Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ЕН.02 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Специальность:
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы

Квалификация выпускника: техник по компьютерным системам
(базовая подготовка)

Разработчик: преподаватель В.В. Болтянский

Методические рекомендации приняты на заседании предметной (цикловой) комиссии дисциплин профессионального цикла Политехнического колледж протокол № 1 от 05.09.2014

Председатель предметной (цикловой) комиссии ____________ Л. Н. Цымбалюк

Содержание

Пояснительная записка

Методические рекомендации по практическим занятиям, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 0909.02.01 «Компьютерные системы и комплексы»;

2 Рабочей программой учебной дисциплины (модуля);

3 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 16 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины в объёме 34 часов.

В результате выполнения практических заданий должен:

уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статических задач;
- пользоваться расчетными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач:
- применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

знать:

- основные понятия комбинаторики;
- основы теории вероятностей и математической статистики;
- основные понятия теории графов.

Ход выполнения студентом практической работы контролируется преподавателем на уроке, после оформления работа сдается на проверку преподавателю, который ее оценивает и выставляет оценку.

Критерии оценки практических занятий

«5»(отлично) – задание выполнено полностью, решение и ответы правильные, может иметься не более 1-2 недочетов, работа оформлена аккуратно;

«4» (хорошо) – задание выполнено полностью, порядок решения правильный, но допущены ошибки при расчетах или имеется 3-4 недочета, работа оформлена аккуратно;

«3» (удовлетворительно) – правильно выполнено более 50% заданий, допущено 2-3 грубых ошибки;

«2» (неудовлетворительно) – правильно выполнено менее 50% заданий, работа выполнена неаккуратно.

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

<table>
<tr><th>Наименование разделов и тем</th><th>Содержание учебного материала, практические занятия и самостоятельная работа обучающихся</th><th>Объем часов</th><th>Уровень освоения</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Раздел 1. Случайные события</td><td></td><td>21</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Тема 1.1. Основные понятия. Действия над событиями.</td><td>Содержание учебного материала</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="5">2</td></tr>
<tr><td>События. Действия над событиями. Классификация событий</td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№1 Действия над событиями</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Самостоятельная работа обучающихся
№1 «Действия над событиями»</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Тема 1. 2. Вероятность события</td><td>Содержание учебного материала</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">2</td></tr>
<tr><td>Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Формулы комбинаторики, применяемые для вычисления вероятностей событий.</td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№2 Решение задач по теме «Вероятность события»</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Самостоятельная работа обучающихся
№2 «Упражнения на вычисление вероятностей событий»</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Тема 1. 3. Основные теоремы</td><td>Содержание учебного материала</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">2</td></tr>
<tr><td>Теорема сложения и умножения. Условная вероятность. Надежность цепи.</td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№3 Решение задач по теме «Основные теоремы»</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Самостоятельная работа обучающихся
№3 «Упражнения на вычисление суммы, произведения событий, их условных вероятностей»</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Тема 1. 4. Повторение</td><td>Содержание учебного материала</td><td>3</td><td>1</td></tr>
</table>

испытаний	Схема Бернулли. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях. Производящая функция.		
	Практическое занятие №4 Решение задач по теме «Повторение испытаний»	3	
Раздел 2. Случайные величины		**21**	
Тема 2.1. Дискретные случайные величины (ДСВ).	**Содержание учебного материала**	3	1
	Основные понятия. Закон распределения вероятностей ДСВ. Функция распределения вероятностей. Свойства функции распределения вероятностей. Основные законы распределения. Биномиальный закон распределения. Закон распределения Пуассона. Геометрический закон распределения. Гипергеометрический закон распределения. Простейший поток событий.		
Тема 2.2. Числовые характеристики ДСВ.	**Содержание учебного материала**	3	2
	Математическое ожидание ДСВ и его свойства. Дисперсия. Свойства дисперсии. Среднеквадратичное отклонение ДСВ. Числовые характеристики основных законов распределения ДСВ.		
	Практическое занятие №5 Решение задач по теме «Числовые характеристики ДСВ»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №4 «Упражнения по теме «Числовые характеристики ДСВ»»	4	
Тема 2.3 Непрерывные случайные величины(НСВ)	**Содержание учебного материала**	3	2
	Функция распределения вероятностей случайной величины. Плотность распределения НСВ. Числовые характеристики НСВ. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Показательное распределение и его числовые характеристики. Функция надежности.		
	Практическое занятие №6 Решение задач по теме НСВ	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №5 «Упражнения по теме «НСВ»»	2	

Раздел 3. Элементы математической статистики		**38**	
Тема 3.1. Выборочный метод	**Содержание учебного материала**		2
	Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.	2	
	Практическое занятие №7 Решение задач по теме «Выборочный метод»	3	
Тема 3.2. Статистические оценки параметров распределения	**Содержание учебного материала**		2
	Точечные оценки. Метод моментов. Метод наибольшего правдоподобия. Интервальные оценки.	2	
	Практическое занятие №8 Решение задач по теме «статистические оценки параметров распределения»	3	
	Самостоятельная работа обучающихся №6 «Упражнения по теме «статистические оценки параметров распределения»»	2	
Тема 3.3. Методы расчета сводных характеристик выборок	**Содержание учебного материала**		2
	Метод произведений вычисления выборочных средней и дисперсии. Метод сумм вычисления выборочной средней и дисперсии. Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения.	3	
	Практическое занятие №9 Вычисление выборочной средней и дисперсии.	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №7 «Упражнения на вычисление выборочной средней и дисперсии»	5	
Тема 3.4. Понятие точечной оценки	Распределение ХИ-квадрат, распределение Стьюдента. Понятие точечной оценки. Метод максимального правдоподобия	2	2
	Самостоятельная работа обучающихся №8 Подготовка реферата по теме «Понятие точечной оценки», «Метод максимального правдоподобия».	2	

Тема 3.5. Интервальная оценка математического ожидания	Понятие интервальной оценки. Надежность доверительного интервала. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения; интервальное оценивание вероятности события.	4	
	Практическое занятие №10 Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 1).	1	
	Практическое занятие №11 Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 2)	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №9 Выполнение упражнения по теме «Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения; интервальное оценивание вероятности события»	7	
Раздел 4. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний		**7**	
Тема 4.1. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний	Моделирование случайных величин. Таблицы случайных величин. Сущность метода статистических испытаний. Практическая значимость результатов, получаемых методами математической статистики	4	
	Практическое занятие №12 Моделирование случайных величин, сложных испытаний и их результатов	1	
	Самостоятельная работа обучающихся №10 Подготовка рефератов по темам: «Моделирование случайных величин», «Моделирование случайной точки, равномерно распределённой в прямоугольнике», «Моделирование нормально распределенной НСВ.», «Моделирование показательно распределённой НСВ»	2	

<table>
<tr><td>Раздел 5. Основы теории графов</td><td></td><td>28</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Тема 5.1. Неориентированные графы, основные понятия</td><td>Понятие неориентированный граф. Способы задания графа. Подграф. Смежный граф. Путь в графе. Цикл в графе. Связный граф. Степень вершины. Теорема о сумме степеней вершин графа. Формула количества ребер в полном графе. Матрица смежности. Расстояние между вершинами в графе: определение, свойства, методика нахождения. Радиус и диаметр графа. Центры графа</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Двудольные графы. Методика проверки графа на двудольность. Полный двудольный граф. Изоморфные графы. Плоские графы. Грани плоской укладки плоского графа. Соотношение между количествами вершин, ребер и граней в плоском графе. Примеры неплоских графов</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№13 Метрические характеристики графа</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№14 Проверка графа на двудольность, плоскость</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Самостоятельная работа обучающихся
№11 «Выполнение расчетно-графического задания по теме «Графы»»</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тема 5.2. Ориентированные графы</td><td>Понятие орграфа. Способы задания. Матрица смежности для орграфа. Степень входа и выхода вершины. Источник. Сток. Ориентированный путь, цикл. Ориентированный путь. Ориентированный цикл (контур). Понятие достижимость одной вершины из другой. Понятие ориентированное дерево. Ярусное представление ордерева. Высота ордерева</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№15 Ориентированные деревья и их использование для обработки информации.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Тема 5.3. Эйлеровы и гамильтоновы графы</td><td>Эйлеров граф. Теорема Эйлера (критерий эйлеровости графа). Алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе. Гамильтонов граф. Некоторые теоремы о гамильтоновости графа. Эйлеров орграф. Гамильтонов орграф</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Практическое занятие
№16 Эйлеровы и гамильтоновы графы</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

	Самостоятельная работа обучающихся №12 «Решение задач по теории графов. Эйлеровы и Гамильтоновы графы»	4	
	Всего:	**112**	

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:

1. – **ознакомительный** (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – **репродуктивный** (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством)
3. – **продуктивный** (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач)

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Раздел 1. Случайные события

Тема 1.1. Основные понятия. Действия над событиями

Практическое занятие № 1: «Действия над событиями»

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики;
- проверка усвоения знаний по выполнению действий над событиями;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

На основе изучения лекционного материала выполнить практическую работу.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения).

Действия над событиями.

Под *испытанием (опытом)* понимают осуществление некоторого комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие.

Случайным событием называется событие, связанное с некоторым опытом, про результат которого можно сказать он осуществился или нет.

Случайные события обозначают большими заглавными буквами латинского алфавита *A, B, C, …* и т. д.

Достоверным событием называется случайное событие, которое непременно произойдет в данном опыте.

Обозначение**: Ω** или $\bigcup$**.**

Невозможным событием называется случайное событие, которое не может быть реализовано в данном опыте.

Обозначение: или V.

Виды случайных событий.

События $A_1, A_2, ..., A_{n.}$ называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других (т.е. они не могут одновременно произойти в одном опыте).

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *равновозможными*, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате данного испытания, произойдет хотя бы одно из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу несовместных событий*, если в результате данного испытания, произойдет одно и только одно событие данной группы.

Действия над событиями.

Суммой двух событий A и *B* называется событие, состоящее в том, что происходит *или* одно *или* другое событие, или оба этих события.

Обозначение: $A+B \equiv A \bigcup B$.

Сумма событий интерпретируется как объединение множеств

Суммой или *объединением нескольких событий* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Обозначение: $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

Свойства сложения.

1^0. $A+B=B+A$ (сложение коммутативно).

2^0. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (сложение ассоциативно).

3^0. $A+\overline{A}=\Omega$.

Произведением или *пересечением двух событий* A и B называется событие, состоящее в том, что происходит *и* одно *и* другое события (одновременно).

Обозначение: $AB\equiv A\cap B$.

Произведение событий интерпретируется как пересечение множеств.

Произведением нескольких событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в одновременном осуществлении всех событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Обозначение: $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Свойства произведения.

1^0. $AB=BA$ (произведение коммутативно).

2^0. $(AB)C=A(BC)$ (произведение ассоциативно).

3^0. $A(B+C)=AB+AC$ (произведение коммутативно относительно сложения).

4^0. $A\ddot{A}=\varnothing$.

Пример 1 Брошена монета – испытание.

Появление герба или цифры – событие, которое является достоверным

Пример 2 Брошена монета.

Событие A_1 - "появился герб" и событие A_2 - "появилась цифра" являются несовместными, равновозможными, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму, и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 3 В урне имеются два белых шара, пронумерованных цифрами 1,2 и три черных шара, пронумерованных цифрами 1,2,3. Из урны наугад берут один шар. События:

A_1 - «появление шара с цифрой 1»,

A_2 - «появление шара с цифрой 2»,

A_3 - «появление шара с цифрой 3»

образуют полную группу событий.

Пример 4 Бросается кубик. События:

A - «выпадение четного числа очков»

B – «выпадение числа очков больше чем 3».

В чем состоит события $A+B$, AB, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

Решение: Суммой событий A и B является событие состоящее в том, что выпадет или четное число очков или число очков больше трех, т. е.

$A+B$ – «выпадение или 2, или 4, или5, или 6».

Произведением событий A и B является событие состоящее в том, что выпадет и четное число очков, и число очков больше чем 3, т.е.

AB – «выпадение или четверки или шестерки».

$\overline{A}$ - «выпадение нечетного числа очков»,

$\overline{B}$ - «выпадение числа очков меньше чем 4».

Пример 5 В урне 30 шаров, из которых 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность появления красного шара, синего шара.

***Решение*:** Обозначим события:

A – «появление красного шара»,

B – «появление синего шара».

Найдем вероятности событий A и B. Имеем

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Выполнить следующие задания:

1 Пусть A и B — некоторые события, связанные с одним опытом. Выразить через A и B следующие события:

а) не произошло ни одного из событий A и B;

б) произошло ровно одно из событий A и B.

2 Из ящика наугад берут деталь. События: A – «вытащили деталь первого сорта», B – «вытащили деталь второго сорта», C – «вытащили деталь третьего сорта». В чем состоят события А+B, AC, $\overline{A+C}$?

