



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ГУМАНИТАРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ЕН.02 МАТЕМАТИКА

Специальность:

40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Квалификация выпускника: юрист
(углублённая подготовка)

Разработчик:

Ефимова Татьяна Николаевна, преподаватель колледжа

Методические рекомендации по практическим занятиям обучающихся приняты на заседании предметной цикловой комиссии Гуманитарно-экономического колледжа,

протокол № 1 от 31.08.17

Председатель предметной (цикловой) комиссии  / Н.Х. Федорова

Содержание

Пояснительная записка.....	4
Тематический план.....	5
Содержание практических занятий	8
Приложение	55
Информационное обеспечение обучения.....	55
Лист регистрации изменений.....	57

Пояснительная записка

Методические рекомендации по практическим занятиям, являющиеся частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине ЕН.02 «Математика» составлены в соответствии с:

- 1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения;
- 2 Рабочей программой учебной дисциплины;
- 3 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 9 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины (профессионального модуля) в объёме 20 часов.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **знать**:

- основные понятия и методы линейной алгебры;
- основные понятия дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **уметь**:

- использовать методы линейной алгебры;
- производить действия над элементами комбинаторики;
- вычислять вероятность события;
- определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

На практических занятиях обучающиеся совместно с преподавателем разбирают методы решения типовых задач и самостоятельно выполняют расчётно-графические работы. Расчётно-графическая работа выполняется студентами по прикладным задачам в области профессиональной деятельности. Обучающийся решает задачи самостоятельно, используя литературу и полученные знания. Примеры задач в аудитории не разбираются.

Критерии оценки расчётно-графических работ:

оценка 5 (отлично) ставится, если все задания выполнены верно и сданы в срок;

оценка 4 (хорошо) ставится, если все задания выполнены верно, но работа сдана не в срок или работа сдана в срок, но часть заданий были выполнены не верно (в этом случае работа возвращается на доработку);

оценка 3 (удовлетворительно) ставится, если не все задания выполнены верно и работа сдана не в срок (в этом случае работа возвращается на доработку);

оценка 2 (неудовлетворительно) ставится, если работа была не сдана спустя две недели после срока сдачи

Знания и умения проверяются во время выполнения индивидуальных домашних заданий, тестов и контрольных работ.

Тематический план и содержание учебной дисциплины
Математика

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	2	3	4
Раздел 1. Линейная алгебра		18	
Тема 1.1. Определители и матрицы	Содержание учебного материала Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры.	2	1,2,3
	Матрицы и действия над ними. Различные способы вычисления обратных матриц.	2	
	Практическое занятие № 1. Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы.	2	
Тема 1.2. Системы линейных уравнений	Содержание учебного материала Решение систем линейных уравнений методом Крамера..	2	1,2,3
	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	2	
	Решение систем линейных уравнений матричным методом.	2	
	Практическое занятие № 2. Решение систем линейных уравнений различными методами.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 1. Решение СЛУ по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными. Решение определенные и неопределенные СЛУ	4	
Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа		16	
Тема 2.1. Функция	Содержание учебного материала Аргумент и функция. Область определения и область значения функции. Способы задания функции: табличный, графический, аналитический, словесный	2	1,2,3
	Свойства функции: четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.	2	
	Практическое занятие № 3. Решение задач по темам: «Свойства функции», «Способы задания функции», «Основные элементарные функции».	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 2. Изучение материала по учебно-методической литературе, выполнение домашних заданий по теме «Функция».	4	

Тема 2.2. Пределы и непрерывность	Содержание учебного материала Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва первого и второго рода.	2	1,2,3
	Самостоятельная работа обучающихся № 3. Решение задач по темам «Первый и второй замечательные пределы», «Точки разрыва первого и второго рода», «Числовая последовательность и ее предел».	4	
Раздел 3. Дифференциальное исчисление		22	
Тема 3.1 Производная функции	Содержание учебного материала Определение производной. Геометрический смысл производной.	2	1,2,3
	Механический смысл производной. Производные основных элементарных функций. Производные высших порядков.	4	
	Практическое занятие № 4. Решение задач по производным основных элементарных функций.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 4. Решение задач на темы «Производные высших порядков», «Геометрический смысл производной», «Механический смысл производной».	4	
Тема 3.2. Приложение производной	Содержание учебного материала Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции.	2	1,2,3
	Асимптоты. Исследование функций.	2	
	Практическое занятие № 5. Нахождение производных. Составление уравнения касательной к графику функций. Исследование функций при помощи производных.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 5. Решение задач по теме «Исследование функций».	4	
Раздел 4. Интегральное исчисление		18	
Тема 4.1. Неопределённый интеграл	Содержание учебного материала Первообразная и интеграл. Основные методы интегрирования.	2	1,2,3
	Интегрирование дробно-рациональных функций.	2	
	Практическое занятие № 6. Вычисление неопределённых интегралов.	2	

Тема 4.2. Определённый интеграл	Содержание учебного материала Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.	2	1,2,3
	Формула Ньютона- Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади.	4	
	Практическое занятие № 7. Вычисление определенных интегралов, площади фигуры при помощи определенного интеграла, нахождение длины пути по данной скорости.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 6. Решение задач по вычислению определенных интегралов.	4	
Раздел 5. Комплексные числа		10	
Тема 5.1. Комплексные числа	Содержание учебного материала Определение комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме.	2	1,2,3
	Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа.	4	
	Практическое занятие № 8. Решение задач по темам «Арифметические операции над комплексными числами», « Модуль и аргументы комплексного числа».	4	
Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика		12	
Тема 6.1. Теория вероятностей	Содержание учебного материала Случайные события и их вероятность. Формулы сложения и умножения вероятностей.	2	1,2,3
	Формула полной вероятности, формула Байеса.	2	
	Случайная величина и ее закон распределения, основные характеристики распределения случайных величин.	2	
	Практическое занятие № 9. Вычисление вероятностей случайных событий.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 7. Решение задач по теме размещения, перестановки.	4	
Раздел 7. Дискретная математика		8	

Тема 7.1. Дискретная математика	Содержание учебного материала Предмет дискретной математики.	2	1,2,3
	Место и роль дискретной математики в системе математических наук и в решении задач, связанных с обеспечением информационной безопасности.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 8. Решение задач по теме Место и роль дискретной математики.	4	
Раздел 8. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности		10	
Тема 8.1. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности	Содержание учебного материала Прикладные задачи в области профессиональной деятельности.	4	1,2,3
	Самостоятельная работа обучающихся № 9. Выполнение расчётно-графической работы «Решение прикладных задач в области профессиональной деятельности».	6	
Всего:		114	

Содержание практических занятий

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1.1. Определители и матрицы

Практическое занятие № 1.

Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: правила выполнения операций над матрицами; правило вычисления определителя второго порядка; правило вычисления определителей третьего порядка; определение обратной матрицы

уметь: применять правила выполнения операций над матрицами при решении задач; выполнять операции над матрицами; применять правило вычисления определителя второго порядка при решении задач; вычислять определители третьего порядка; находить обратную матрицу

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры. Матрицы и действия над ними. Различные способы вычисления обратных матриц.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Найти матрицу $5A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение. Используем определения линейных операций над матрицами:

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти x , y и m , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их соответствующим элементам матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Если $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, то
$$\begin{cases} 1 - 2m = -5 \\ 6 + mx = 21 \\ -1 + my = 8 \\ 2 - m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 6 + 3x = 21 \\ -1 + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5$, $y = 3$, $m = 3$.

Задача 3. Найти AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение. Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность. $A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B :

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B ; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A , второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A :

$$\begin{aligned} d_{11} &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0; & d_{12} &= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4; & d_{13} &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1; & d_{14} &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2; \\ d_{21} &= -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2; & d_{22} &= -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2; & d_{23} &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1; & d_{24} &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0; \\ d_{31} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1; & d_{32} &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1; & d_{33} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0; & d_{34} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1; \\ d_{41} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8; & d_{42} &= 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; & d_{43} &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2; & d_{44} &= 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Если произведение существует, вычислить его.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение. Сравним размерности матриц A и B : $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Следовательно, $n = l$, $m \neq k$, поэтому произведение $AB[3 \times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB :

$$\begin{aligned} (ab)_{11} &= 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21; & (ab)_{12} &= 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24; & (ab)_{21} &= 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6; \\ (ab)_{22} &= 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8; & (ab)_{31} &= 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2; & (ab)_{32} &= 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2. \end{aligned}$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, BA не существует.

Задача 5. Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Указание. Найдите произведение AA и матрицу $-3A$, а затем сложите полученные матрицы.

Решение. Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.

Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -4; & c_{12} &= -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1; \\ c_{21} &= 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 0; & c_{22} &= 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9. \end{aligned}$$

Итак, $C = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Теперь вычислим элементы матрицы $D = -3A$. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3 : $D = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $A^2 - 3A = C + D = \begin{pmatrix} -4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Указание. Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение. 1-й способ (правило треугольников).

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$$\Delta = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

2-й способ (разложение по строке).

Применим свойство определителя: $\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$.

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22} , так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij} , получается вычеркиванием из исходного определителя i -й строки и j -го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-8) = 34$.

