и 5 стали нечетными. Согласно алгоритму проверки существования эйлерова цикла, основывающемуся на проверке четности степени каждой вершины, в данном графе цикла быть не может.

Однако, если учесть следствие, по которому в точности две вершины имеют нечетную степень, то и в графе, изображенном на рисунке 1 должен существовать эйлеров путь.

Пример такого пути: 3 – 2 – 4- 3 – 5 – 4 – 6 – 0 – 2 – 1 – 0 – 5. При этом две вершины, имеющие нечетную степень, находятся на концах такого пути.

Алгоритма поиска гамильтонова пути Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути (цикла) из вершины 0 для графа, представленного на рисунке 3.



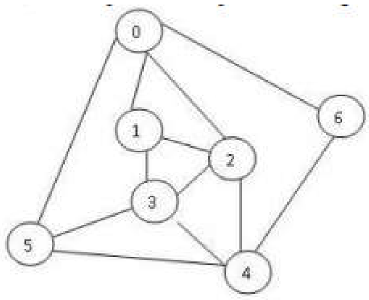
Рисунке 3.

Цикла не существует.

0-1 1-2 2-3 3-4 4-5 4-6 2-4 4-3 4-5 4-6 0-2 2-1 2-3 3-4 4-5 4-6 2-4 4-3 4-5 4-6 0-5 5-4 4-2 2-1 2-3 4-3 3-2 2-1 4-6 0-6 6-4 4-2 2-1 4-3 3-2 2-1 4-5

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути для представленного на рисунке 4 графа.

Цикл существует, например: 0 – 6 – 4 – 2 – 1 – 3 – 5 – 0.



Рисунке 4.

Продемонстрируем поиск цикла от вершины 1.

1-0 0-5 5-3 3-2 2-4 4-6 3-4 4-2 4-6 5-4 4-2 2-3 4-6 0-6 6-4 4-2 2-3 3-5 4-3 3-2 3-5 4-5 5-3 3-2 2-1 Искомый путь 1 – 0 – 6 – 4 – 5- 3 – 2 – 1 .

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:
1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
4. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Дополнительные источники:
1. Алгебра и начало анализа / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2003. – 384с.
2. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Дрофа, 2002. – 396с.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. – М.: Мнемозина, 2003. – 335с.
4. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2008. – 320с.
5. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
6. Кочетков Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2005, 2008. – 239с.
7. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: Юрайт, 2011. – 440с.; ил.
8. Сидняев Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / Н.И. Сидняев. – М.: Юрайт, 2011. – 219с.: ил.
9. Шипачев В.С. Математический анализ. М.: Высшая школа, 2001. – 176с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные требования к оформлению реферата

Оформление реферата должно соответствовать требованиям ЕСКД ГОСТ 2.105–95. «Общие требования к текстовой документации».

Общие требования к оформлению реферата.

Оформление реферата в общем случае должно вестись в соответствии с требованиями государственных стандартов ГОСТ 2.105 и ГОСТ Р 21.1101. Реферат может быть представлен в рукописном или машинописном видах. При печати набирается шрифтом Times New Roman размером (кеглем) 14, строчным, без выделения, с выравниванием по ширине.

Текст печатается на листах писчей бумаги форматом А4 (210 х 297 мм) через полтора интервала. Для разворотных таблиц и рисунков допускается формат А3 (297 х 420 мм). Заголовки таблиц, названия схем допускается печатать через один интервал.

Рукописный вариант выполняется пастой, тушью, чернилами одного цвета (черного). Шрифт должен соответствовать ГОСТ 2.304-81 "ЕСКД. Шрифты чертежные". Номера страниц проставляются в правом верхнем углу листа.

Напечатанный текст должен иметь поля следующих размеров:

• верхнее и нижнее –20 мм;

• правое 10 мм;

• левое –30 мм.

Отступ первой строки абзаца равен 5 знакам, а на принтере – 1,25 см, допускается установка интервала между абзацами 3 – 6 пунктов.

Текст печатается строчными буквами. Не допускается выделение основного текста реферата курсивом, подчеркиванием или полужирным начертанием.

Текст реферата должен быть выполнен аккуратно, литературным и грамотным языком на одной стороне листа бумаги А4. Вписывать в текст реферата, изготовленной машинописным способом, отдельные слова, формулы, условные знаки (рукописным способом), а также выполнять иллюстрации следует черными чернилами, пастой или тушью.

Опечатки, описки и графические неточности, обнаруженные в процессе выполнения реферата, допускается исправлять подчисткой или закрашиванием белой краской с нанесением на том же месте исправленного текста (графика) машинописным способом или же черными чернилами, пастой или тушью рукописным способом.

Страницы работ следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту работ.

Титульный лист включает в общую нумерацию страниц работ. Номер страницы на титульном листе не проставляют.

Номер страницы проставляют в центре верхней части листа без точки.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

____
(название темы реферата)

РЕФЕРАТ

по дисциплине____
(название дисциплины)

Преподаватель
____________/Фамилия И.О./
(подпись)
«___»______________20 г.

студент группы №________
____________/Фамилия И.О./
(подпись)
«___»______________20 г.

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изменения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				