3 Событие A – «первый стрелок попал в цель», событие B – «второй стрелок попал в цель». Записать события: C – «заяц убит», $Д$ – «попал один из двух стрелков», E – « попали оба стрелка», H – «попал хотя бы один из стрелков».

4 Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что он — юноша. Событие B в том, что он не курит, а событие C в том, что он живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. При каком условии будет иметь место тождество $ABC = A$? Когда будет справедливо соотношение $\overline{C} \subseteq B$?

Когда будет верно равенство $\overline{A} = B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

5 Пусть A, B, C — три произвольно выбранных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C:

а) произошло только A;

б) произошли A и B, но C не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из этих событий;

д) произошло хотя бы два события;

е) произошло одно и только одно из этих событий;

ж) произошло два и только два события;

з) ни одно из событий не произошло;

и) произошло не более двух событий.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные понятия теории вероятностей.
2. Какие события называются достоверными? Приведите пример.
3. Какие события называются невозможными? Приведите пример.
4. Какие события называются случайными? Приведите пример.
5. Какие события называются совместными? Приведите пример, изобразите с помощью диаграмм Эйлера.
6. Какие события называются несовместными? Приведите пример, изобразите с помощью диаграмм Эйлера.
7. Какие события называются равновозможными? Приведите пример.
8. Какие события называются противоположными? Приведите пример.
9. Какие события образуют полную группу событий? Приведите пример.
10. Какие операции можно проводить над событиями? Дайте определения суммы, произведения событий. Приведите пример, изобразите с помощью диаграмм Эйлера.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 1. Случайные события

Тема 1. 2. Вероятность события

Практическое занятие №2 Решение задач по теме «Вероятность события»
Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:
- приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики;
- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о вероятности события;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Определение Вероятностью события *A* называется отношение числа *k* благоприятствующих этому событию исходов к общему числу *n* элементарных исходов испытания, если они несовместны и равновозможны:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Свойства вероятности.

1^0 Вероятность достоверного события равна единице, т.е.

$$P(\Omega) = 1.$$

2^0 Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

3^0 Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Пример В урне 30 шаров, из которых 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность появления красного шара, синего шара.

***Решение*:** Обозначим события:

A – «появление красного шара»,

B – «появление синего шара».

Найдем вероятности событий A и B. Имеем

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Выполнить следующие задания:

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.
2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.
3. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных "в одну линию" кубиков можно будет прочесть слово "спорт".
4. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех, вынутых по одной и расположенных "в одну линию" карточках можно будет прочесть слово "трос".
5. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.
6. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

Контрольные вопросы:

1. Что понимается под «равновозможными исходами испытания»?
2. Приведите примеры испытаний и назовите число равновозможных исходов этих испытаний.
3. Приведите пример события и перечислите исходы испытания, благоприятствующие этому событию.
4. Что называется вероятностью случайного события?
5. Дайте определение вероятности случайного события А: а) классическое: б) геометрическое.

6. Что называется относительной частотой появления события А? В чем заключается свойство устойчивости относительной частоты?

7. Что называется статистической вероятностью события А?

8. Перечислите основные виды комбинаций элементов конечных множеств.

9. Что называется перестановкой элементов n-множества? Запишите соответствующую формулу для определения числа перестановок.

10. Что называется размещением из n элементов множества по m элементов? Запишите соответствующую формулу для определения числа размещений из n элементов множества по m элементов.

11. Что называется сочетанием из n элементов множества по m элементов? Запишите соответствующую формулу для определения числа сочетаний из n элементов множества по m элементов.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 1. Случайные события

Тема 1. 3. Основные теоремы

Практическое занятие №3 Решение задач по теме «Основные теоремы»

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики;
- решение задач по теории вероятности с использованием основных теорем;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Если появление события A (или B) не изменяет вероятность появления события B (или A), эти события называются *независимыми*, в противном случае они называются *зависимыми*.

Для зависимых событий вероятность появления второго события при условии, что первое событие имело место, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(B/A)$ или $P(A/B)$ соответственно.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий записывается так:

$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

Если события независимы, то

$P(AB) = P(A)P(B)$.

События A и B называются *совместимыми (или совместными)*, если появление одного из них не исключает появление и другого. В противном случае они называются *несовместимыми (несовместными)*.

Вероятность суммы совместных событий A и B равна

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Если же события несовместимы, то

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$P(A)+P(\overline{A})=1$.

Если задача заключается в том, чтобы найти вероятность *хотя бы одного события* (назовем такое сложное событие событием A) из группы независимых событий, т.е. любого из них или любого их сочетания, то эта задача (на сумму событий) проще решается через противоположное событие (не появилось ни одного события из данной группы):

$P(A)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...$

Пример 1 В урне 30 шаров, из которых 10 красных, 5 синих, 15 белых. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность появления цветного шара.

***Решение*:** Появление цветного шара означает, что вынутый шар либо красный, либо синий.

Обозначим события:

A – «появление красного шара»,

B – «появление синего шара».

Тогда событие $A+B$ – «появление цветного шара».

Найдем вероятности событий A и B. Имеем

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны(появление красного шара исключает появление синего шара и наоборот), поэтому применим теорему 1.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2 В ящике 8 окрашенных деталей и две неокрашенные. Найти вероятность того, что три наугад взятые детали будут окрашенными.

Решение: Рассмотрим случайные события:

A = {три взятые детали окрашенные},

A_1 = {первая взятая деталь окрашенная},

A_2 = {вторая взятая деталь окрашенная},

A_3 = {третья взятая деталь окрашенная}.

Поскольку $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, то $P(A)$ можно вычислить, используя формулу умножения вероятностей:

$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cdot A_2)$.

По условию детали берут наугад, поэтому для вычисления вероятностей в правой части формулы можно использовать классическое определение вероятности: $P(A_1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$; после того, как взяли одну окрашенную деталь, в ящике осталось 9 деталей, из которых 7 деталей окрашенные. Значит, $P(A_2/A_1)=\frac{7}{9}$ и, аналогично рассуждая, получим, что $P(A_3/A_2)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{15}.$$

Пример 3 Прибор , работающий в течении время t , состоит из трех узлов ,каждый из которых, независим от других, может выйти из строя в течении времени t. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время t вероятность безотказной работы первого узла 0,9, второго узла 0,8 ,а третьего – 0,7. Найдите надежность прибора в целом?

Решение: A – безотказная работа прибора;

A_1 – безотказная работа 1 узла;

A_2 – безотказная работа 2 узла;

A_3 - безотказная работа 3 узла;

$A= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3;$ A_1, A_2, A_3 – независимые события.

$P(A)=P(A1 \cdot A2 \cdot A3)= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)=$ O,9·0,8·0,7= O,504.

Пример 4 Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8; а вторым 0,7. Стрелки делают по цели по одному выстрелу одновременно. Определить вероятность того, что цель будет поражена, если стрелки стреляют не зависимо друг от друга.

Решение: A_1 – цель поражена первым стрелком ;

A_2 – цель поражена вторым стрелком ;

A – цель поражена.

$A = A_1 + A_2$.

По правилу сложения:

$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1A_2) = 0,8 + 0,7 – 0,8 \cdot 0,7 = 0,94$.

Выполнить следующие задания:

1 Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

2 События A, B, C и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A)= 0,1$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,3$. Чему равна вероятность события D?

3 По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 — для смены резца; 3 — из-за неисправности привода; 2 — из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

4 Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна p = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

5 Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: "появился "герб", "появилось 6 очков".

6 В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

7 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 возможных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

8 Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет пора жена только одним стрелком.

9 В группе, состоящей из 25 студентов, в шахматы умеют играть 10 человек, а в шашки — 12 человек. Вероятность того, что студент из этой группы умеет играть в обе эти игры, равна 0,32. Найти вероятность того, что студент, наугад выбранный из группы, умеет играть в шахматы или в шашки.

Контрольные вопросы:

1. Какие события называются несовместными? Приведите пример.
2. Что называется суммой двух случайных событий?
3. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
4. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

5. Чуму равна сумма вероятностей противоположных событий?

6. Что называется условной вероятностью события A по событию B? Приведите примеры.

7. Какие события называются зависимыми в данном испытании? Приведите примеры.

8. Какие события называются независимыми в данном испытании? Приведите примеры.

9. Чему равна вероятность произведения двух зависимых событий?

10. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

11. Какие события называются совместными в данном испытании? Приведите пример. 12. Чему равна вероятность суммы совместных событий?

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 1. Случайные события

Тема 1. 4. Повторение испытаний

Практическое занятие №4 Решение задач по теме «Повторение испытаний»

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о приемах вычисления вероятности события;
- формирование умений по применению формулы Бернулли и приближенных формул вычисления вероятности;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Если проводятся n независимых испытаний с постоянной вероятностью события A в каждом испытании, то вероятность появления события в этих испытаниях ровно k раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n по k.

Если число испытаний n велико, а вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то:

а) вероятность появления события A в n испытаниях ровно k раз можно оценить по *локальной формуле Лапласа (Муавра-Лапласа)*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $q = 1 - p$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) -$ дифференциальная функция стандартного (нормированного) нормального распределения (находится по таблицам для вычисленного значения аргумента, при этом $\varphi(-x) = \varphi(x)$);

б) вероятность появления события A в n испытаниях от k_1 до k_2 раз можно оценить по *интегральной формуле Лапласа (Муавра-Лапласа)*

$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$,

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$ функция Лапласа. Значение функции Лапласа находят по таблицам для вычисленного значения аргумента, при этом $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Чем больше n, тем точнее оценка вероятности.

Если число испытаний n велико, а p мало, так что $np = \lambda \approx (1...10)$, то хорошее приближение дает *формула Пуассона*:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Если надо вычислить вероятность того, что число появления события будет находиться в пределах от k_1 до k_2 раз, причем k_1 и k_2 различаются мало (на единицы), то эту вероятность вычисляют по формуле

$P_n(k_1, k_2) \approx P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2)$.

Следует помнить, что указанные формулы являются приближенными, а точной для данной схемы испытаний является формула Бернулли.

Пример 1 Автобус проходит мимо остановки «по требованию» 5 раз в день. Вероятность остановки в течение дня одинакова и равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что за день автобус остановится: а) 2 раза; б) не более двух раз.

Решение: а) $n = 5$, $k = 2$, $p = 0{,}2$.

$P_5(2) = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = \dfrac{5!}{2!3!} 0{,}2^2 0{,}8^3 = 0{,}2048.$

б) $n = 5$, $k = 0, 1$ или 2.

$P_5(0, 2) = P(0) + P(1) + P(2)$.

Здесь мы воспользовались теоремой сложения несовместных событий. Дальнейшие арифметические действия не вызовут затруднений, и в результате получим:

$P_5(k \le 2) = 0{,}94208$.

Пример 2 Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена а) ровно 75 раз; б) от 70 до 80 раз.

Решение: а) Т.к. n достаточно велико, воспользуемся локальной формулой Лапласа.

$x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{75 - 0{,}8*100}{\sqrt{100*0{,}8*0{,}2}} = -1{,}25;$

$\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$ (*по таблице прил.* 1);

$P_{100}(75) \approx \dfrac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$

б) Воспользуемся интегральной формулой Лапласа.

$k_1 = 70, \quad k_2 = 80, \quad x_1 = \dfrac{70-80}{4} = -2{,}5, \quad x_2 = \dfrac{80-80}{4} = 0,$

$P_{100}(70{,}80) \approx \Phi_0(0) - \Phi_0(-2{,}5) = \Phi_0(2{,}5) = 0{,}4938$ (*по таблице прил.* 2)

Пример 3 Вероятность брака изделия составляет 0,002. Оценить вероятность того, что среди 1000 изделий два бракованных.

Решение: Поскольку n велико, а p мало, так что $np = \lambda = 2$, воспользуемся формулой Пуассона.

$$P_{1000}(2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 2e^{-2} \approx 0{,}274.$$

Выполнить следующие задания:

1 Какова вероятность того, что из 10 подбрасываний монеты герб выпадет:
а) ровно 4 раза; б) более двух раз; в) от 6 до 8 раз?

2 Вероятность того, что спортсмен победит в матче, равна 0,6. Какова вероятность того, что в 10 поединках он одержит больше 8 побед?

3 Адвокат выигрывает в суде в среднем 70% дел. Найти вероятность того, что он:
а) из трех дел не проиграет ни одного;
б) из восьми дел выиграет больше половины.

4 Игральная кость бросается 7 раз. Определить вероятность того, что грань с единицей выпадет:
а) ровно два раза; б) не менее пяти раз; в) ни разу.

5 Из набора домино 5 раз случайным образом выбирается кость, и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что три раза будет вынута кость:
а) являющаяся дублем; б) содержащая шестерку; в) не содержащая пятерку.

6 Вероятность того, что родившийся ребенок — мальчик, равна 0,51. Какова вероятность того, что в семье из шести детей:
а) 4 мальчика и 2 девочки; б) одна или две девочки;
в) поровну мальчиков и девочек; г) больше девочек, чем мальчиков.