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 7. Используя свойства определителя, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.

Указание. Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение. Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство 6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 8. Используя свойства определителей, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}$.

Указание. Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычитайте удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение. Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 9. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40$.

Указание. Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x .

Решение. Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4x) = 9 - 4x;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - x) = x - 15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (20 - 3) = 17.$$

Тогда $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot (9 - 4x) + 1 \cdot (x - 15) + 3 \cdot 17 = -4x^2 + 10x + 36,$

и требуется решить квадратное уравнение $-4x^2 + 10x + 36 = 40$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.

Задача 10. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} > -3$.

Указание. Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение. Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > -3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4,5.$$

Ответ: $(2; 4,5)$.

Задача 11. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Указание. Преобразуйте определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуйтесь свойством 6.

Решение. Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 6. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1 . Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки

(напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Задача 12. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 0 \\ -67 & 83 & 2 & 0 \\ 19 & 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}$.

Указание. Разложите определитель по 1-й строке, а затем полученный определитель 3-го порядка вновь разложите по 1-й строке.

Решение. Разложим определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 83 & 2 & 0 \\ 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка вновь разложим по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-8 - 0) = 24.$$

Ответ: $\Delta = 24$.

Обратите внимание: если в определителе все элементы, стоящие

по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Задача 13. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и проверить выполнение условий $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам **транспонированной** матрицы!

Найдем произведения $A A^{-1}$ и $A^{-1} A$:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} + \frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} & \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

Задача 14. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$. Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу

$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит, $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 16. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}..$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Задача 17. При каких x, y, z матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$ является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание. Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение. Проверим невырожденность матрицы A :

$$\Delta_A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x+2y+3z \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix}$.

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x+3z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-\frac{4}{3}x \\ x-\frac{4}{3}x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: $x = -3, y = -3, z = 4$.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] / Протасов Ю.М. - М.: ФЛИНТА, 2017. - 168 с. - Режим доступа-

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html>

2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : матрицы и системы уравнений [Электронный ресурс] / Шерстов С.В. - М.: МИСиС, 2015. -17 с. – Режим доступа - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785876239709.html>

Дополнительные источники:

1. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
2. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.
3. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 2.

Решение систем линейных уравнений различными методами

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться решать системы линейных уравнений тремя методами: по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса

Студент должен:

знать: методы решения систем линейных уравнений: матричный, по правилу Крамера, метод Гаусса

уметь: решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Решить систему по правилу Крамера
$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание. Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x , Δ_y и Δ_z .

Решение. Главный определитель
$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$
 следовательно, система имеет

единственное решение. Найдем Δ_x , Δ_y и Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x , Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

$$\text{Отсюда } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x = 1, y = 4, z = 2$.

Задача 2. Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \text{ имеет бесконечно много решений.}$$

Указание. Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Решение. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$. Разложением по первой строке получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = \\ &= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = \\ &= (a - 1)^2(a + 2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.

Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.

Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.

$$1) \text{ При } a = 1 \text{ система имеет вид: } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \text{ и } \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.

$$2) \text{ При } a = -2 \text{ получаем систему } \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \text{ для которой}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{ Следовательно, при этом случае решений нет.}$$

Ответ: $a = 1$.

$$\textbf{Задача 3.} \text{ Решить систему с помощью обратной матрицы: } \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$$

Указание. Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

$$\textbf{Решение.} \text{ Составим матрицу системы: } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем матрицу A^{-1} :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -11 & A_{21} &= -25 & A_{31} &= 2 \\ A_{12} &= 9 & A_{22} &= -12 & A_{32} &= 3 \\ A_{13} &= -13 & A_{23} &= -11 & A_{33} &= 7 \end{aligned}$$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Если $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$ то исходная система превращается в матричное уравнение $AX = B,$

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

решение которого $X = A^{-1}B.$ Следовательно,

$$= -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 - 150 + 8 \\ 9 - 72 + 12 \\ -13 - 66 + 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3, y = 1, z = 1.$

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1.$

Задача 4. Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Указание. Для решения по правилу Крамера найдите определители $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z.$

Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение. 1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы: $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -12 + 18 + 10 \\ 42 - 15 + 5 \\ 66 - 3 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Задача 5. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание. Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение. Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -24y = 0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3, x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = 0, z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 6. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Указание. Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 .

Решение. Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] / Протасов Ю.М. - М.: ФЛИНТА, 2017. – 168 с. – Режим доступа-

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html>

2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : матрицы и системы уравнений [Электронный ресурс] / Шерстов С.В. - М.: МИСиС, 2015. -17 с. – Режим доступа -

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785876239709.html>

Дополнительные источники:

4. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
5. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.
6. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.

Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа

Тема 2.1. Функция

Практическое занятие № 3.

Решение задач по темам: «Свойства функции», «Способы задания функции», «Основные элементарные функции».

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: обобщение, систематизация, закрепление знаний о числовых функциях, простейших преобразованиях графиков функций; формирование умений по определению значений функции по значению аргумента, нахождению области определения функции, построению графиков функций, применению геометрических преобразований при построении графиков.

Студент должен:

знать:

- определение числовой функции, способы её задания;
- простейшие преобразования графиков функций.

уметь:

- находить область определения функции;
- определять значение функции по значению аргумента;
- строить графики изученных функций;
- применять геометрические преобразования (сдвиг и симметрию) при изучении графиков.

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Аргумент и функция. Область определения и область значения функции. Способы задания функции: табличный, графический, аналитический, словесный. Свойства функции: четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность. Основные элементарные функции, их свойства и графики

Методические указания

1. Ответьте на вопросы.

Контрольные вопросы:

1. Что называется числовой функцией, её областью определения и областью значений? Приведите примеры числовых функций.

2. Назовите способы задания функций.

3. Какие простейшие преобразования графиков функций вы знаете?

2. Прочитайте п.3, стр. 21 – 27. (Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2002. – 383с.).

3. Выполните задания : №№ 40 – 49(а,б).

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] / Протасов Ю.М. - М.: ФЛИНТА, 2017. – 168 с. – Режим доступа-

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html>

2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : матрицы и системы уравнений [Электронный ресурс] / Шерстов С.В. - М.: МИСиС, 2015. -17 с. – Режим доступа -

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785876239709.html>

Дополнительные источники:

1. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.

2. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

3. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
4. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2002. – 383с.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление

Тема 3.1 Производная функции

Практическое занятие № 4.

Решение задач по производным основных элементарных функций

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться находить производные функций и их значения в точке; находить производные сложных функций; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; исследовать функцию при помощи дифференциального исчисления

Студент должен:

знать: основные правила и формулы дифференцирования; правило нахождения производной сложной функции; основные правила и формулы дифференцирования; понятие дифференциала; правило отыскания экстремумов функции; правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

уметь: применять основные правила и формулы дифференцирования при решении задач; находить производные сложных функций; находить производные функций и их значения в точке; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; находить точки экстремумов функции и экстремумы функции; находить наибольшее и наименьшее значения функции

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Определение производной. Геометрический смысл производной. Механический смысл производной. Производные основных элементарных функций. Производные высших порядков.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить производную функции $y = 3 \sin x - 2 \ln x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной линейной комбинации функций.

Решение. $y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Ответ: $3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Задача 2. Вычислить производную функции $y = \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной произведения функций.

Решение. $y' = (\sqrt[5]{x})' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg} x}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y = \frac{x + e^x}{x \cos x}$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулы производных линейной комбинации и отношения функций.

Решение. $y' = \frac{(x + e^x)' x \cos x - (x + e^x)(x \cos x)'}{(x \cos x)^2} = \frac{(1 + e^x)x \cos x - (x + e^x)(\cos x - x \sin x)}{x^2 \cos^2 x}$

Ответ: $\frac{e^x \cos x(x-1) + (x + e^x)x \sin x}{x^2 \cos^2 x}$.

Задача 4. Вычислить производную функции $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

Решение.

$$y' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot (\ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot (3x^2 - 2)' = -\frac{\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot 6x}{3x^2 - 2}$$

Задача 5. Найти вторую производную от функции $y = \sqrt{3 - x^2}$

Указание. Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что $f''(x) = (f'(x))'$.

Решение. $y' = \left((3 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (3 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{3 - x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{\sqrt{3 - x^2}}}{3 - x^2} = -\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}$$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}$.

Задача 6. Найти вторую производную от функции $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ при $x = 1$.

Указание. Найдите вторую производную по формуле $f''(x) = (f'(x))'$, а затем вычислите ее значение при $x = 1$.

Решение. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (x + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)' = \left((1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}, \quad y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{(1 + 1^2)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 7. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x - 5)^7 + 4x - 7$.

Указание. Функция выпукла при условии $f''(x) < 0$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 5(x - 5)^6 + 4, \quad y'' = 20(x - 5)^5 < 0 \Rightarrow x < 5.$$

Ответ: $(-\infty, 5)$.

Задача 8. Найти интервалы вогнутости функции $y = \frac{x^2}{9} - \sqrt[3]{x-2}$.

Указание. Границами интервалов выпуклости и вогнутости могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

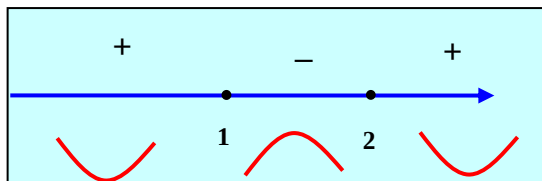
Представим вторую производную в виде:

$$y'' = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}} + 1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}} = -1, \quad x-2 = (-1)^{\frac{3}{5}} = -1, \quad x = 1.$$

Знак второй производной:



Следовательно, интервалы вогнутости: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Задача 9. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1+x^2)$.

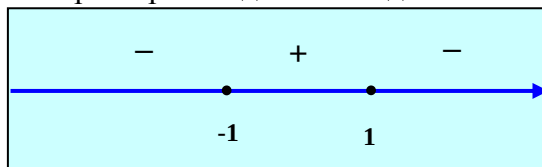
Указание. В точках перегиба вторая производная меняет знак, то есть требуется найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0, \quad x = \pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.



Значит, $x = \pm 1$ – точки перегиба.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 10. При каких значениях a и b точка $(-2, 0)$ служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2 + 5x - 6$?

Указание. Для определения a и b требуется решить систему $\begin{cases} y''(-2) = 0 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$.

Решение. $y' = 3ax^2 + 2bx + 5, \quad y'' = 6ax + 2b$.

Для того чтобы $(-2, 0)$ была точкой перегиба, нужно, чтобы $y''(-2) = 0$.

$$6a(-2) + 2b = 0, \quad b = 6a.$$

При этом точка $(-2, 0)$ лежит на кривой, то есть $y(-2) = 0$. Подставим в это равенство $b = 6a$:

$$-8a + 24a - 10 - 6 = 0, \quad 16a - 16 = 0, \quad a = 1, \quad b = 6.$$

Ответ: $a = 1, b = 6$.

Задача 11. Сколько асимптот имеет график функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad (|k| < \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b \quad (|b| < \infty).$$

Решение. Исследуем функцию на наличие асимптот разных видов.

1) $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода, поэтому прямые $x = \pm 1$ – горизонтальные асимптоты графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 < \infty.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика на обоих концах оси Ox . При этом наклонных асимптот у функции быть не может.

Итак, график имеет 3 асимптоты (две вертикальных и одну горизонтальную).

Ответ: 3.

Задача 12. Асимптоты какого вида имеет график функции $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Решение. 1) Точка разрыва функции: $x=0$. При этом

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t}}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{2t})'}{(t)'} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{2t}}{1} = \infty$$

Если хотя бы один из односторонних пределов в данной точке бесконечен, через точку проходит вертикальная асимптота. Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = \infty, \text{ следовательно, горизонтальных асимптот нет.}$$

$$3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 2 + 1 = 3$$

Значит, прямая $y = x + 3$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: график имеет вертикальную и наклонную асимптоту.

Задача 13. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 1$, где знаменатель дроби обращается в нуль.

2) График данной функции пересекает координатную ось Oy в точке $M_0(0, -2)$, т.к. $y = -2$ при $x = 0$.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox , необходимо решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$. Но данное уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, у графика данной функции нет точек пересечения с осью Ox .

3) Данная функция непрерывна во всей области своего определения. Для исследования функции на четность проверим выполнение условия $f(-x) = f(x)$; для исследования функции на нечетность проверим выполнение условия $f(-x) = -f(x)$. Имеем:

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то, следовательно, данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Исходная функция не периодична, т.к. $f(x+T) \neq f(x)$ для любого $T \neq 0$.

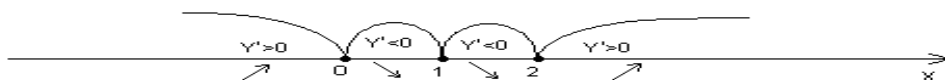
4) Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Определим стационарные точки. Для этого приравняем $y' = 0$. Получим:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Производная y' не существует в точке $x = 1$. Но точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Следовательно, стационарными точками данной функции являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Отметим все три точки на числовой оси:



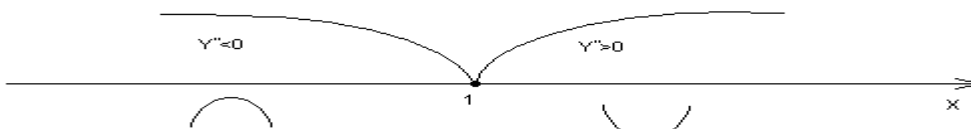
Определим знак производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить в производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке. Следовательно, исходная функция убывает на интервале $(0,1) \cup (1,2)$, возрастает на интервале $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (что показано на рисунке).

5) Так как производная меняет знак при переходе через стационарные точки, то эти точки являются точками экстремума. А именно, $x = 0$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума. Максимальное значение функции равно $y(0) = -2$, минимальное значение $y(2) = 2$.

6) Вычислим вторую производную данной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'(x - 1)^2 - (x^2 - 2x)[(x - 1)^2]'}{(x - 1)^4} = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, но y'' не существует при $x = 1$. Точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Отметим эту точку на числовой оси:



Определим знак второй производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить во вторую производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке.

Следовательно, график данной функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1, +\infty)$ (что показано на рисунке).

Так как вторая производная нигде не обращается в нуль и точка $x=1$, где y'' не существует, не принадлежит области определения данной функции, то у исходной функции нет точек перегиба.

7) Найдем предел данной функции при $x \rightarrow 1$ слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

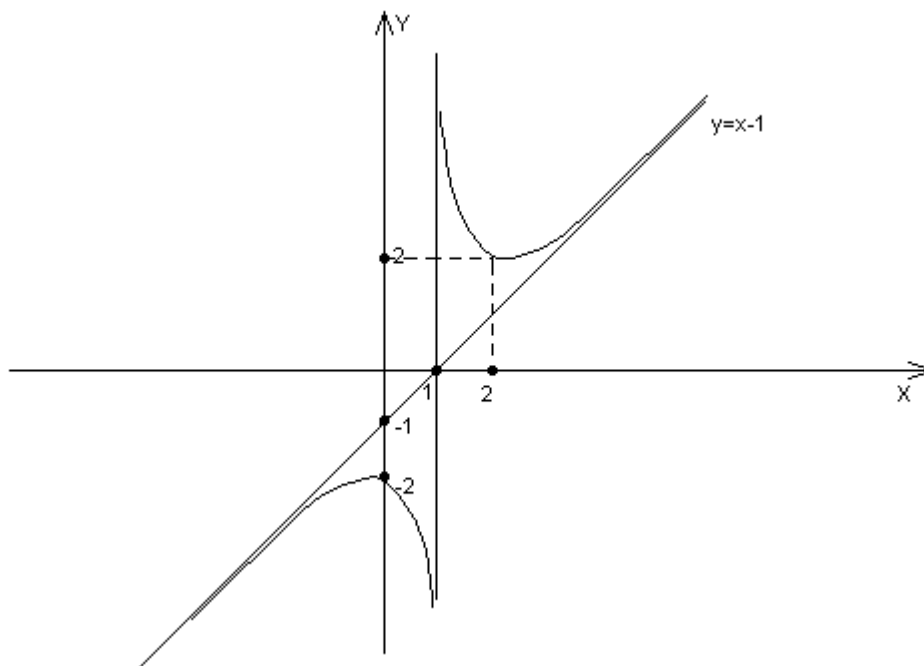
Для нахождения наклонной асимптоты вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x}{x - 1} = -1.$$

Следовательно, наклонная асимптота графика данной функции имеет вид $y = x - 1$.

8) Используя полученные данные, построим график исходной функции:



Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1 Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)

3. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
4. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление

Тема 3.2. Приложение производной

Практическое занятие № 5.

Нахождение производных. Составление уравнения касательной к графику функций. Исследование функций при помощи производных

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться находить производные функций и их значения в точке; находить производные сложных функций; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; исследовать функцию при помощи дифференциального исчисления

Студент должен:

знать: основные правила и формулы дифференцирования; правило нахождения производной сложной функции; основные правила и формулы дифференцирования; понятие дифференциала; правило отыскания экстремумов функции; правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

уметь: применять основные правила и формулы дифференцирования при решении задач; находить производные сложных функций; находить производные функций и их значения в точке; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; находить точки экстремумов функции и экстремумы функции; находить наибольшее и наименьшее значения функции

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Асимптоты. Исследование функций.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить производную функции $y = 3 \sin x - 2 \ln x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной линейной комбинации функций.

Решение. $y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Ответ: $3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Задача 2. Вычислить производную функции $y = \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной произведения функций.

Решение. $y' = (\sqrt[5]{x})' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg} x}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y = \frac{x + e^x}{x \cos x}$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулы производных линейной комбинации и отношения функций.

$$\text{Решение. } y' = \frac{(x + e^x)' \cos x - (x + e^x)(\cos x)'}{(x \cos x)^2} = \frac{(1 + e^x) \cos x - (x + e^x)(\cos x - x \sin x)}{x^2 \cos^2 x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^x \cos x(x-1) + (x+e^x)x \sin x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Задача 4. Вычислить производную функции $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

Решение.

$$y' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot (\ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot (3x^2 - 2)' = -\frac{\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot 6x}{3x^2 - 2}$$

Задача 5. Найти вторую производную от функции $y = \sqrt{3 - x^2}$

Указание. Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что $f''(x) = (f'(x))'$.

$$\text{Решение. } y' = \left((3 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (3 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$$

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{3 - x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{\sqrt{3 - x^2}}}{3 - x^2} = -\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}.$$

Задача 6. Найти вторую производную от функции $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ при $x = 1$.