Контрольные вопросы:

1. Опишите схему повторных независимых испытаний с двумя исходами.
2. Запишите формулу Бернулли и укажите условия ее применения.
3. Запишите формулу Пуассона и укажите условия ее применения.
4. Запишите локальную теорему Муавра-Лапласа.
5. Запишите интегральную теорему Муавра-Лапласа.
6. Запишите формулу для нахождения наивероятнейшего числа наступлений события А в схеме n повторных независимых испытаний

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.

5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 2. Случайные величины

Тема 2.2. Числовые характеристики ДСВ

Практическое занятие №5 Решение задач по теме «Числовые характеристики ДСВ»

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о дискретной случайной величине и ее числовых характеристиках;
- формирование умений по нахождению числовых характеристик дискретной случайной величины, распределения Пуассона;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

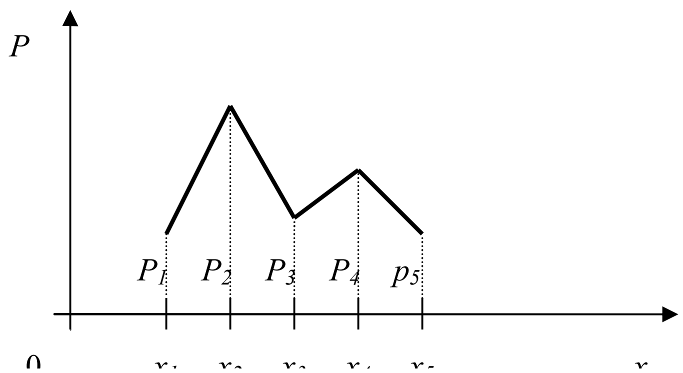
Случайная величина называется *дискретной*, если ее значения можно пронумеровать $X = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots)$. Она может быть задана рядом распределения, многоугольником или функцией распределения.

Рядом распределения называется совокупность всех частных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$. Ряд распределения оформляется обычно в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

$\sum_i p_i = 1$

Многоугольником распределения называется графическое изображение ряда распределения.



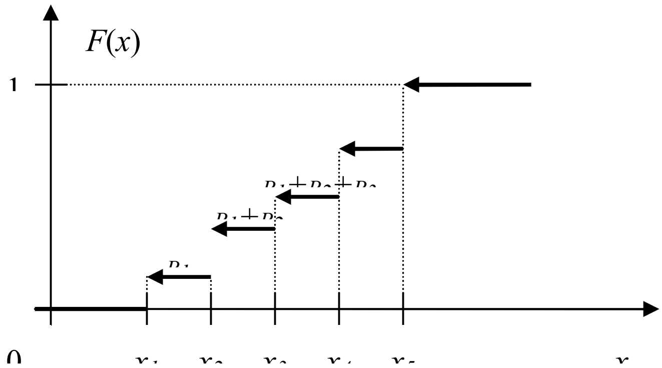
Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет значения меньшее выбранного значения, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Функция $F(x)$ вычисляется по формуле $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Свойства функции распределения

1 $F(x)$ – функция неубывающая.
2 $F(+\infty)=1;\quad F(-\infty)=0$.
3 $P(\alpha \le x < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

График имеет вид



Пример Составить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при одном броске p = 0,3. Построить многоугольник и функцию распределения.

Решение: Случайная величина X – число попаданий мячом в корзину при трех бросках. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3. Соответствующие вероятности могут быть вычислены по формуле:

$$P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Этой формулой можно пользоваться, если независимые испытания производятся n раз, вероятность события в каждом испытании постоянна и равна p, а $q=1-p$. $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Здесь $n=3; p=0{,}3; q=0{,}7$.

$P_3(X=0)=q^3=0{,}7^3=0{,}343.$

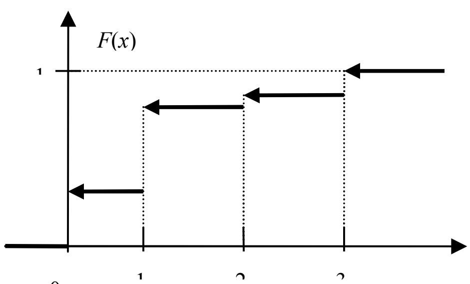
$P_3(X=1)=C_3^1 pq^2=3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^2=0{,}441.$

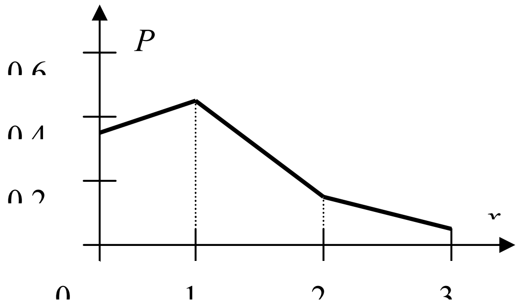
$P_3(X=2)=C_3^2 p^2 q=3\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7=0{,}189.$

$P_3(X=3)=p^3=0{,}3^3=0{,}027.$

Ряд распределения

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027





Основные числовые характеристики для дискретных случайных величин определяются по формулам:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i;\quad D(X)=M(X-M(X))^2\cdot p_i;\ \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Отметим еще формулу, удобную при вычислении дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины *X*, которое характеризует среднее значение случайной величины, центр распределения. $D(X)$ – дисперсия, определяет рассеивание случайной величины около центра. $\sigma(X)$ – среднее квадратичное отклонение.

Пример. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины из предыдущего примера.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=0\cdot 0{,}0016+1\cdot 0{,}0064+2\cdot 0{,}032+3\cdot 0{,}16+4\cdot 0{,}8=0{,}8704;$$

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i=0^2\cdot 0{,}0016+1^2\cdot 0{,}0064+2^2\cdot 0{,}032+3^2\cdot 0{,}16+4^2\cdot 0{,}8=14{,}3744$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=14{,}3744-0{,}8704^2=13{,}6168;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}69.$$

Выполнить следующие задания:

1 Стрелок стреляет в первую мишень и попадает с вероятностью 0,8, а затем — во вторую и попадает с вероятностью 0,9. Построить график функции распределения числа попаданий в мишени.

2 Случайная величина задана законом распределения:

X_i	-3	-1	0	2
P_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Изобразить график функции распределения. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3 Выбирается наугад один из дублей домино. Найти для суммы очков на этом дубле закон распределения и функцию распределения.

4 Случайная величина *X* имеет распределение, заданное таблицей:

X_i	-2	0	4	5
P_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Составить закон распределения случайной величины:

а) $Y = 7 - 3X$; б) $Z = (X - 1)^2$.

5 Случайная величина задана законом распределения:

X_i	-3	-1	0	2
P_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Изобразить график функции распределения. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

6 Выбирается наугад один из дублей домино. Найти для суммы очков на этом дубле закон распределения и функцию распределения.

7 Случайная величина X имеет распределение, заданное таблицей:

X_i	-2	0	4	5
P_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Составить закон распределения случайной величины:

а) $Y = 7 - 3X$; б) $Z = (X - 1)^2$.

8 Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, наугад вынимают 3 шара. Для числа вынутых белых шаров: составить закон распределения и изобразить функцию распределения; вычислить математическое ожидание и дисперсию.

9 Математическое ожидание случайной величины X равно 10, а дисперсия — равна 36. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

а) $Y_1 = 2X - 5$; б) $Y_2 = 0{,}3X + 12$; в) $Y_3 = Y_1 + Y_2$.

10 В связке имеются 4 ключа, из которых только одним можно открыть дверь. Ключи пробуются один за другим в случайном порядке, причем ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Составить закон распределения и изобразить функцию распределения числа ключей, которые будут испробованы для открытия двери.

11 Случайная величина X принимает только 2 возможных значения, одно из этих значений равно – 4. Определить закон распределения X, если $M(X) = 5$, $\boldsymbol{\sigma}(X) = 3$.

12 Бросаются две игральные кости. Найти для произведения очков на выпавших гранях: математическое ожидание; дисперсию.

13 Случайная величина X имеет только три возможных значения: –2, 0 и 1. Определить закон распределения X, зная M(X) = –0,6 и D(X) = 2,04.

14 Доля дефектных изделий составляет 5%. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бездефектных изделий в партии из 60 штук.

15 В ящике находится 8 предметов, 3 из которых помечены. Из ящика 4 раза подряд наудачу достается предмет, проверяется, помечен ли он, и каждый раз предмет возвращается обратно. Для числа появившихся помеченных предметов: построить график функции распределения; найти математическое ожидание.

16 Бракованной является каждая пятая деталь, выпускаемая заводом. Составить закон распределения и изобразить функцию распределения числа бракованных деталей в партии из 4 штук.

17 В среднем 30% высеваемых семян не всходит. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа взошедших семян из 1000 посеянных.

18 Число телефонных звонков в день распределено по закону Пуассона с параметром $\boldsymbol{\lambda} = 5$. Найти вероятность того, что за день будет менее 3 звонков.

19 Число отказавших за промежуток времени T элементов распределено по закону Пуассона с параметром $\boldsymbol{\lambda} = aT$, где a – среднее число отказавших за единицу времени элементов. Известно, что математическое ожидание числа отказавших за сутки элементов равно 100. Определить вероятность того, что за час откажет более двух элементов.

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной? Назовите виды случайных величин. Приведите примеры.
2. Дайте определение дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины.
3. Что называется законом распределения вероятностей (рядом распределения) дискретной случайной величины?
4. Как можно задать ряд распределения вероятностей?
5. Как проверить правильность составления ряда распределения вероятностей, если он задан таблицей?

6. Как называется графическое представление ряда распределения?
7. Дайте определение функции распределения вероятностей случайной величины.
8. Перечислите свойства функции распределения дискретной случайной величины.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 2. Случайные величины

Тема 2.3 Непрерывные случайные величины(НСВ)

Практическое занятие №6 Решение задач по теме НСВ

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о непрерывной случайной величине и ее числовых характеристиках;
- формирование умений по нахождению числовых характеристик непрерывной случайной величины;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна. Для описания непрерывных законов распределения чаще используется понятие *плотности распределения*:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P(x < X < x + \Delta x) = F'(x) \quad .$$

$y = f(x)$ называют также *дифференциальной функцией* распределения, а ее график – кривой распределения.

Свойства дифференциальной функции распределения.

1 $\quad f(x) \geq 0.$ $\qquad$ 2 $\quad P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

3 $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ $\qquad$ 4 $\quad \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x).$

Учитывая свойство (4), функцию $F(x)$ часто называют *интегральной функцией* распределения непрерывной величины X.

Математическое ожидание и дисперсия в случае непрерывной случайной определяется формулами:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Пример1 Непрерывная случайная величина имеет интегральную функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ ax^2 & при \quad 0\le x\le 1; \\ 1 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Найти $a, f(x), P(-0{,}25<x<0{,}5)$. Построить графики $F(x)$ *и* $f(x)$.

Решение: По условию задачи функция $F(x)$ непрерывна. При $x = 0$ разрыва нет. $\lim\limits_{x\to 1-0} F(x)=a$; $\lim\limits_{x\to 1+0} F(x)=1$, чтобы при $x = 1$ не было разрыва, выбираем $a = 1$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ x^2 & при \quad 0\le x\le 1; \\ 1 & при \quad x>1. \end{cases} \text{ . Тогда } \quad f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ 2x & при \quad 0\le x\le 1; \\ 0 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Графики функций имеют вид:

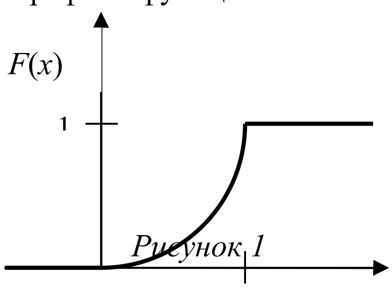


Рисунок 1

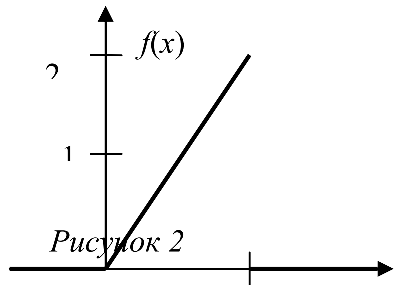


Рисунок 2

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(-0{,}25;\quad 0{,}5)$, определяется по одной из двух формул

$$P(-0{,}25<X<0{,}5)=F(0{,}5)-F(-0{,}25)=(0{,}25)^2-0=0{,}25 \text{ или}$$

$$P(-0{,}25<X<0{,}5)=\int\limits_{-0{,}25}^{0{,}5} f(x)dx=\int\limits_{0}^{0{,}5} 2xdx=0{,}25.$$

Пример 2 Вычислить математическое ожидание и дисперсию для непрерывной случайной величины, заданной следующей функцией распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0; \\ 2x & при \quad 0\le x\le 1; \\ 0 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Решение*:* Найдем *M(X):*

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{1} x\cdot 2xdx=2\int\limits_{0}^{1} x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3};$$

Найдем $M(X^2)$:

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{0}^{1} x^2\cdot 2xdx=2\int\limits_{0}^{1} x^3dx=\frac{2}{4}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{2};$$

Тогда

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}=0{,}0555;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}236.$$

Выполнить следующие задания:

1 Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$.

а) Является ли случайная величина x непрерывной?

б) Имеет ли случайная величина x плотность вероятности $f(x)$? Если имеет, то найдите ее.

в) Постройте схематически графики $F(x)$ и $f(x)$.

1) $F(x)=\begin{cases} e^x, & если\ x\le 0, \\ 1, & если\ x>0; \end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le 1, \\ x-1, & если\ 1<x\le 2, \\ 1, & если\ x>2; \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0{,}5e^x, & если\ x\le 0, \\ 0{,}8, & если\ 0<x\le 2, \\ 1, & если\ x>2; \end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le -\frac{\pi}{2}, \\ 1+\sin x, & если\ -\frac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, & если\ x>0; \end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le 1, \\ \ln x, & если\ 1<x\le 2, \\ 1, & если\ x>2; \end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le 0, \\ \frac{1}{\pi}(x-0{,}5\sin 2x), & если\ 0<x\le \pi, \\ 1, & если\ x>\pi. \end{cases}$

2 Случайная величина **x** имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases} c\cos x, & если\ -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & если\ |x|>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите: а) постоянную c; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность события $|\mathbf{x}|\le \frac{\pi}{4}$.

3 Задана плотность вероятности случайной величины **x**:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le 0, \\ a\,x, & если\ 0<x\le 2, \\ 0, & если\ x>2. \end{cases}$$

Найдите: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

4 Случайная величины **x** имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ 3x^2, & если\ 0<x\le 1,\\ 0, & если\ x>1.\end{cases}$$

Найдите функцию распределения *F(x)*, вероятность попадания случайной величины в интервал $(-2,\frac{1}{2})$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

5 Случайная величина **x** имеет равномерный закон распределения на отрезке [0, 2]. Напишите выражение для плотности вероятности $f(x)$ и для функции распределения $F(x)$. Найдите вероятность события $0 < x < 0,5$. Постройте графики $f(x)$ и $F(x)$.

6 Автобусы идут с интервалом 5 мин. Предполагая, что время **x** ожидания автобуса на остановке имеет равномерное распределение, найдите: а) функцию распределения; б) плотность вероятности; в) вероятность того, что время ожидания не превзойдет 2 мин; г) постройте графики плотности вероятности и функции распределения.

7 Случайная величина **x** распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Напишите выражения для плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$. Используя таблицу для функции Лапласа, найдите вероятность события $1,25 \le x \le 2,55$.

8 Случайная величина **x** распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. В каждом из следующих четырех пунктов а), б), в), г) напишите плотность вероятности и функцию распределения; в одной и той же системе координат постройте кривые распределения; пользуясь «правилом трех сигм», найдите интервал, в который попадает случайная величина x с практической достоверностью (с вероятностью 0,9973):

а) $a = 0$, $\sigma = 1$; б) $a = 2$, $\sigma = 1$; в) $a = -2$, $\sigma = 1$; г) $a = 0$, $\sigma = 0,5$.

Контрольные вопросы:

1. Какая случайная величина является непрерывной? Приведите примеры.
2. Назовите свойства и изобразите график функции распределения непрерывной случайной величины.
3. Чему равна вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины?
4. Как вычислить вероятность попадания значений случайной величины в заданный интервал? (приведите два способа).
5. Какая функция называется функцией плотности распределения вероятностей или плотностью вероятностей непрерывной случайной величины?
6. Перечислите свойства плотности распределения вероятностей.
7. Как связаны между собой функция распределения и функция плотности распределения вероятностей?
8. Запишите формулы для математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины X.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.

5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.1. Выборочный метод

Практическое занятие № 7: Решение задач по теме «Выборочный метод»
Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о генеральной и выборочной совокупности, эмпирической функции распределения выборки, о геометрической интерпретации статистических распределений выборки;
- формирование умений по построению эмпирической функции распределения по данному распределению выборки, полигонов и гистограмм частот;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Генеральная совокупность – все множество имеющихся объектов. *Выборка* – набор объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности. Объем генеральной совокупности ***N*** и объем выборки ***n*** – число объектов в рассматриваемой совокупности.

Виды выборки:

Повторная – каждый отобранный объект перед выбором следующего возвращается в генеральную совокупность;

Бесповторная – отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Первичная обработка результатов.

Пусть интересующая нас случайная величина X принимает в выборке значение x_1 – n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, $x_к$ – $n_к$ раз, причем $\sum_{i=1}^{k} n_k = n,$ где n – объем выборки. Тогда наблюдаемые значения случайной величины $x_1, x_2,\ldots, x_к$ называют вариантами, а $n_1, n_2,\ldots, n_к$ – частотами. Если разделить каждую частоту на объем выборки, то получим относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют вариационным рядом, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот – статистическим рядом:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Если исследуется некоторый непрерывный признак, то вариационный ряд может состоять из очень большого количества чисел. В этом случае удобнее использовать группированную выборку. Для ее получения интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько равных частичных интервалов длиной d, а затем находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-*й* интервал. Составленная по этим результатам таблица называется группированным статистическим рядом

Номера интервалов	1	2	…	k
Границы интервалов	(a, a + h)	(a + h, a + 2h)	…	(b – h, b)
Сумма частот вариант, попавщих в интервал	n_1	n_2	…	n_k

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называют функцию *F*(x)*, определяющую для каждого значения *x* относительную частоту события $X < x$. Таким образом,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших *x*, *n* – объем выборки.

Свойства эмпирической функции распределения:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$.
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция.
3) Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если $x_к$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_к$.

Для наглядного представления о поведении исследуемой случайной величины в выборке можно строить различные графики. Один из них – полигон частот: ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$, где x_iоткладываются на оси абсцисс, а n_i– на оси ординат. Если на оси ординат откладывать не абсолютные (n_i), а относительные (w_i) частоты, то получим полигон относительных частот (рис.3).

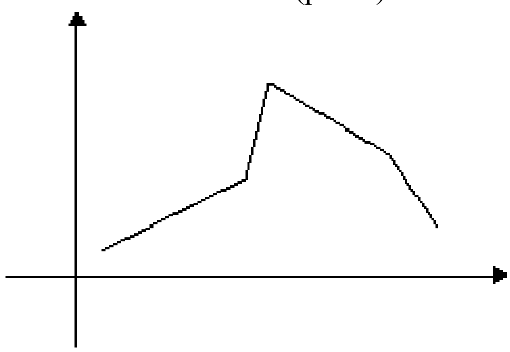


Рисунок 3

Для непрерывного признака графической иллюстрацией служит гистограмма, то есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной *d*, а высотами – отрезки длиной $n_i\ /d$ (гистограмма частот) или $w_i\ /d$(гистограмма относительных частот). В первом случае площадь гистограммы равна объему выборки, во втором – единице (рис.4).

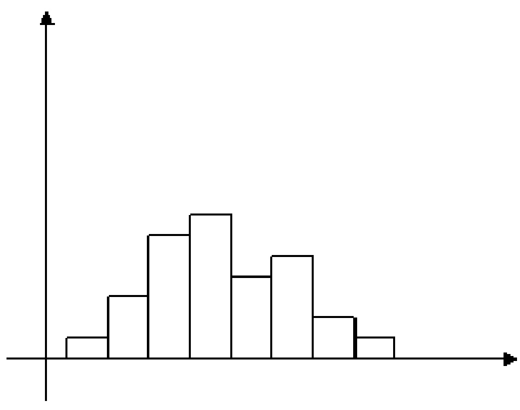


Рисунок 4

Пример1 При изучении некоторой дискретной случайной величины в результате 40 независимых наблюдений получена выборка:

10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9; 8, 9 ,11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7; 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10; 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон.

Решение: а) Выбирая различные варианты из выборки и располагая их в возрастающем порядке, получим вариационный ряд:

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,14.

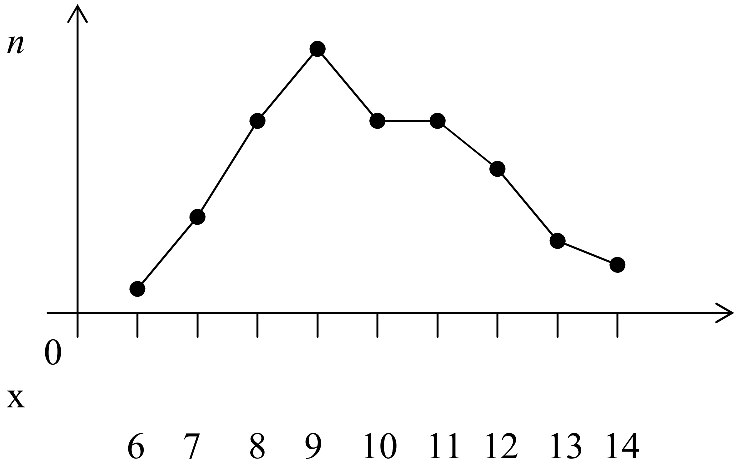
б) Для нахождения частот $n_i = \frac{k_i}{40}$ предварительно подсчитаем для каждой варианты соответствующие кратности k_{i}:

k_{i} = 1, 3, 6, 8, 6, 6, 5, 3, 2.

Таблица частот

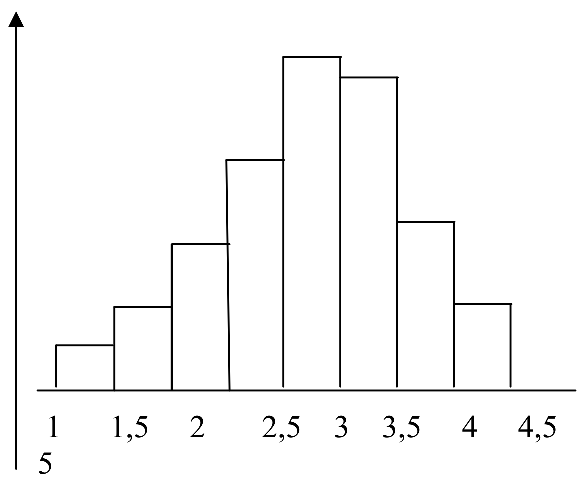
x	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_I	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{2}{40}$

в) Полигон изображен на рисунке 3.



Пример 2 Для изучения распределения веса новорожденных были собраны данные для 100 детей и составлена интервальная таблица частот. Для удобства таблица составлена в столбик:

Интервалы веса (кг) (длина интервала d=0,5)	Плотность частоты $\frac{n_i}{d}$	
1,0 – 1,5	0,01	
1,5 – 2,0	0,02	
2,0 – 2,5	0,05	
2,5 – 3,0	0,15	$\sum \frac{n_i}{d}=1.$
3,0 – 3,5	0,35	
3,5 – 4,0	0,28	
4,0 - 4,5	0,12	
4,5 – 5,0	0,02	



Гистограмма полученной интервальной таблицы частот представлена на рисунке 6.

Выполните следующие задания:

1 Заданы выборки из генеральной совокупности значений дискретной случайной величины x. Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон частот; г) найти эмпирическую функцию распределения.

1) 2, 1, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 3;
2) 3, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 2, 3, 4, 1, 2, 4, 3, 1, 3, 4, 2, 1;
3) 4, 4, 1, 2, 1, 4, 4, 1, 4, 3, 4, 3, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 4, 4;
4) 4, 3, 4, 4, 1, 2, 4, 4, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 3, 2, 4, 4, 3, 4.

2 Пятьюдесятью абитуриентами на вступительных экзаменах получены следующие количества баллов:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13,
17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14,16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18,
18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

Требуется: а) составить вариационный ряд; б) составить таблицу частот; в) построить полигон частот.

3 Обследование оплаты труда 50 рабочих данного завода дало следующие результаты (в усл.ед.):

214, 204, 212, 201, 190, 222, 226, 216, 228, 240, 224, 220, 260, 204, 240, 190,
218, 232, 254, 224, 204, 221, 256, 260, 228, 232, 204,182, 230, 214, 242, 222,
260, 198, 216, 198, 232, 242, 216, 226, 208, 221, 202, 204, 222, 196, 222, 238,
224, 223.

а) Составьте интервальную таблицу частот с шириной интервала 10 (у.е.) начиная с 180 (у.е.).

б) Постройте гистограмму.

4 В результате 50 независимых измерений некоторой величины получены данные:

2,2; 5,3; 3,4; 4,5; 5,1; 3,4; 4,3; 2,7; 3,5; 5,8; 2,3; 4,4; 4,7; 2,1; 4,8; 3,6; 3,5; 4,2;
5,7; 3,7; 4,2; 3,4; 4,3; 3,4; 4,3; 4,1; 5,3; 4,8; 5,1; 2,4; 3,7; 4,3; 5,6; 4,5; 3,4; 3,2;
4,6; 3,6; 4,2; 4,1; 5,5; 4,6; 4,8; 4,5; 4,3; 4,8; 3,9; 3,8; 5,9; 5,1.