Указание. Найдите вторую производную по формуле $f''(x) = (f'(x))'$, а затем вычислите ее значение при $x = 1$.

$$\text{Решение. } y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (x + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right)' = \left((1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}, \quad y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{(1 + 1^2)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 7. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x - 5)^7 + 4x - 7$.

Указание. Функция выпукла при условии $f''(x) < 0$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 5(x - 5)^4 + 4, \quad y'' = 20(x - 5) < 0 \Rightarrow x < 5.$$

Ответ: $(-\infty, 5)$.

Задача 8. Найти интервалы вогнутости функции $y = \frac{x^2}{9} - \sqrt[3]{x - 2}$.

Указание. Границами интервалов выпуклости и вогнутости могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

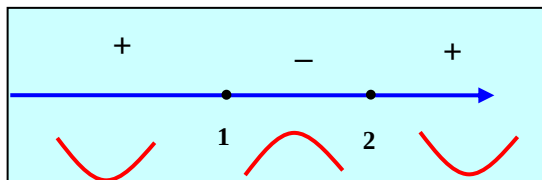
Представим вторую производную в виде:

$$y'' = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}} + 1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}} = -1, \quad x-2 = (-1)^{\frac{3}{5}} = -1, \quad x = 1.$$

Знак второй производной:



Следовательно, интервалы вогнутости: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Задача 9. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1+x^2)$.

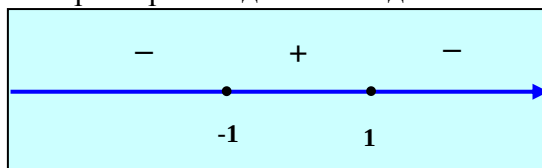
Указание. В точках перегиба вторая производная меняет знак, то есть требуется найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0, \quad x = \pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.



Значит, $x = \pm 1$ – точки перегиба.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 10. При каких значениях a и b точка $(-2, 0)$ служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2 + 5x - 6$?

Указание. Для определения a и b требуется решить систему $\begin{cases} y''(-2) = 0 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$.

Решение. $y' = 3ax^2 + 2bx + 5, \quad y'' = 6ax + 2b$.

Для того чтобы $(-2, 0)$ была точкой перегиба, нужно, чтобы $y''(-2) = 0$.

$$6a(-2) + 2b = 0, \quad b = 6a.$$

При этом точка $(-2, 0)$ лежит на кривой, то есть $y(-2) = 0$. Подставим в это равенство $b = 6a$:

$$-8a + 24a - 10 - 6 = 0, \quad 16a - 16 = 0, \quad a = 1, \quad b = 6.$$

Ответ: $a = 1, b = 6$.

Задача 11. Сколько асимптот имеет график функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad (|k| < \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b \quad (|b| < \infty).$$

Решение. Исследуем функцию на наличие асимптот разных видов.

1) $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода, поэтому прямые $x = \pm 1$ – горизонтальные асимптоты графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 < \infty.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика на обоих концах оси Ox . При этом наклонных асимптот у функции быть не может.

Итак, график имеет 3 асимптоты (две вертикальных и одну горизонтальную).

Ответ: 3.

Задача 12. Асимптоты какого вида имеет график функции $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Решение. 1) Точка разрыва функции: $x=0$. При этом

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t}}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{2t})'}{(t)'} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{2t}}{1} = \infty$$

Если хотя бы один из односторонних пределов в данной точке бесконечен, через точку проходит вертикальная асимптота. Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = \infty, \text{ следовательно, горизонтальных асимптот нет.}$$

$$3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 2 + 1 = 3$$

Значит, прямая $y = x + 3$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: график имеет вертикальную и наклонную асимптоту.

Задача 13. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x=1$, где знаменатель дроби обращается в нуль.

2) График данной функции пересекает координатную ось Oy в точке $M_0(0, -2)$, т.к. $y = -2$ при $x = 0$.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox , необходимо решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$. Но данное уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, у графика данной функции нет точек пересечения с осью Ox .

3) Данная функция непрерывна во всей области своего определения. Для исследования функции на четность проверим выполнение условия $f(-x) = f(x)$; для исследования функции на нечетность проверим выполнение условия $f(-x) = -f(x)$. Имеем:

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то, следовательно, данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Исходная функция не периодична, т.к. $f(x+T) \neq f(x)$ для любого $T \neq 0$.

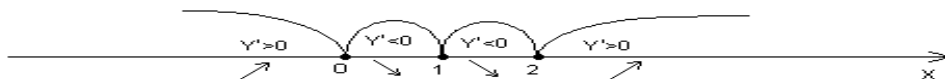
4) Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Определим стационарные точки. Для этого приравняем $y' = 0$. Получим:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Производная y' не существует в точке $x = 1$. Но точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Следовательно, стационарными точками данной функции являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Отметим все три точки на числовой оси:



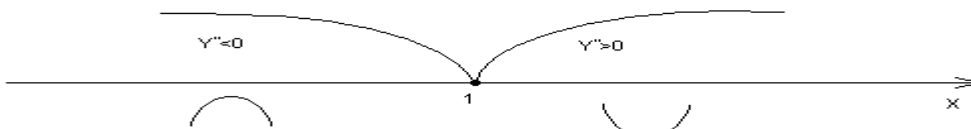
Определим знак производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить в производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке. Следовательно, исходная функция убывает на интервале $(0, 1) \cup (1, 2)$, возрастает на интервале $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (что показано на рисунке).

5) Так как производная меняет знак при переходе через стационарные точки, то эти точки являются точками экстремума. А именно, $x = 0$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума. Максимальное значение функции равно $y(0) = -2$, минимальное значение $y(2) = 2$.

6) Вычислим вторую производную данной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'(x - 1)^2 - (x^2 - 2x)[(x - 1)^2]'}{(x - 1)^4} = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, но y'' не существует при $x = 1$. Точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Отметим эту точку на числовой оси:



Определим знак второй производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить во вторую производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке.

Следовательно, график данной функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1, +\infty)$ (что показано на рисунке).

Так как вторая производная нигде не обращается в нуль и точка $x=1$, где y'' не существует, не принадлежит области определения данной функции, то у исходной функции нет точек перегиба.

а. Найдем предел данной функции при $x \rightarrow 1$ слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

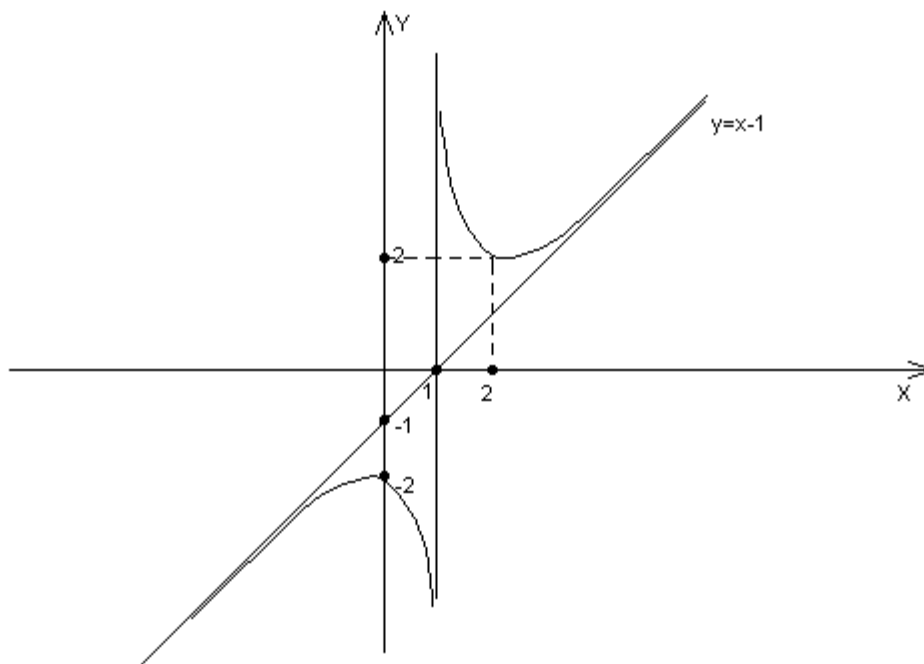
Для нахождения наклонной асимптоты вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x}{x - 1} = -1.$$

Следовательно, наклонная асимптота графика данной функции имеет вид $y = x - 1$.

8) Используя полученные данные, построим график исходной функции:



Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1 Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

5. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
6. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)
7. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
8. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

Раздел 4. Интегральное исчисление

Тема 4.1. Неопределённый интеграл

Практическое занятие № 6.