Требуется:

а) выбрав интебрвалы 2-3; 3-4; 4-5 и 5-6, составить интервальную таблицу частот;

б) построить гистограмму.

5 Задана интервальная таблица частот некоторой величины.

Требуется построить гистограмму:

1)

10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2)

2-5	5-8	8-11	11-14
0,24	0,40	0,20	0,16

6 Найти эмпирическую функцию распределения по данному статистическому распределению выборки:

1)

x	5	7	10	15
n_1	2	3	8	7

x	4	7	8
n_1	5	3	3

Контрольные вопросы:

1. Приведите примеры испытаний, результат которых определяется несколькими случайными величинами.
2. Дайте определение многомерной случайной величины и его геометрическое толкование.
3. Назовите виды многомерных случайных величин.
4. Запишите функцию распределения двумерной случайной величины.
5. Дайте геометрическую интерпретацию функции распределения двумерной случайной величины.
6. Как задается распределение двумерной дискретной и двумерной непрерывной случайной величины?
7. Что такое условное распределение? Запишите формулу условного распределения дискретной случайной величины (Х, У).
8. Запишите формулу для вычисления вероятности попадания значений двумерной случайной величины в прямоугольную область D.
9. Дайте определение плотности вероятности непрерывной двумерной случайной величины. Запишите формулу связи функции распределения и плотности вероятности.
10. Запишите теорему умножения плотности распределения двумерной случайной величины (Х, У). 52
11. Запишите формулу для вычисления условного математического ожидания двумерной случайной величины (Х, У). Каков вероятностный смысл условного математического ожидания?
12. Дайте определение зависимых и независимых случайных величин.
13. В чем отличие корреляционной зависимости от функциональной зависимости между случайными величинами?

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.2. Статистические оценки параметров распределения

Практическое занятие № 8: Решение задач по теме «статистические оценки параметров распределения»

Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- закрепить навык нахождения статистических оценок параметров распределения;
- проверить на практике знание понятия оценки параметров распределения;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Одна из задач математической статистики: по имеющейся выборке оценить значения числовых характеристик исследуемой случайной величины.

Выборочным средним называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Выборочной дисперсией называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n},$$

а 3. *Выборочным средним квадратическим отклонением* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Так же, как в теории случайных величин справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Заданная таким образом оценка математического ожидания является *несмещенной*, то есть математическое ожидание выборочного среднего равно оцениваемому параметру (математическому ожиданию исследуемой случайной величины). Выборочная дисперсия, напротив, смещенная оценка генеральной дисперсии, и $M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_Г$. Поэтому вводится несмещенная оценка генеральной дисперсии – *исправленная выборочная дисперсия,* которая определяется формулой

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2,$$

Соответственно число $s = \sqrt{s^2}$ является несмещенной точечной оценкой среднего квадратического отклонения.

Точечная оценка при малом объеме выборки может существенно отличаться от оцениваемого параметра, поэтому важно Знать, насколько истинное значение параметра может отклоняться от найденной точечной оценки. Интервал вида $|\theta - \theta^*| < \delta,$ где Θ - истинное значение оцениваемого параметра, а Θ^* - его точечная оценка, называется *доверительным интервалом*, а вероятность $\gamma = p(|\theta - \theta^*| < \delta) -$ *доверительной вероятностью* или *надежностью*. Для построения доверительного интервала требуется знать закон распределения исследуемой случайной величины. Пусть эта величина распределена по нормальному закону. Если при этом известно ее среднее квадратическое отклонение *σ*, то доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\bar{x}_B - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где a – оцениваемое математическое ожидание, x_B – выборочное среднее, n – объем выборки, t – такое значение аргумента функции Лапласа Φ (t), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном среднем квадратическом отклонении доверительный интервал для математического ожидания при заданной надежности γ задается так:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Здесь s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а $t_\gamma = t_\gamma(n,\gamma) -$ критическая точка распределения Стьюдента, значение которой можно найти из таблицы приложения 3 по известным n и γ.

Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения σ имеет вид

$$s\,(1-q) < \sigma < s\,(1+q), \text{если}\, q < 1$$
$$0 < \sigma < s\,(1+q), \;\text{если}\, q \ge 1.$$

где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение,

а $q = q(n, \gamma)$ – значение, определяемое из таблицы приложения 4.

Пример 1 Найдем числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

Решение:

$$\bar{x}_B = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 8 + 7\cdot 7 + 8\cdot 2}{20} = 5{,}55;$$

$$D_B = \frac{4\cdot 3 + 25\cdot 8 + 49\cdot 7 + 64\cdot 2}{20} - 5{,}55^2 = 3{,}3475; \quad \sigma_B = \sqrt{3{,}3475} = 1{,}83.$$

Пример 2 Задана выборка значений признака X, имеющего нормальное распределение:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Требуется: а) найти выборочную среднюю $\bar{x}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s; б) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X; в) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 среднее квадратическое отклонение σ признака X.

Решение:

а) Вычисляем объем выборки: $n = \sum n_i 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 10.$

Тогда

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{1}{10}\left[-2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1\right] = 2;$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}(-2-2)^2\cdot 2 + (1-2)^2\cdot 1 +$$

$$+ (2-2)^2\cdot 2 + (3-2)^2\cdot 2 + (4-2)^2\cdot 2 + (5-2)^2\cdot 1\;\big] =$$

$$= 5{,}76; \quad s = 2{,}4.$$

б) t_γ находим по таблице приложения 2. При $\gamma = 0{,}95$ и n = 10 получаем $t_\gamma = 2{,}26$.

$$\bar{x} - t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2 - 2{,}26\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 0{,}3,$$

Таким образом,

$$\bar{x} + t_{\gamma}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2 + 2{,}26\frac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 3{,}7.$$

Тогда искомый доверительный интервал для математического ожидания a имеет вид $0{,}3<a<3{,}7$.

в) Соответствующие значения q указаны в таблице приложения 3. По заданным $\gamma = 0{,}95$ и n = 10 находим q= 0,65. Так как q<1, то искомый доверительный интервал запишется следующим образом:

$$s\,(1 - 0{,}65) < \sigma < s\,(1 + 0{,}65)$$

или

$$0{,}84 < \sigma < 3{,}96.$$

Выполнить следующее задание:

Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде статистического ряда (в первой строке указаны выборочные значения x_i, во второй - соответствующие им частоты n_i). Требуется вычислить, исправленную выборочную дисперсию s^2 и среднеквадратическое отклонение s, указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X; в) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 среднее квадратическое отклонение σ признака X.

i	3	4	5	6	7	8	9
i		6	0	5			

i			0	1	2	3	4
i			4	0	6	2	

Контрольные вопросы:

1. Определение статистической оценки неизвестного параметра.
2. Какая оценка называется точечной?
3. Каким требованиям должны удовлетворять статистические оценки?
4. Сформулировать определения генеральной средней и генеральной дисперсии.
5. Записать выражения для вычисления выборочной средней, выборочной дисперсии и исправленной дисперсии. Какая из этих оценок не является несмещенной?
6. Методики вычисления границ доверительного интервала для оценки математического ожидания нормально распределенной СВ при известном и неизвестном s.

7. Методика вычисления границ доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ.

8. Доверительный интервал вероятности биноминального распределения по относительной частоте при больших n , при n<100.

Список рекомендованной литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.3. Методы расчета сводных характеристик выборок

Практическое занятие №9: Вычисление выборочной средней и дисперсии

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о числовых характеристиках выборки;
- формирование умений по нахождению числовых характеристиках выборки, оценки вероятности по относительной частоте;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Выборочным средним называется среднее арифметическое значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n},$$

где x_i – варианты, n_i - частоты.

Выборочной дисперсией называется

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n},$$

а 3. Выборочным средним квадратическим отклонением $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Так же, как в теории случайных величин справедлива следующая формула для вычисления выборочной дисперсии:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Заданная таким образом оценка математического ожидания является *несмещенной*, то есть математическое ожидание выборочного среднего равно оцениваемому параметру (математическому ожиданию исследуемой случайной величины). Выборочная дисперсия, напротив, смещенная оценка генеральной дисперсии, и $M(D_B)=\frac{n-1}{n}D_Г$. Поэтому вводится несмещенная оценка генеральной дисперсии – *исправленная выборочная дисперсия,* которая определяется формулой

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x})^2,$$

Соответственно число $s=\sqrt{s^2}$ является несмещенной точечной оценкой среднего квадратического отклонения.

Точечная оценка при малом объеме выборки может существенно отличаться от оцениваемого параметра, поэтому важно Знать, насколько истинное значение параметра может отклоняться от найденной точечной оценки. Интервал вида $|\theta-\theta^*|<\delta,$ где Θ - истинное значение оцениваемого параметра, а Θ^* - его точечная оценка, называется *доверительным интервалом*, а вероятность $\gamma=p(|\theta-\theta^*|<\delta)-$ *доверительной вероятностью* или *надежностью*. Для построения доверительного интервала требуется знать закон распределения исследуемой случайной величины. Пусть эта величина распределена по нормальному закону. Если при этом известно ее среднее квадратическое отклонение *σ*, то доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\overline{x}_B-\frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_B+\frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}},$$

где a – оцениваемое математическое ожидание, x_B – выборочное среднее, n – объем выборки, t – такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном среднем квадратическом отклонении доверительный интервал для математического ожидания при заданной надежности γ задается так:

$$\overline{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}},$$

Здесь s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а $t_\gamma=t_\gamma(n,\gamma)-$ критическая точка распределения Стьюдента, значение которой можно найти из таблицы приложения 3 по известным n и γ.

Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения σ имеет вид

$$s\,(1-q)<\sigma<s\,(1+q),\text{если}\,q<1$$
$$0<\sigma<s\,(1+q),\ \text{если}\,q\geq 1.$$

где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение,
а $q=q(n,\gamma)$ – значение, определяемое из таблицы приложения 4.

Пример 1 Найдем числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

Решение:

$$\overline{x}_B=\frac{2\cdot3+5\cdot8+7\cdot7+8\cdot2}{20}=5{,}55;$$

$$D_B=\frac{4\cdot3+25\cdot8+49\cdot7+64\cdot2}{20}-5{,}55^2=3{,}3475;\quad \sigma_B=\sqrt{3{,}3475}=1{,}83.$$

Пример 2 Задана выборка значений признака X, имеющего нормальное распределение:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Требуется: а) найти выборочную среднюю $\overline{x}$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s; б) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 неизвестное математическое ожидание a признака X;

Решение:

а) Вычисляем объем выборки: $n = \sum n_i 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 10.$

Тогда

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \frac{1}{10}\left[-2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1\right] = 2;$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{9}(-2-2)^2\cdot 2 + (1-2)^2\cdot 1 +$$

$$+ (2-2)^2\cdot 2 + (3-2)^2\cdot 2 + (4-2)^2\cdot 2 + (5-2)^2\cdot 1 \ \ ] =$$

$$= 5{,}76; \quad s = 2{,}4.$$

Выполнить следующие задания:

Найти числовые характеристики выборки, заданной статистическим рядом

x_i	2	5	7	8
n_i	3	8	7	2

x_i	-1	1	3	5
n_i	3	8	7	2

Контрольные вопросы:

1. Какие ряды называют вариационными?
2. Какие меры вариации знаете для вариационных рядов?
3. Назовите формулу для вычисления колеблемости признака?
4. Назовите формулы для вычисления мер вариации для рядов по несгруппированным данным.
5. Назовите формулы для вычисления мер вариации для рядов по сгруппированным данным.
6. Для каких рядов применяют формулы вычисления средней величины изучаемого признака и дисперсии по способу моментов?
7. Назовите формулу для вычисления средней величины по способу моментов.
8. Назовите формулу для вычисления дисперсии по способу моментов.
9. Почему значения дисперсии и среднего значения признака по сгруппированным и несгруппированным данным, вычисленные в лабораторной работе, отличаются?
10. Что называют условным нулём при расчёте средней и дисперсии по способу моментов?

11. Чем отличаются формулы для расчёта средних величин стоимости ОПФ и стоимости валовой продукции по сгруппированным данным?

12. Опишите алгоритм проведения группировки в лабораторной работе.
13. Опишите правило 3 σ.
14. Сделайте выводы по результатам выполненной работы.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.5. Интервальная оценка математического ожидания

Практическое занятие №10: Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 1)

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение оценивать математическое ожидание и вероятность события;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Интервальной называют ***оценку***, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Допустим, что для изучения некоторой *случайной величины X* (признака генеральной совокупности) необходимо по статистическим данным произвести *оценку неизвестного ее параметра θ* (это может быть M(*X*), D(*X*) или *p*) с определенной степенью точности и надежности, т. е. надо *указать границы, в которых практически достоверно лежит этот неизвестный параметр θ.*

Это означает, что надо найти такую выборочную оценку $\bar{\theta}$ для искомого параметра *θ*, при которой с ***наибольшей вероятностью***(***надежностью***) будет выполняться неравенство:

$$|\theta-\bar{\theta}|<\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

Отсюда видно, что чем меньше *e*, тем точнее характеризуется неизвестный параметр *θ* с помощью выборочной оценки $\bar{\theta}$. Следовательно, число *e* характеризует ***точность оценки*** параметра *θ*.