Вычисление неопределённых интегралов

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться вычислять интегралы с использованием их свойств и таблицы интегралов; выполнять линейную замену переменной в неопределённом интеграле, интегрировать по частям; находить интегралы от дробно-рациональных функций

Студент должен:

знать: определение неопределённого интеграла, табличные интегралы, свойства интеграла; метод замены переменной в неопределённом интеграле, формулу интегрирования по частям; приёмы интегрирования дробно-рациональных функций

уметь: находить табличные интегралы, вычислять интегралы с использованием их свойств и таблицы интегралов; выполнять линейную замену переменной в неопределённом интеграле, интегрировать по частям; интегрировать дробно-рациональные функции

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Первообразная и интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить интеграл $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$

Указание. Представьте слагаемые в виде степеней: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ и т.д.

Решение.
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x} + C$$

Ответ: $2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - x3^x + 5}{x} dx$.

Указание. Разделите на знаменатель каждое слагаемое числителя по отдельности и найдите первообразные полученных функций.

Решение.
$$\int \frac{x^3 - x3^x + 5}{x} dx = \int \left(x^2 - 3^x + \frac{5}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 5\ln|x| + C$$

Ответ: $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 5\ln|x| + C$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)} dx$.

Указание. Раскройте скобки в числителе и сгруппируйте слагаемые так, чтобы каждое из них имело один общий множитель со знаменателем.

Решение.
$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)} dx &= \int \frac{x^2 - 6x + 9}{x(x^2+9)} dx = \int \frac{(x^2+9) - 6x}{x(x^2+9)} dx = \int \left(\frac{(x^2+9)}{x(x^2+9)} - \frac{6x}{x(x^2+9)} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - 6 \cdot \frac{1}{(x^2+9)} \right) dx = \ln|x| - 6 \cdot \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C = \ln|x| - 2\arctg \frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\ln|x| - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int \frac{3-2\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулами $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Решение.
$$\int \frac{3-2\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{5\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$$
$$\int \left(\frac{5\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 5\tg x - \operatorname{ctg} x + C$$

Ответ: $5\tg x - \operatorname{ctg} x + C$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{2-\sqrt{x}} dx$

Указание. Сделайте замену: $t = \sqrt{x}$

Решение.

$$\int \frac{1}{2-\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{2-t} = -2 \int \frac{t-2+2}{t-2} dt = -2 \int \left(1 + \frac{2}{t-2} \right) dt = -2(t + 2\ln|t-2|) + C =$$
$$= -2(\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-2|) + C = -2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}-2| + C$$

Ответ: $-2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}-2| + C$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.

Решение.
$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \arcsin^4 x + C$$

Ответ: $\frac{1}{4} \arcsin^4 x + C$

Задача 7. Вычислить интеграл $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{2x^5-3} dx$.

Указание. Сделайте замену: $t = 2x^5-3$.

Решение.

$$\int x^4 \cdot \sqrt[3]{2x^5-3} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{2x^5-3} \\ t^3 = 2x^5-3 \\ 3t^2 dt = 10x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{3}{10} t^2 dt \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{3}{10} t^2 dt = \frac{3}{10} \int t^3 dt = \frac{3}{10} \frac{t^4}{4} + C = \frac{3(2x^5-3)^{\frac{4}{3}}}{40} + C$$

Ответ: $\frac{3}{40} (2x^5-3)^{\frac{4}{3}} + C$.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int (3x-2)\cos 4x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям, $u = 3x-2$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int (3x-2)\cos 4x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x-2 & dv = \cos 4x dx \\ du = 3dx & v = \frac{1}{4}\sin 4x \end{array} \right| = (3x-2) \cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{3}{4} \int \sin 4x dx =$$

$$= (3x-2) \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{3}{16}\cos 4x + C$$

Ответ: $(3x-2) \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{3}{16}\cos 4x + C$

Задача 9. Вычислить интеграл $\int x \arctg x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям, $u = \arctg x$

Решение.

$$\int x \arctg x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \arctg x) + C = \frac{(1+x^2)\arctg x - x}{2} + C$$

Ответ: $= \frac{(1+x^2)\arctg x - x}{2} + C$

Задача 10. Вычислить интеграл $\int \frac{3x-19}{x^2-x-6} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение. $\frac{3x-19}{x^2-x-6} = \frac{3x-19}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)}$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A+2B=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x-19}{x^2-x-6} dx = \int \left(\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-3} \right) dx = 5\ln|x+2| - 2\ln|x-3| + C$$

Ответ: $5\ln|x+2| - 2\ln|x-3| + C$

Задача 11. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение. $\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} =$

$$= \frac{Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx}{x(x-1)^3}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B+C=-3 \\ 3A+B-C+D=2 \\ -A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} \right) dx = 2\ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Ответ: $2\ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

Задача 12. Вычислить интеграл $\int \frac{3}{x^3+8} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение.

$$\frac{3}{x^3+8} = \frac{3}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx+C}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{16} \\ B=-\frac{1}{16} \\ C=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^3+8} dx &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{x-4}{x^2-2x+4} \right) dx = \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{(x-1)-3}{(x-1)^2+3} dx = \left| \frac{x-1=t}{dx=dt} \right| = \\ &= \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{t-3}{t^2+3} dt = \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{t}{t^2+3} dt + \frac{1}{16} \int \frac{3}{t^2+3} dt = \\ &= \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{8} \ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{8} \ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$

Задача 13. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

Указание. Подынтегральная функция – неправильная дробь, поэтому вначале выделите ее целую часть, а затем разложите оставшуюся правильную дробь в сумму простейших.

Решение. $\frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} = x - \frac{5x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$$\frac{5x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Cx+D}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=5 \\ B+D=0 \\ 4A+C=4 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=D=0 \\ C=\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \left(x + \frac{1}{3} \frac{x}{x^2+1} - \frac{8}{3} \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{8}{3} \ln(x^2+4) + C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{8}{3} \ln(x^2+4) + C$

Задача 14. $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$

Указание. Разложите дробь в сумму простейших.

Решение. Подынтегральной функцией является правильная дробь, разложение которой в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x , что приведет к линейной системе относительно A, B, C, D, E :

$$x^4: A + B = 0$$

$$x^3: -2B + C = 0$$

$$x^2: 2A + B - 2C + D = 2$$

$$x: -2B + C - 2D + E = 2$$

$$x^0: A - 2C - 2E = 13.$$

Отсюда $A = 1, B = -1, C = -2, D = -3, E = -4$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right) dx, \text{ где}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln |x-2| + C_1,$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x + C_2,$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} +$$

$$+ 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x \right) + C_3. \text{ Таким образом, окончательный результат имеет вид:}$$

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \ln |x-2| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{4x-3}{2(x^2+1)} + 4 \arctg x + C.$$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1 Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)
3. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
4. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

Раздел 4. Интегральное исчисление

Тема 4.2. Определённый интеграл

Практическое занятие № 7.

Вычисление определенных интегралов, площади фигуры при помощи определенного интеграла, нахождение длины пути по данной скорости.

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: формулу Ньютона-Лейбница; свойства определенного интеграла; геометрический смысл определенного интеграла; физические приложения определенного интеграла

уметь: применять формулу Ньютона – Лейбница; применять свойства определенного интеграла при вычислениях; вычислять площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла; находить длину пути по данной скорости

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона- Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение. $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx = \int_9^{16} \left(x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_9^{16} = 2 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - \left(9^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} \right) \right) = 76$

Ответ: 76.

Задача 2. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \right) dx = (-\operatorname{ctgx} - 2x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулой замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\text{Решение. } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 4 \quad t = 2 \\ x = 9 \quad t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t}{t-1} \cdot 2tdt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1)dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 7 + 2 \ln 2$$

Ответ: $7 + 2 \ln 2$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, разложив ее в сумму простейших дробей, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = (\ln|x+2| + 2 \ln|x+3|) \Big|_1^5 = \ln 7 + 2 \ln 8 - \ln 3 - 2 \ln 4 = \ln \frac{28}{3}$$

Ответ: $\ln \frac{28}{3}$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 9x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18} \sin \frac{9\pi}{2} - 0 = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, представив числитель дроби как разность квадратов, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 (\sqrt{x}-1) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right) \Big|_4^9 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \left(\frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - 4 \right) = \frac{23}{3}.$$

Ответ: $\frac{23}{3}$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

Указание. Сделайте замену $t = \sqrt{1+\ln x}$

$$\text{Решение. } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{1+\ln x} \\ t^2 = 1+\ln x \\ 2t dt = \frac{dx}{x} \\ x=1 \quad t=1 \\ x=e^3 \quad t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2t dt}{t} = 2t \Big|_1^2 = 2(2-1) = 2$$

Ответ: 2.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^3 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^3 \quad dv = \cos x dx \\ du = 3x^2 dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = x^3 \sin x \Big|_0^{\pi} - 3 \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= \pi^3 \sin \pi - 3 \left((-x^2 \cos x) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos x dx \\ du = dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = 3\pi^2 \cos \pi - 6 \left((x \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) = \\ &= -3\pi^2 - 6 \cos x \Big|_0^{\pi} = -3\pi^2 - 6 \cos \pi + 6 \cos 0 = 12 - 3\pi^2 \end{aligned}$$

Ответ: $12 - 3\pi^2$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = (e-1) \ln e - 0 - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1 dx}{x+1} = \\ &= e-1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = e-1 - (x - \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} = e-1 - (e-1-1) = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

Задача 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$

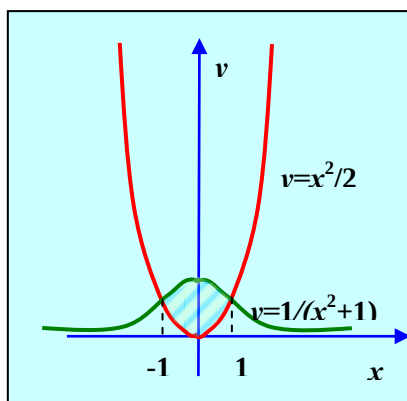
Указание. Постройте графики функций, ограничивающие фигуру, и найдите абсциссы точек

их пересечения. Затем вычислите площадь фигуры по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$, где

$f_1(x)$ — функция, график которой является нижней границей фигуры, а $f_2(x)$ — функция, задающая верхнюю границу.