Надежность выполнения неравенства $\left|\theta-\bar{\theta}\right|<\varepsilon,$ *оценивается числом* g ($\alpha = 1 - \gamma$), *которое называют* ***доверительной вероятностью***:

$$g = P(\left|\theta-\bar{\theta}\right|<\varepsilon). \tag{1.11}$$

Итак, число e характеризует ***точность оценки параметра θ***; число g – характеризует ***надежность оценки параметра θ***.

В практических задачах либо заранее задается надежность g (риск α) и надо найти точность оценки, либо, наоборот, задается точность e, а требуется определить надежность оценки.

Как правило, доверительную вероятность g задают числом, близким к единице: 0,95; 0,97; 0,99; 0,999.

Формула (1.11) означает, что с вероятностью g неизвестное значение параметра θ находится в интервале $I_g = (\bar{\theta} - e,\ \bar{\theta} + e)$.

Очевидно, чем больше требуется точность e (т. е., чем меньше длина интервала), тем меньше вероятность накрыть интервалом I_g искомый параметр θ, и, наоборот, с уменьшением точности e (увеличением длины интервала) увеличивается надежность g накрыть интервалом I_g параметр θ (рис. 1.5).

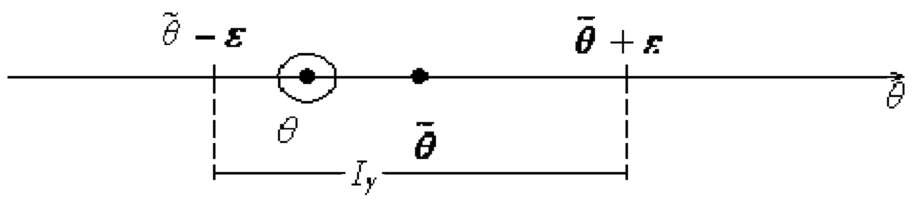


Рис. 1.5. Доверительный интервал

Замечание. Если число $g = 0,95$, это означает, что в среднем в 95 случаях из 100 интервал I_g накроет параметр θ и в 5 случаях из 100 не накроет его.

Оценка $\bar{\theta}$, будучи функцией случайной выборки, является случайной величиной, ε также случайна: ее значение зависит от вероятности γ и, как правило, от выборки. Поэтому доверительный интервал случаен и выражение (1.11) следует читать так: «Интервал ($\bar{\theta}-\varepsilon$, $\bar{\theta}+\varepsilon$) накроет параметр θ с вероятностью γ», а не «Параметр θ попадет в интервал ($\bar{\theta}-\varepsilon$, $\bar{\theta}+\varepsilon$) с вероятностью γ».

В формуле (1.11) границы доверительного интервала симметричны относительно точечной оценки $\bar{\theta}$. Однако не всегда удается построить интервал, обладающий таким свойством. Для получения доверительного интервала наименьшей длины при заданном объеме выборки n и заданной доверительной вероятности γ в качестве оценки $\bar{\theta}$ параметра θ следует брать эффективную или асимптотически эффективную оценку.

Существует два подхода к построению доверительных интервалов. ***Первый подход***, если его удается реализовать, позволяет строить доверительные интервалы при каждом конечном объеме выборки n. Он основан на *подборе* такой *функции* $\psi\left(\bar{\theta},\theta\right)$, называемой в дальнейшем *статистикой*, чтобы

1) ее закон распределения был известен и не зависел от θ;

2) функция $\psi\left(\bar{\theta},\theta\right)$ была непрерывной и строго монотонной по θ.

Задавшись доверительной вероятностью γ, связанной с риском α формулой $\gamma = 1 - \alpha$, находят двусторонние критические границы $\underline{\psi}_\alpha$ и $\overline{\psi}_\alpha$, отвечающие вероятности α. Тогда с вероятностью γ выполняется неравенство

$$\underline{\psi}_\alpha < \psi(\bar{\theta},\theta) < \overline{\psi}_\alpha. \tag{1.12}$$

Решив это неравенство относительно θ, находят границы доверительного интервала для θ. Если плотность распределения статистики $\psi(\bar{\theta},\theta)$ симметрична относительно оси *Oy,* то доверительный интервал симметричен относительно $\bar{\theta}$.

Второй подход, получивший название *асимптотического* подхода, более универсален; однако он использует асимптотические свойства точечных оценок и поэтому пригоден лишь при достаточно больших объемах выборки.

Рассмотрим первый подход на примерах доверительного оценивания параметров нормального распределения.

Интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии

Итак, $X \sim N(a,\sigma)$ (случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ), причем значение параметра a не известно, а значение дисперсии σ^2 известно.

При $X \sim N(a, \sigma/\sqrt{n})$ эффективной оценкой параметра a является $\bar{x}$, при этом $\bar{X} \sim N(a, \sigma/\sqrt{n})$. Статистика $Z = \dfrac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}}$ имеет распределение $N(0;\,1)$ независимо от значения параметра a и как функция параметра a непрерывна и строго монотонна. Следовательно, с учетом неравенства (1.12) и симметричности двусторонних критических границ распределения $N(0;\,1)$ будем иметь:

$$P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha = \gamma.$$

Решая неравенство $-u_\alpha < \dfrac{\bar{x}-a}{\sigma\sqrt{n}} < u_\alpha$ относительно a, получим, что с вероятностью $1 - \alpha$ выполняется неравенство

$$\bar{x} - u_\alpha \sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + u_\alpha \sigma/\sqrt{n} u_\alpha, \tag{1.13}$$

при этом

$$\varepsilon = u_\alpha \sigma/\sqrt{n}. \tag{1.14}$$

Число u_α находят по прил. 3 из условия $\Phi(u_\alpha) = \gamma/2$.

Замечание. Если n велико, оценку (1.13) можно использовать и при отсутствии нормального распределения величины X, так как в силу следствия из центральной предельной теоремы при случайной выборке большого объема n

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma\sqrt{n}} \approx Z.$$

В частности, если $X = \mu$, где μ – случайное число успехов в большом числе n испытаний Бернулли, то

$$\frac{\mu / n - p}{\sqrt{pq / n}} \approx Z,$$

и с вероятностью $\approx 1 - \alpha$ для вероятности p успеха в единичном испытании выполняется неравенство

$$\mu / n - u_\alpha \sqrt{pq / n} < p < \mu / n + u_\alpha \sqrt{pq / n}. \qquad 1.15)$$

Заменяя значения p и $q = 1 - p$ в левой и правой частях неравенства (1.15) их оценками $\tilde{p} = \mu / n$ и $\tilde{q} = 1 - p$, что допустимо при большом n, получим приближенный доверительный интервал для вероятности p:

$$\tilde{p} - u_\alpha \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} / n} < p < \tilde{p} + u_\alpha \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} / n}. \qquad (1.16)$$

Пример 1.7. Фирма коммунального хозяйства желает на основе выборки оценить среднюю квартплату за квартиры определенного типа с надежностью не менее 99 % и погрешностью, меньшей 10 д. е. Предполагая, что квартплата имеет нормальное распределение со средним квадратичным отклонением, не превышающим 35 д. е., найдите минимальный объем выборки.

Решение. По условию требуется найти такое n, при котором $P\left(\left|\bar{x} - a\right| < 10\right) \geq 0{,}99$, где a и $\bar{x}$ – генеральная и выборочная средние.

Приравняв $\gamma = 0{,}99$, $\alpha = 1 - \gamma$, из прил. 3 найдем число u_a, при котором $\Phi(u_a) = \gamma / 2 = 0{,}495$; $u_{0,01} = 2{,}6$. При $\varepsilon = 10$ и $\sigma = 35$ из формулы (1.14) получим $n = \frac{u_{0,01}^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = 82{,}81$. Но так как с ростом γ и уменьшением ε растет n, то $n \geq 82{,}81$ и $n_{\min} = 83$ (конечно, при уменьшении верхней границы для σ будет уменьшаться и $n_{\min}$).

1.3.3. Интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии

Итак, $X \sim N(a,\sigma)$, причем числовые значения ни a, ни σ^2 не известны. По случайной выборке найдем эффективную оценку параметра a: $\bar{x}$ и оценку

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - x\right)^2$$

параметра σ^2.

Построение интервальной оценки для a основано на статистике

$$t(n-1) = \frac{\bar{x} - a}{S / \sqrt{n}},$$

которая при случайной выборке из генеральной совокупности $X \sim N(a,\sigma)$ имеет распределение Стьюдента с $(n - 1)$ степенью свободы независимо от значения параметра a и как функция параметра a непрерывна и строго монотонна.

С учетом неравенства (1.12) и симметричности двусторонних критических границ распределения Стьюдента будем иметь:

$$P\left(-t_\alpha < t(n-1) < t_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Решая неравенство

$$-t_\alpha < \frac{\overline{X}-a}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha$$

относительно a, получим, что с вероятностью $1-\alpha$ выполняется неравенство

$$\bar{x}-t_\alpha S/\sqrt{n} < a < \overline{X}+t_\alpha S/\sqrt{n}, \qquad (1.17)$$

и ошибка оценки $\bar{x}$ при неизвестном значении параметра σ^2

$$\varepsilon = t_\alpha S/\sqrt{n}, \qquad (1.18)$$

где число t_α находят по прил. 4 при $k = n-1$ и $p = \alpha$.

Замечание. При $k = n-1 > 30$ случайная величина $t(k)$ имеет распределение, близкое к $N(0;1)$, поэтому с вероятностью $\approx\gamma$

$$\bar{x}-u_\alpha S/\sqrt{n} < a < \overline{X}+u_\alpha S/\sqrt{n}, \qquad (1.19)$$

где $\Phi(u_a) = \gamma/2$.

Пример 1.8. Для отрасли, включающей 1200 фирм, составлена случайная выборка из 19 фирм. По выборке оказалось, что в фирме в среднем работают 77,5 человек при среднем квадратичном отклонении $s = 25$ человек. Пользуясь 95%-ным доверительным интервалом, оцените среднее число работающих в фирме по всей отрасли и общее число работающих в отрасли. Предполагается, что количество работников фирмы имеет нормальное распределение.

Решение. При $k = n-1 = 18$ и $p = \gamma = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}05$ найдем в прил. 4 $t_{0,05} = 2{,}10$. Доверительный интервал (1.17) примет вид: (65,5; 89,5). С вероятностью 95 % можно утверждать, что этот интервал накроет среднее число работающих в фирме по всей отрасли. Тогда доверительный интервал для числа работающих в отрасли в целом таков: (1200 – 65,5;1200 + 89,5) или (1134,5; 1289,5).

Интервальная оценка дисперсии (среднего квадратичного отклонения) при известном математическом ожидании

Эффективной оценкой дисперсии в этом случае является

$$\tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2.$$

Используются два варианта интервальной оценки для $\sigma^2(\sigma)$.

1. Основу первого варианта составляет статистика

$$\chi^2(n) = n\tilde{D}/\sigma^2, \qquad (1.20)$$

которая имеет распределение χ^2 с n степенями свободы независимо от значения параметра σ^2 и как функция параметра $\sigma^2 > 0$ непрерывна и строго монотонна.

Следовательно, с учетом неравенства (1.12) будем иметь:

$$P\left(\underline{\chi}_\alpha^2 < \chi^2(n) < \overline{\chi}_\alpha^2\right) = \gamma = 1-\alpha,$$

где $\underline{\chi}_\alpha^2$ и $\overline{\chi}_\alpha^2$ двусторонние критические границы χ^2-распределения с n степенями свободы.

Решая неравенство $\underline{\chi}_\alpha^2 < \dfrac{n\tilde{D}}{\sigma^2} < \overline{\chi}_\alpha^2$ относительно σ^2, получим, что с вероятностью γ выполняется неравенство

$$\frac{n\tilde{D}}{\overline{\chi}_\alpha^2} < \sigma^2 < \frac{n\tilde{D}}{\underline{\chi}_\alpha^2}, \qquad (1.21)$$

и с такой же вероятностью выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{n\tilde{D}}{\overline{\chi}_\alpha^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{n\tilde{D}}{\underline{\chi}_\alpha^2}}. \qquad (1.22)$$

Числа $\underline{\chi}_\alpha^2$ и $\overline{\chi}_\alpha^2$ находят по прил. 1 $k = n$ и соответственно при $p = \alpha/2$ и $p = 1 - \alpha/2$. Интервальная оценка (1.22) не симметрична относительно $\tilde{D}$.