Решение. $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ — найдены пределы интегрирования.

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1 Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)
3. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
4. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

Раздел 5. Комплексные числа

Тема 5.1. Комплексные числа

Практическое занятие № 8.

Решение задачи по темам «Арифметические операции над комплексными числами», «Модуль и аргументы комплексного числа»

Объем времени: 4 часа.

Цель практического занятия: научиться выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Студент должен:

знать: определение комплексного числа; понятие сопряженных комплексных чисел; понятие модуля комплексного числа; правила выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме; формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической форме комплексного числа; правила выполнения действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

уметь: записывать число, сопряженное заданному комплексному числу; вычислять модуль комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами в

алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Определение комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Задана комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1+i$; г) $z_4 = -1+2i$; д) $z_5 = -1-i\sqrt{3}$; е) $z_6 = 2-i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение. а) имеем (см. рис. 1) $r = 1$; $\varphi = \pi$,

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

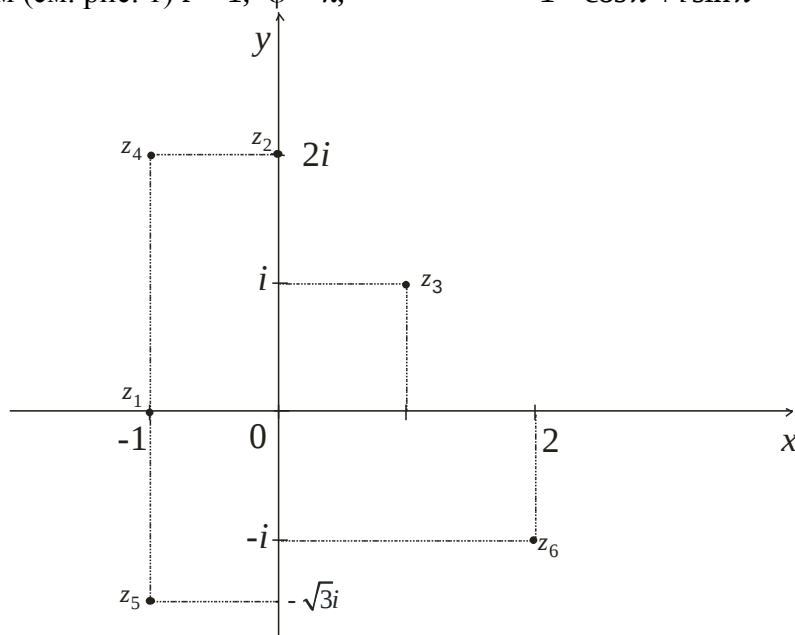


рис. 1

б) имеем (см. рис. 1) $r = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$;

в) имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$; согласно рис. 1 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так что $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$;

г) имеем $r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2$; согласно рис. 1, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} 2$, так что $-1+2i = \sqrt{5}e^{i(\pi - \operatorname{arctg} 2)}$;

д) имеет $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$, согласно рис. 1, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, так что $-1-i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$;

е) имеем $r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2}$, согласно рис. 1, точка z_6 принадлежит четвертому

квадранту, поэтому $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $2-i = \sqrt{5}e^{i\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$.

Задача 2. Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

Решение. а)

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1;$$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$1. \text{ При } k = 0: \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2. \text{ При } k = 1: \quad z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$3. \text{ При } k = 2: \quad z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$1. \text{ При } k = 0: \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$2. \text{ При } k = 1: \quad z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right);$$

$$3. \text{ При } k = 2: \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

$$4. \text{ При } k = 3: \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Задача 3. Представить в алгебраической форме $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^9$

Решение Пусть $z_1 = 1-i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$. Имеем $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = -1$; точка z_1 принадлежит четвертому квадранту, поэтому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^9 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^9 \left[\cos 9(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin 9(\varphi_1 - \varphi_2) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 \left[\cos \frac{57}{4}\pi + i \sin \frac{57}{4}\pi \right] = \frac{1+i}{32}$$

Задача 4 Дано комплексное число $z_0 = \frac{2}{1+i}$. Требуется:

1) записать данное число в алгебраической и тригонометрической формах;

2) найти все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$.

Решение. 1) Приведем комплексное число z_0 к алгебраической форме: $z_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$.

Для этого умножим числитель и знаменатель дроби z_0 на число $1-i$, комплексно-сопряженное знаменателю. Получим:

$$z_0 = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1-i.$$

Это и есть алгебраическая форма комплексного числа z_0 , где $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -1$.

Теперь приведем комплексное число $z_0 = 1-i$ к тригонометрическому виду: $z_0 = \rho_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, где ρ_0 - модуль комплексного числа z_0 , φ_0 - аргумент этого числа.

Для этого найдем $\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} = \sqrt{2}$. Для нахождения φ_0 имеем систему:
$$\begin{cases} \alpha_0 = \rho_0 \cos \varphi_0 \\ \beta_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \varphi_0 \\ -1 = \sqrt{2} \sin \varphi_0 \end{cases}$ и тогда $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма

комплексного числа z_0 имеет вид: $z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$.

3) Найдем теперь все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$, откуда $z = \sqrt[3]{-z_0}$. Тригонометрическая форма комплексного числа $-z_0$ имеет вид: $-z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$.

По второй из формул Муавра получаем: $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right),$

где $k = 0, 1, 2$.

Тогда корни уравнения имеют вид:

$$5. \quad \text{При } k = 0: \quad z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$6. \quad \text{При } k = 1: \quad z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$7. \quad \text{При } k = 2: \quad z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Задача 5. Для комплексных чисел $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$ найти число, комплексно сопряженное числу $z_1 + z_2$.

Указание. $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i;$

$z = a + b i \Rightarrow \bar{z} = a - b i$

Решение. $z_1 + z_2 = (3+5) + (-2+3)i = 8+i, \quad \overline{(z_1 + z_2)} = 8-i$

Ответ: $8-i$.

Задача 6. Для комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$ найти $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби $\frac{4-i}{3+4i}$ на выражение, сопряженное знаменателю.

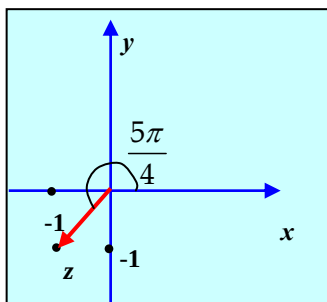
Решение. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-i}{3+4i} = \frac{(4-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-19i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{12-19i-4}{9+16} = \frac{8-19i}{25} = 0,32 - 0,76i$

Ответ: $0,32 - 0,76i$.

Задача 7. Найти аргумент комплексного числа $z = -1 - i$.

Указание. Найдите угол, образованный вектором $(-1, -1)$ и положительным направлением оси абсцисс.

Решение.



Вектор $(-1, -1)$ образует с осью Ox угол $\frac{5\pi}{4}$, который является аргументом числа $-1 - i$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 8. Найти модуль числа $z_1 z_2 + z_3$, если $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 + 5i$.

Указание. Найдите действительную и мнимую части числа $z_1 z_2 + z_3$ и воспользуйтесь формулой $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Решение.

$$z_1 z_2 = (1 - 5i)(2 + i) = 2 - 9i - 5i^2 = 7 - 9i; \quad z_1 z_2 + z_3 = (7 - 4) + (-9 + 5)i = 3 + 4i;$$

$$|z_1 z_2 + z_3| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Ответ: 5.

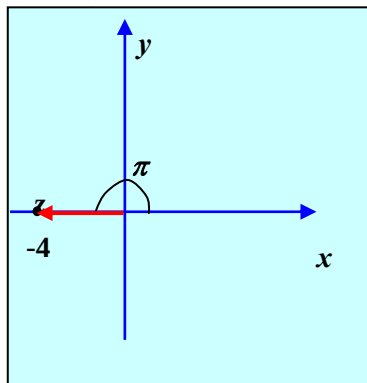
Задача 9. Записать в тригонометрической форме число -4.

Указание. Рассмотрите на плоскости вектор $(-4, 0)$.