2. Второй вариант предполагает нахождение интервальной оценки для σ при заданной надежности γ в виде

$$\tilde{D}\max\left(0;1-\delta_\alpha\right) < \sigma < \tilde{D}\left(1+\delta_\alpha\right). \qquad (1.23)$$

При $\delta_\alpha < 1$ границы этой оценки симметричны относительно $\tilde{D}$, и ошибка оценки $\tilde{D}$, гарантируемая с вероятностью γ,

$$\varepsilon = \tilde{D}\delta_\alpha. \qquad (1.24)$$

Возникает вопрос: как найти δ_α? Решая неравенство (1.23) относительно $\dfrac{n\tilde{D}}{\sigma^2}$, получим, что с вероятностью $1-\alpha$ выполняется неравенство

$$\frac{n}{\left(1+\delta_\alpha\right)^2} < \frac{n\tilde{D}}{\sigma^2} < \frac{n}{\max^2\left(0;1-\delta_\alpha\right)}, \qquad (1.25)$$

или, учитывая формулу (1.20) и заменяя n на k, а α на p, получим

$$P\left(\frac{k}{\left(1+\delta_p\right)^2} < \chi^2(k) < \frac{k}{\max^2\left(0;1-\delta_p\right)}\right) = 1-p. \qquad (1.26)$$

Значения δ, удовлетворяющие равенству (1.26) при различных значениях p и k, приведены в прил. 5.

Итак,

$$P\left(\tilde{D}\max^2\left(0;1-\delta_\alpha\right) < \sigma^2 < \tilde{D}\left(1+\delta_\alpha\right)^2\right) = 1-\alpha = \gamma, \qquad (1.27)$$

где δ_α – число, найденное в прил. 5 при $k = n$ и р = α.

1.3.5. Интервальная оценка дисперсии (среднего квадратичного отклонения) при неизвестном математическом ожидании

Наилучшей точечной оценкой дисперсии в этом случае является

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

и построение интервальной оценки для σ^2 основано на статистике $\chi^2(n-1) = (n-1)s^2/\sigma^2$, которая при случайной выборке из генеральной совокупности $X \sim N(a,\sigma)$ имеет распределение χ^2 с $(n–1)$ степенью свободы.

Проделав выкладки для величины $\chi^2(n–1)$, подобные выкладкам при известном математическом ожидании, получим два варианта интервальной оценки для σ^2 (σ):

1-й вариант: $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\overline{\chi}^2_\alpha} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\underline{\chi}^2_\alpha}\right) = 1-\alpha; \qquad (1.28)$$

$$P\left(\sqrt{(n-1)S^2/\overline{\chi}^2_\alpha} < \sigma < \sqrt{(n-1)S^2/\underline{\chi}^2_\alpha}\right) = 1-\alpha, \qquad (1.29)$$

где числа $\underline{\chi}^2_\alpha$ и $\overline{\chi}^2_\alpha$ и находят по прил. 6 при $k = n - 1$ и соответственно при р = $\alpha/2$ и $p = 1 - \alpha/2$.

2-й вариант: $$P\left(S^2\max{}^2(0;1-\delta_\alpha) < \sigma^2 < S^2(1+\delta_\alpha)^2\right) = 1-\alpha, \qquad (1.30)$$

$$P\left(S\max(0;1-\delta_\alpha) < \sigma < S(1+\delta_\alpha)\right) = 1-\alpha, \qquad (1.31)$$

при этом ошибка ε оценки S, гарантируемая с вероятностью γ:

$$\varepsilon = S\delta_\alpha. \qquad (1.32)$$

Число δ_α находят по прил. 5 при $k = n - 1$ и $p = \alpha$.

Замечание. При $k = n - 1 > 30$ случайная величина $\chi^2(k)$ имеет распределение, близкое к $N^2\left(\sqrt{k-1/\sqrt{2}}, 1/\sqrt{2}\right)$, поэтому с вероятностью $\approx 1- \alpha$

$$\frac{2(n-1)S^2}{\left(\sqrt{2n-3}+u_\alpha\right)^2} < \sigma^2 < \frac{2(n-1)S^2}{\left(\sqrt{2n-3}-u_\alpha\right)^2}, \qquad (1.33)$$

где $\Phi(u_a) = \gamma/2$.

Пример 1.9. Вариация ежесуточного дохода случайно выбранных 10 киосков некоторой фирмы, измеренная величиной $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$, где X_i – доход i-го киоска, оказалась равной 100 д. е. Найдите такое ε, при котором с надежностью 90 % можно гарантировать, что вариация дохода по всем киоскам фирмы не выйдет за пределы 100±ε. Предполагается, что доход – нормально распределенная величина.

Решение. Так как средний доход киоска по всей фирме неизвестен и интервал для σ должен быть симметричным относительно S, для расчета ошибки оценки S при $\gamma = 0{,}9$ воспользуемся формулой (1.32).

При $k = 9$ и $p = \alpha = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ по прил. 5 найдем $\delta_{0,1} = 0{,}476$; тогда $\varepsilon = 47{,}6$. С надежностью 90 % можно утверждать, что генеральная вариация дохода киоска не выйдет за пределы 100±47,6.

Пример 1.10. Пользуясь 90%-ным доверительным интервалом, оцените в условиях примера 1.8 вариацию работающих в фирме по всей отрасли.

Решение. По условию $n = 19$, $S = 25$, $\gamma = 0{,}9$. Найдем два варианта доверительного интервала:

1) согласно формуле (1.29)

$$P\left(\sqrt{18\cdot 25^2/\overline{\chi}^2_{0,1}}<\sigma<\sqrt{18\cdot 25^2/\underline{\chi}^2_{0,1}}\right)=0{,}9,$$

а так как при $k = n - 1 = 18$ верхняя доверительная граница $\underline{\chi}^2_{0,1}=28{,}87$, а нижняя $\overline{\chi}^2_{0,1}=9{,}39$ (см. прил. 1), то $19{,}740 < \sigma < 34{,}613$ – эта оценка не симметрична относительно S;

2) согласно уравнению (1.31)

$$P\left(25\max\left(0;1-\delta_{0,1}\right)<\sigma<25\left(1+\delta_{0,1}\right)\right)=0{,}9,$$

а так как при $k = n - 1 = 18$ $\delta_{0,1} = 0{,}297$ (см. прил. 5), то $17{,}575 < \sigma < 32{,}425$ – эта оценка симметрична относительно S. Она, как и следовало ожидать, отличается от предыдущей интервальной оценки, однако

$$P(19{,}740 < \sigma < 34{,}613) = P(17{,}575 < \sigma < 32{,}425) = 0{,}9.$$

Выполнить следующие задания:

Задача 1. Случайная величина распределена по нормальному закону с дисперсией равной 9. Сделана случайная выборка с возвратом объема $n = 25$. Найти с надежностью 0,99: а) точность выборочной средней; б) интервальную оценку для неизвестного математического ожидания; в) доверительный интервал, если выборочная средняя равна 20,12.

Задача 2. Найти минимальный объем выборки для проведения исследований, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания по выборочной средней будет равна 0,2 . Известно, что $X \in N(\mu;\sigma^2)$ и $\sigma = 2{,}0$.

Задача 3. Из нормальной совокупности извлечена выборка:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Построить интервальную оценку математического ожидания с надежностью 0,95.

Контрольные вопросы:

1. Что такое *коэффициент доверия*?
2. Что называется квантилью функции распределения случайной величины?
3. Как связана длина *доверительного интервала* с доверительной вероятностью при оценке параметра экспоненциального распределения?
4. В чем смысл применения распределения Стьюдента?
5. В какой функциональной связи находится интервальная *оценка математического ожидания* нормально распределенной случайной величины с параметрами интервала и другими параметрами нормального закона?

Список рекомендованной литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 3. Элементы математической статистики

Тема 3.5. Интервальная оценка математического ожидания

Практическое занятие №11: Интервальное оценивание математического ожидания и вероятности события (часть 2)

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение оценивать математическое ожидание и вероятность события;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Оценки, рассматриваемые ранее, выражались одним числом и поэтому назывались точечными. Однако в ряде задач требуется не только найти для оцениваемого параметра θ числовое значение, но оценить его точность и надежность. Такого рода задачи очень важны при малом числе наблюдений, так как конечная оценка θ_n^* в значительной мере является случайной и приближенная замена θ на θ_n^* может привести к серьезным ошибкам.

Задачу интервального оценивания в самом общем виде можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал, относительно которого с заранее выбранной вероятностью можно сказать, что этот интервал покроет (накроет) оцениваемый параметр.

Для определения точности оценки θ_n^* в математической статистике пользуются доверительными интервалами, а для определения надежности - доверительными вероятностями. Раскроем сущность этих понятий.

Доверительным интервалом для параметра θ называется такой интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ (близкой к единице), утверждать, что он содержит неизвестное значение параметра θ. Пусть θ_n^* - несмещенная оценка параметра θ. Требуется оценить возможную при этом ошибку. По определенным правилам находят такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось соотношение:

$$P(|\theta_n^* - \theta| < \delta) = \gamma \quad \text{или} \quad P(\theta_{min} < \theta < \theta_{max}) = \gamma.$$

Равенство означает, что интервал $[\theta_{min}; \theta_{max}]$, где $\theta_{min} = \theta_n^* - \delta$, а $\theta_{max} = \theta_n^* + \delta$, заключает в себе оцениваемый параметр с вероятностью γ.

γ называют ***доверительной вероятностью*** или ***надежностью*** интервальной оценки, а значение α - ***уровнем значимости***. Нижняя и верхняя граница доверительного интервала θ_1 и θ_2 определяются по результатам наблюдений, следовательно, сам доверительный интервал является случайной величиной. В связи с этим говорят, что доверительный интервал покрывает оцениваемый параметр с вероятностью γ. Выбор γ определяется конкретными условиями решаемой задачи. Надежность принято выбирать равной 0,95; 0,99; 0,999 – тогда событие, состоящее в том, что интервал $[\theta_{min}; \theta_{max}]$, покрывает параметр θ будет практически достоверным.

При этом число δ характеризует точность интервальной оценки: чем меньше δ, тем оценка точнее и наоборот.

На практике часто встречаются нормально распределенные случайные величины (или стремящиеся к нормальному). Рассмотрим интервальные оценки для параметров нормального распределения.

Интервальная оценка математического ожидания при известной дисперсии

Пусть случайная величина $X \in N(\mu; \sigma^2)$ распределена по нормальному закону, причем математическое ожидание μ неизвестно, а дисперсия σ^2 известна. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание. По наблюдениям найдем точечную оценку $\bar{x}$ математического ожидания. Зададимся вероятностью γ и найдем такое число δ, чтобы выполнялось соотношение: $P(\bar{x} - \delta < \mu < \bar{x} + \delta) = \gamma$.

Доказано, что построение доверительного интервала в этом случае осуществляется по формуле:

$$P\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma,$$

где t_γ – значение стандартной нормальной величины, соответствующее надежности $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$, а $\Phi(t)$ – функция Лапласа (см. таблицу Приложения 2). Очевидно, что увеличение надежности γ приводит к увеличению функции $\Phi(t)$ и соответственно увеличению параметра t, что в свою очередь увеличивает величину δ. То есть *увеличение надежности оценки ведет к снижению ее точности* (увеличению погрешности).

При этом точность оценки математического ожидания равна: $\delta = t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что с увеличением объема выборки *n* величина погрешности δ уменьшается, т.е. точность оценки повышается. Эта формула позволяет определить необходимый объем выборки для оценки математического ожидания с наперед заданной точностью и надежностью: $n_{min} \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

Для вычисления значения t_γ можно воспользоваться статистической функцией *НОРМСТОБР(1– α)* мастера функций, где $\alpha = 1 - \gamma$.

<u>Пример 1.</u> Анализ доходности акций на основе случайной выборки за 16 дней показал, что средняя доходность составляет 10,37%. Предполагая, что доходность акций подчиняется нормальному закону распределения с известной дисперсией, равной $4\%^2$*, определить:*

а) ширину доверительного интервала для средней доходности с надежностью 0,97;

б) надежность того, что точность оценивания составит 0,98%;

в) минимальное число наблюдений, которое необходимо провести, чтобы с вероятностью 0,99 можно было утверждать, что средняя доходность заключена в интервале шириной 3%.