Решение. $a = -4, \quad b = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 0} = 4;$

$$\arg z = \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin \varphi = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Второй способ решения задачи: Задачу можно решить, исходя из геометрических соображений: модуль вектора $(-4; 0)$ равен 4, а угол, который он образует с осью Ox , равен π . Следовательно, $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.



Ответ: $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Задача 10. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^{20}$

Указание. Представьте данное число в тригонометрической форме.

Решение. $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$

$$(\sqrt{3}-i)^{20} = 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{20\pi}{6}\right)\right) = 2^{20}\left(\cos\left(-4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{20}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{19}(-1+\sqrt{3}i)$$

Ответ: $2^{19}(-1+\sqrt{3}i)$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)
3. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
4. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 6.1. Теория вероятностей

Практическое занятие № 9.

Вычисление вероятностей случайных событий

Объем времени: 2 часа.

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: классическое определение вероятности; теоремы умножения и сложения вероятностей

уметь: находить вероятность события, пользуясь классическим определением вероятности; применять теоремы умножения и сложения вероятностей

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Случайные события и их вероятность. Формулы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байеса. Случайная величина и ее закон распределения, основные характеристики распределения случайных величин.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Из колоды в 32 карты вынуто последовательно без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что обе они — тузы.

Решение. Так как первую карту можно извлечь из колоды 32 способами, а вторую — 31 (поскольку в колоде осталась 31 карта), то число возможных исходов опыта $n = 32 \cdot 31 = 992$. Определим число благоприятных исходов. Первый туз можно выбрать из четырех, имеющих в колоде, второй — из трех оставшихся. Значит, число благоприятных исходов $m = 4 \cdot 3 = 12$, и искомая вероятность равна $p = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0,012$.

Задача 2. Из коробки, в которой лежат пять пирожных «эклер» и семь — «наполеон», достали пять пирожных. Найти вероятность того, что среди них два «эклера» и три «наполеона».

Решение. Количество возможных исходов опыта представляет собой число сочетаний из 12 по 5 $n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{7!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{5!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$.

Число благоприятных исходов является произведением количества способов, которыми можно выбрать два «эклера» из пяти имеющихся, и числа наборов по три «наполеона» из семи $m = C_5^2 \cdot C_7^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 10 \cdot 35 = 350$.

Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{350}{792} \approx 0,442$.

Задача 3. Из коробки, в которой лежат 6 красных и 5 синих карандашей, случайным образом извлечены 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они красные.

Указание. Число возможных исходов опыта — число сочетаний из 11 (общее число карандашей в коробке) по 3, а число благоприятных исходов — число сочетаний из 6 (количество карандашей нужного цвета) по 3.

Решение. $n = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$,
 $m = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$, $p = \frac{m}{n} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$.

Задача 4. Из 10 служащих туристического агентства 7 знают французский язык. Какова вероятность того, что среди трех человек, находящихся в данный момент в офисе, французским владеют двое?

Указание. Число благоприятных исходов — это произведение количества способов, которыми можно выбрать двух человек, знающих французский язык, из семи, и способов, которыми можно выбрать одного человека, не знающего этого языка, из оставшихся трех.

Решение. $n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$,
 $m = C_7^2 \cdot C_3^1 = \frac{7!}{2!5!} \cdot 3 = 63$, $p = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$.

Задача 5. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\bar{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынута 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле для числа сочетаний $n = C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$, а множество исходов, благоприятных событию $\bar{A}$ — это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных $m_{\bar{A}} = C_6^5 = 6$. Тогда $p(\bar{A}) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$, а

$$p(A) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}.$$

Задача 6. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания равны соответственно 0,6 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

A — оба попали в цель;

B — в цель попал хотя бы один.

Решение. Назовем событиями C и D попадание в мишень соответственно первого и второго стрелка и отметим, что C и D являются событиями совместными, но независимыми (иными словами, в мишень могут попасть оба стрелка, а вероятность попадания каждого не зависит от результата другого). Событие A представляет собой произведение событий C и D , поэтому $P(A) = P(C) \cdot P(D) = 0,6 \cdot 0,9 = 0,54$. Событие B является суммой C и D ; для определения его вероятности воспользуемся общим видом теоремы сложения $P(B) = P(C + D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96$.

Задача 7. Из полного набора костей домино наудачу извлекаются три кости. Найти вероятность того, что все они — дубли.

Указание. Примените теорему умножения для зависимых событий.

Решение. Будем считать, что кости извлекаются по одной. Событием A назовем извлечение дубля в первый раз, событием B — извлечение второго дубля, событием C — третьего. Эти события являются зависимыми, так как после извлечения каждой очередной кости изменяется и число оставшихся костей (28, затем 27, затем 26), и количество дублей среди них (7, затем 6, затем 5).

Нам требуется найти вероятность произведения ABC .

$$p(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}; \quad p_A(B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}; \quad p_{AB}(C) = \frac{5}{26};$$

$$p(ABC) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{26} = \frac{5}{468}.$$

Задача 8. В первой урне находится 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй соответственно 10, 8 и 6. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что они одного цвета (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Примените теорему сложения для трех несовместных событий: A — извлечены белые шары, B — черные, C — красные.

Решение. Событие, вероятность которого требуется определить, представляет собой сумму для трех несовместных событий: A — извлечены белые шары, B — черные, C — красные. Каждое из них, в свою очередь, является произведением двух независимых событий: извлечение шара нужного цвета из первой и второй урны. Применим теорему умножения для независимых событий и теорему сложения для несовместных событий:

$$p(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} = \frac{25}{288}; \quad p(B) = \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} = \frac{11}{72};$$

$$p(C) = \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{1}{12};$$

$$p(A + B + C) = \frac{25}{288} + \frac{11}{72} + \frac{1}{12} = \frac{31}{96} \approx 0,323.$$

Задача 9. Найти вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросках игральной кости (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Найдите вначале вероятность события, противоположного данному.

Решение. Событие, противоположное данному, заключается в том, что при четырех бросках шестерка не выпала ни разу. Найдём его вероятность, используя теорему умножения для независимых событий

$$p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}; \quad p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{671}{1296} \approx 0,518.$$

Задача 10. В трех одинаковых урнах лежат шары: в первой — 5 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 6 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный. Из случайно выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать гипотезами выбор одной из урн. Поскольку урны одинаковы, каждую из них можно выбрать с одинаковой вероятностью, а так как сумма вероятностей гипотез равна 1, то вероятность каждой гипотезы — $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условная вероятность события A , то есть извлечения белого шара из урны, определяется по классическому определению вероятности (количеством благоприятных исходов при этом является число белых шаров, а числом возможных исходов — общее число шаров в урне). Поэтому $P(A|H_1) = 5/8$, $P(A|H_2) = 2/8 = 1/4$, $P(A|H_3) = 3/4$.

Используя формулу полной вероятности, получаем $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{24} \approx 0,542$.

Задача 11. В студенческой группе 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 — на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

Решение. Будем считать гипотезой H_1 то, что данный студент является отличником, H_2 — что он принадлежит ко второй группе, H_3 — к третьей. Тогда вероятности гипотез равны $P(H_1) = 5/20 = 0,25$, $P(H_2) = 8/20 = 0,4$, $P(H_3) = 7/20 = 0,35$.

Найдем условную вероятность события A — правильного ответа на первый вопрос — при осуществлении каждой гипотезы $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 0,7$, $P(A|H_3) = 0,5$.

Следовательно, полная вероятность события A равна

$$P(A) = 0,25 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 0,5 = 0,705.$$

Применяя формулу Байеса, находим $P(H_1|A) = \frac{0,25 \cdot 1}{0,705} = \frac{50}{141} \approx 0,355$.

Задача 12. Победу в волейбольном матче одерживает команда, выигравшая 3 партии. Найти вероятность того, что матч между командами, для которых вероятность выигрыша каждой партии равна соответственно 0,8 и 0,2, будет состоять из 5 партий.

Решение. Для того, чтобы потребовалось играть пятую партию, нужно, чтобы после четырех партий счет в матче был 2 : 2. Следовательно, каждая из команд должна выиграть любые две партии из четырех. Если $p = 0,8$ есть вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, а $q = 0,2$ — вероятность ее проигрыша, то, применяя формулу Бернулли, найдем,

$$\text{что } P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,64 \cdot 0,04 = 0,1536.$$

Задача 13. В первой урне 4 белых шара и 6 черных, во второй 1 белый и 9 черных, в третьей 10 черных шаров. Из наудачу выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Указание. Используйте формулу полной вероятности, считая гипотезами выбор урны (все три гипотезы равновероятны).

Решение. Пусть событие A — извлечение белого шара, гипотезы H_1 , H_2 , H_3 — выбор соответствующей урны. Тогда

$$\begin{aligned} p(H_1) &= p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}, \\ p_{H_1}(A) &= \frac{4}{10}, \quad p_{H_2}(A) = \frac{1}{10}, \quad p_{H_3}(A) = \frac{0}{10} = 0, \\ p(A) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Задача 14. В ящике 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Используйте формулу полной вероятности, задавая четыре гипотезы по количеству новых мячей среди трех, выбранных для первой игры.

Решение. Пусть событие A — выбор для второй игры трех новых мячей.

Зададим пространство гипотез следующим образом:

H_1 – все мячи, взятые для первой игры, старые (тогда после первой игры в ящике по-прежнему 9 новых мячей);

H_2 – среди мячей, взятых для первой игры, один новый (тогда после первой игры новых мячей осталось 8);

H_3 – среди мячей, взятых для первой игры, два новых (для второй игры остается 7 новых);

H_4 – все мячи, взятые для первой игры, новые (для второй игры остается 6 новых).

Найдем вероятности гипотез, используя классическое определение вероятности и формулу для числа сочетаний:

$$p(H_1) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{20}{455} = \frac{4}{91}; \quad p(H_2) = \frac{C_6^2 \cdot C_9^1}{C_{15}^3} = \frac{15 \cdot 9}{455} = \frac{27}{91};$$

$$p(H_3) = \frac{C_6^1 \cdot C_9^2}{C_{15}^3} = \frac{6 \cdot 36}{455} = \frac{216}{455}; \quad p(H_4) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}.$$

Аналогичным образом, учитывая изменение количества новых мячей перед второй игрой в зависимости от выбора гипотезы, найдем условную вероятность события A при реализации каждой гипотезы:

$$p_{H_1}(A) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{12}{65}, \quad p_{H_2}(A) = \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{56}{455} = \frac{8}{65},$$

$$p_{H_3}(A) = \frac{C_7^3}{C_{15}^3} = \frac{35}{455} = \frac{1}{13}, \quad p_{H_4}(A) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{91}.$$

Теперь можно найти полную вероятность события A :

$$p(A) = \frac{4}{91} \cdot \frac{12}{65} + \frac{27}{91} \cdot \frac{8}{65} + \frac{216}{455} \cdot \frac{1}{13} + \frac{12}{65} \cdot \frac{4}{91} =$$

$$= \frac{528}{5915} \approx 0,089.$$

Задача 15. На двух станках изготавливаются одинаковые детали. Вероятность брака для детали, изготовленной на первом станке, равна 0,02, на втором – 0,05. Из ящика, в котором находятся 20 деталей, изготовленных на первом станке, и 30, изготовленных на втором, случайно выбрана деталь, которая после проверки оказалась доброкачественной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Указание. Примените формулу Байеса, выбрав в качестве гипотез изготовление детали на первом или втором станке. Тогда требуется, зная результат опыта, переоценить вероятность гипотезы H_2 .

Решение. Пусть гипотеза H_1 – деталь изготовлена на первом станке, H_2 – на втором, событие A – выбранная деталь доброкачественная. Найдем полную вероятность события A :

$$p(H_1) = \frac{20}{50} = 0,4, \quad p(H_2) = \frac{30}{50} = 0,6,$$

$$p_{H_1}(A) = 1 - 0,02 = 0,98, \quad p_{H_2}(A) = 1 - 0,05 = 0,95,$$

$$p(A) = 0,4 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,962.$$

Применяя формулу Байеса, найдем вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A произошло $p_A(H_2) = \frac{0,6 \cdot 0,95}{0,962} = \frac{285}{481} \approx 0,593$.

Задача 16. В некоторой местности 20% дней в году – дождливые и 80% – солнечные. Прогноз погоды дают два предсказателя. Первый ошибается в 30% случаев, второй – в 10%. Первый утверждает, что завтра будет солнце, второй – что дождь. Чей прогноз сбудется с большей вероятностью?

Указание. Примените формулу Байеса, считая гипотезами солнечную или дождливую погоду на завтрашний день, а событием A – выданные прогнозы.

Решение. Пусть гипотеза H_1 заключается в том, что в выбранный день будет солнечная погода, а гипотеза H_2 – дождливая. Тогда при реализации первой гипотезы прогноз первого

предсказателя верен, а второго – ошибочен, а при реализации второй гипотезы – наоборот. Найдем полную вероятность события A (выдачи соответствующих прогнозов):

$$\begin{aligned} p(H_1) &= 0,8, \quad p(H_2) = 0,2, \\ p_{H_1}(A) &= 0,7 \cdot 0,1 = 0,07, \quad p_{H_2}(A) = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27, \\ p(A) &= 0,8 \cdot 0,07 + 0,2 \cdot 0,27 = 0,11. \end{aligned}$$

Итак, вероятность получения именно таких взаимоисключающих прогнозов равна 0,11. Переоценим вероятность первой гипотезы, зная, что событие A произошло. Если она окажется больше 0,5, то с большей вероятностью сбудется прогноз первого предсказателя, если меньше 0,5 – прогноз второго. $p_A(H_1) = \frac{0,8 \cdot 0,07}{0,11} = \frac{56}{110} > \frac{1}{2}$ – более вероятно, что

сбудется прогноз первого предсказателя.

Ответ: прогноз первого.

Задача 17. Найти вероятность выпадения 2-х шестерок при 5 бросках игральной кости.

Указание. Воспользуйтесь формулой Бернулли.

Решение.

$$\begin{aligned} n &= 5, \quad k = 2, \quad p = \frac{1}{6}, \quad q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \\ p_5(2) &= C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{625}{3888} \approx 0,161. \end{aligned}$$

Задача 18. Стрелку выдано 5 патронов для поражения трех мишеней. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что он израсходует 5 патронов и поразит все цели.

Указание. Событие, вероятность которого требуется определить, заключается в том, что последним, пятым выстрелом поражена последняя, третья мишень. Следовательно, при первых четырех выстрелах было ровно два попадания.

Решение. Представим событие, вероятность которого требуется определить, в виде произведения двух независимых событий: A – два попадания при четырех выстрелах, B – попадание при пятом выстреле. Тогда

$$\begin{aligned} p(A) &= C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 6 \cdot 0,16 \cdot 0,36 = 0,3456; \\ p(B) &= 0,4; \quad p(AB) = 0,3456 \cdot 0,4 = 0,13824 \approx 0,138. \end{aligned}$$

Задача 19. Для поражения цели произвели 7 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. При одном попадании цель выходит из строя с вероятностью 0,1, при двух – с вероятностью 0,5, при трех – всегда выходит из строя. Найти вероятность выхода цели из строя после 7 выстрелов.

Указание. Рассмотрите гипотезы H_1 – одно попадание из семи выстрелов, H_2 – два попадания, H_3 – три или более попаданий. Вероятности гипотез можно найти по формуле Бернулли. Затем для определения вероятности события A – выхода цели из строя – примените формулу полной вероятности.

Решение. Пусть событие A – выход цели из строя. Вероятность этого события зависит от количества попаданий, поэтому рассмотрим гипотезы H_1 – одно попадание из семи выстрелов, H_2 – два попадания, H_3 – три или более попаданий. Вероятности гипотез можно найти по формуле Бернулли:

$$\begin{aligned} p(H_1) &= C_7^1 \cdot 0,6 \cdot 0,4^6 \approx 0,0172; \\ p(H_2) &= C_7^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^5 \approx 0,0774; \\ p(H_3) &= 1 - p(H_1) - p(H_2) - p(0) \approx \\ &\approx 1 - 0,0172 - 0,0774 - 0,4^7 \approx 0,9038; \\ p(A) &= 0,0172 \cdot 0,1 + 0,0774 \cdot 0,5 + 0,9038 \cdot 1 \approx 0,944. \end{aligned}$$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2000.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1998.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, задачи и упражнения. М., 1973.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.1-2. М., 1984.

Приложение

Рекомендации по подготовке к практическому занятию

Подготовку к каждому практическому занятию начинайте с изучения теоретического материала. При этом:

- вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- разберите доказательства теорем и выводы формул
- в завершение, прочтите теоретический материал еще раз, чтобы убедиться, что он освоен.

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] / Протасов Ю.М. - М.: ФЛИНТА, 2017. – 168 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976509566.html>
2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : матрицы и системы уравнений [Электронный ресурс] / Шерстов С.В. - М.: МИСиС, 2015. -17 с. – Режим доступа - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785876239709.html>
3. Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

Дополнительные источники:

1. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. – М.: Издательский центр «Академия»; Мастерство, 2002. – 304 с.
2. Алгебра и геометрия. Ч. 1 : учеб. пособие / сост. Д. В. Коваленко, Н. В. Неустроев (<https://novsu.bibliotech.ru>)
3. Гусев В.А. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образоват. учреждений нач. и сред. проф. образования

/ В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2012 – 384 с.

4. Дадаян А.А. Математика: учебник – М.: ФОРУМ, 2008. – 544 с.

5. Миронова Н.П. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов техникумов и колледжей / Д: Феникс, 2005. – 224 с.

6. Шипачев В.С. Начала высшей математики: Учеб. пособие для вузов, - 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 384 с.

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2000.

8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1998.

9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, задачи и упражнения. М., 1973.

10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.

11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.1-2. М., 1984.

Периодические издания:

Учебно-методический журнал «Математика» издательский дом «Первое сентября».

Интернет-ресурсы:

1 www.i-exam.ru

2 <http://www.mathematica.ru>

3 <http://window.edu.ru>

Перечень методических указаний, разработанных преподавателем:

1 Методические рекомендации по оценке качества подготовки обучающихся

2 Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изме- нения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				