Так как дисперсия нормального распределения известна, по таблице Лапласа (Приложение 2):

а) для значения функции $\Phi(t_\gamma) = \frac{0{,}97}{2} = 0{,}485$ *находим значение аргумента* $t_\gamma = 2{,}17$*, откуда ширина доверительного интервала средней доходности* ($\pm\delta$) *составляет:* $2\delta = 2t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 2{,}17 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}} = 2{,}17\%;$

б) из оценки точности математического ожидания $\delta = t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *следует, что* $t_\gamma = \delta \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 0{,}98 \frac{\sqrt{16}}{2} = 1{,}96$*; для значения аргумента находим значение функции Ф(1,96) = 0,475 и* $\gamma = 2 \cdot 0{,}475 = 0{,}95$*, т.е. при надежности 0,95 точность оценивания составит 0,98%;*

в) для значения функции $\Phi(t_\gamma) = \gamma = 0{,}99$ *находим значение аргумента* $t_\gamma = 2{,}58$ *и по формуле определяем:* $n_{min} \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{2{,}58^2 \cdot 2^2}{1{,}5^2} = 11{,}8 \approx 12$*, т.е. необходимо провести 12 измерений для обеспечения заданной точности (3%) и надежности (0,99).*

Интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть случайная величина $X \in N(\mu;\sigma^2)$ распределена по нормальному закону, причем математическое ожидание μ и дисперсия неизвестны. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание. По наблюдениям найдем точечные оценки $\bar{x}$ и S математического ожидания μ и дисперсии σ^2. Зададимся вероятностью γ и найдем такое число δ, чтобы выполнялось соотношение: $P(\bar{x} - \delta < \mu < \bar{x} + \delta) = \gamma$.

Доказано, что построение доверительного интервала в этом случае осуществляется по формуле:

$$P\left(\bar{x} - t_{\gamma_t}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + t_{\gamma_t}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma,$$

где t_α – значение функции распределения Стьюдента (*t*-распределения) (табл. Приложения 3), соответствующее степеням свободы $k = n - 1$ и надежности γ.

При этом точность оценки математического ожидания равна: $\delta = t_{\gamma_t}\frac{s}{\sqrt{n-1}}$.

Для вычисления t_{γ_t} можно воспользоваться статистической функцией *СТЬЮДРАСПОБР(α; n - 1)* мастера функций, где $\alpha = 1 - \gamma$.

<u>Пример 2.</u> Анализ доходности акций на основе случайной выборки за 16 дней показал, что средняя доходность составляет 10,37% при рассеянии S=2,5%. Предполагая, что доходность акций подчиняется нормальному закону распределения, определить:

а) верхнюю границу доверительного интервала для средней доходности с надежностью 0,95;

б) надежность того, что средняя доходность заключена в интервале $[8{,}37\%; 12{,}37\%]$.

Так как дисперсия нормального распределения неизвестна (и по выборке определена ее точечная оценка) используем функцию распределения Стьюдента (Приложение 3):

а) для заданной надежности 0,95 и числа степеней свободы $k = 16 - 1 = 15$ *найдем значение функции* t_{γ_t}*(0,95; 15) = 2,15 и верхняя граница доверительного интервала составит:*

$$\mu_{max} = \bar{x} + t_{\gamma_t}\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 10{,}37 + 2{,}15 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{16-1}} = 11{,}76\%.$$

б) *поскольку интервал симметричен относительно точечной оценки математического ожидания, точность оценки составляет 12,37 – 10,37 = 2%, тогда из формулы* $\delta = t_{\gamma_t}\frac{s}{\sqrt{n-1}}$ *определяем параметр* t_{γ_t}*:*

$t_{\gamma_t} = \delta\frac{\sqrt{n-1}}{S} = 2\frac{\sqrt{16-1}}{2,5} = 3{,}098$ и по таблице t-распределения Стьюдента (Приложение 3) для числа степеней свободы k = 16 – 1 = 15 берем ближайшее к полученному значению t_{γ_t} значение надежности $\gamma \approx$ 0,99.

Интервальная оценка среднего квадратичного отклонения и дисперсии

Пусть случайная величина $X \in N(\mu;\sigma^2)$ распределена по нормальному закону, причем математическое ожидание μ и дисперсия неизвестны. Требуется оценить неизвестное среднее квадратичное отклонение, используя его точечную оценку S, найденную по выборке. Зададимся вероятностью γ и найдем такое число δ, чтобы выполнялось соотношение:

$$P(S-\delta < \sigma < S+\delta) = \gamma \text{ (при } \delta < S).$$

Поскольку дисперсия и среднее квадратичное отклонение всегда положительны, то в общем случае приведенное соотношение уточняется:

$$P(max\{0;(S-\delta)\} < \sigma < S+\delta) = \gamma\,.$$

Можно доказать, что построение доверительного интервала в этом случае для среднего квадратичного отклонения осуществляется по формуле:

$$P(max\{0;S(1-q)\} < \sigma < S(1+q)) = \gamma,$$

где q – значение функции распределения Пирсона (χ^2-распределения) (Приложение 4), соответствующее степеням свободы $k = n-1$ и надежности γ.

При этом точность оценки среднего квадратичного отклонения равна: $\delta = Sq$.

Для построения доверительного интервала для дисперсии нижнюю и верхнюю границу интервала среднего квадратичного отклонения возводят в квадрат.

Для вычисления параметра q можно воспользоваться статистической функцией *ХИ2ОБР(α; n - 1)* мастера функций, где $\alpha = 1-\gamma$.

<u>Пример 3.</u> Для анализа производительности труда были отобраны 15 работников предприятия. На основании проведенных испытаний была получена оценка исправленного среднего квадратичного отклонения 20 изд./ч. Предполагая, что производительность труда работников подчиняется нормальному закону распределения определить:

а) с надежностью 0,95 границы доверительного интервала для дисперсии;

б) надежность того, что истинное значение среднего квадратичного отклонения заключено в интервале [6 изд./ч.; 34 изд./ч.].

а) для заданной надежности 0,95 и числа степеней свободы k = 15 – 1 = 14 по Приложению 4 найдем значение q = q(0,95;14) = 0,48; тогда границы доверительного интервала соответственно равны:

$S_{min} = max\{0;20(1-0{,}48)\} = max\{0;10{,}4\} = 10{,}4$ *и* $S_{max} = 20(1+0{,}48) = 29{,}6$,
т. е. доверительные интервалы для среднего квадратичного отклонения [10 изд./ч.; 30 изд./ч.] и для дисперсии [108 (изд./ч.)^2; 876 (изд./ч.)^2].

б) поскольку интервал симметричен относительно точечной оценки среднего квадратичного отклонения точность оценки составляет 34 – 20 = 14 изд./ч., тогда из формулы $\delta = Sq$ определяем параметр q:

$q = \frac{\delta}{S} = \frac{14}{20} = 0{,}7$ и по таблице χ^2-распределения Пирсона (Приложение 4) для числа степеней свободы k = 15 – 1 = 14 берем ближайшее к полученному значению q значение надежности $\gamma \approx$ 0,99.

Интервальная оценка вероятности события

При рассмотрении точечных оценок было показано, что "хорошей" оценкой вероятности события является частость $w = m / n$, где m – число испытаний, в которых произошло событие A, а n – общее число независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p или не произойти с вероятностью $q = 1 - p$ (т.е. последовательность испытаний Бернулли).

Зададимся вероятностью γ и найдем границы, чтобы выполнялось соотношение:

$$P(p_{min} < p < p_{max}) = \gamma.$$

Можно доказать, что построение доверительного интервала для вероятности в этом случае (при больших значениях $n >> 100$) осуществляется по формуле:

$$P\left(w - t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} < p < w + t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = \gamma,$$

где t_γ – значение стандартной нормальной величины, соответствующее надежности $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$, а $\Phi(t)$ – функция Лапласа (см. таблицу Приложения 2).

При этом точность оценки вероятности равна: $\delta = t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$.

<u>Пример 4.</u> При проведении анализа эффективности рекламы инструментальных наборов, размещенной в интернете, была организована случайная выборка, объем которой составил 500 человек. В результате проведенного опроса выяснилось, что для 200 человек источником информации послужили объявления, размещенные в сети. В предположении о биномиальном законе распределения определить:

а) с надежностью 0,95 нижнюю границу вероятности того, что один случайно отобранный покупатель воспользовался рекламой в интернете;

б) надежность того, что использование рекламы в интернете будет находиться в интервале [0,30;0,50].

Так как объем выборки достаточно большой, используем для построения доверительного интервала функцию Лапласа (Приложение 2):

а) для заданной надежности 0,95 определим значение функции Ф(t_γ) = 0,95 /2 = 0,475, по таблицам функции Лапласа находим значение аргумента t_γ= 1,96, откуда нижняя граница доверительного интервала вероятности: $p_{min} = \frac{200}{500} - 1{,}96\sqrt{\frac{200/500(1-200/500)}{500}} = 0{,}36.$

б) поскольку интервал симметричен относительно точечной оценки вероятности точность оценки составляет $\delta = t_\gamma\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = 0{,}10$, *откуда* $t_\gamma = \delta\sqrt{\frac{n}{w(1-w)}} = 0{,}1\sqrt{\frac{500}{0{,}4(1-0{,}4)}} = 4{,}56$, *по таблице Приложения 2 найдем значение функции Лапласа Ф(4,56) = 0,499998, но* γ *= 2·0,499998 = 0,999996, т.е. практически достоверное событие.*

Выполнить следующие задания:

<u>*Задача 1.*</u> По данным 16 независимых равноточных измерений нормально распределенной физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений 23,161 и исправленное среднее квадратичное отклонение 0,400. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,95.

<u>*Задача 2.*</u> Известно, что $X \in N(\mu;\sigma^2)$. По данным выборки объема 18 найдено исправленное среднее квадратичное отклонение 2. Найти доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение с надежностью 0,99.

<u>*Задача 3.*</u> Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратичное отклонение случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

<u>*Задача 4.*</u> Из 1000 случайно отобранных деталей оказалось 50 нестандартных. Предположив, что при отборе соблюдаются условия испытаний Бернулли, определить вероятность того, что интервал [0,04;0,06] содержит неизвестную вероятность появления нестандартной детали.

Контрольные вопросы:

1. Что называют доверительным интервалом для неизвестного параметра распределения генеральной совокупности?
2. Что такое доверительная вероятность, уровень значимости, каким требованиям они соответствуют?
3. Перечислите действия, которые необходимо выполнить для построения интервальной оценки параметра распределения?

4. Какие статистики используют при построении доверительных интервалов для математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной и неизвестной дисперсии? Запишите неравенства, определяющие эти интервалы.

5. Укажите статистики, применяемые при построении интервальных оценок для дисперсии нормально распределённой генеральной совокупности при известном и неизвестном математическом ожидании? Запишите неравенства, определяющие эти интервальные оценки.

6. Какие статистики используют при построении доверительных интервалов для отношения дисперсий двух нормально распределённых генеральных совокупностей при известных и неизвестных математических ожиданиях? Запишите неравенства, определяющие эти интервалы.

7. Укажите статистики, применяемые при построении интервальных оценок для разности математических ожиданий двух нормально распределённых генеральных совокупностей при известных и неизвестных, но равных дисперсиях? Запишите неравенства, определяющие эти интервальные оценки.

8. Опишите общий подход к построению приближённых доверительных интервалов для параметров произвольного распределения генеральной совокупности.

9. Постройте приближённый доверительный интервал для неизвестной вероятности успеха в серии испытаний по схеме Бернулли.

Список рекомендованной литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 4. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний

Тема 4.1. Моделирование случайных величин. Метод статистических испытаний

Практическое занятие №12: Моделирование случайных величин, сложных испытаний и их результатов

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение моделировать случайные величины, сложные испытания и их результаты;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

В тех случаях, когда при моделировании необходимо учитывать некоторый случайный фактор (элемент или явление), который невозможно описать аналитически, используют метод моделирования, называемый методом статистических испытаний или методом Монте-Карло. С помощью этого метода может быть решена любая вероятностная задача. Однако использовать его целесообразно в том случае, если решить задачу этим методом проще, чем любым другим.

Суть метода состоит в том, что вместо описания случайных явлений аналитическими зависимостями проводится розыгрыш случайного явления с помощью некоторой процедуры, которая дает случайный результат. С помощью розыгрыша получают одну реализацию случайного явления. Осуществляя многократно такой розыгрыш, накапливают статистический материал (множество реализаций случайной величины), который можно обрабатывать статистическими методами. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 1. Пусть четыре стрелка одновременно стреляют по движущейся цели. Вероятность попадания в цель каждым стрелком равняется 0,5 (попал или не попал). Цель считается пораженной, если в нее попало два или более стрелка. Найти вероятность поражения цели.

Эту задачу можно легко решить методами теории вероятности:

Вероятность поражения цели $P_{пор} = 1 - P_{непор}$.

Вероятность непоражения $P_{непор}$ определяют как число сочетаний, когда в цель не попал ни один стрелок, плюс попал один из стрелков:

$$P_{непор} = 0{,}5^4 + C_4^1 \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^3 = 0{,}5^4 + 4 \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^3 = 0{,}3125,$$

$$P_{пор} = 1 - P_{непор} = 1 - 0{,}3125 = 0{,}6875.$$

Решим эту задачу методом статистических испытаний. Процедуру розыгрыша реализуем подбрасыванием одновременно четырёх монет. Если монета падает лицевой стороной, то считаем, что стрелок попал в цель. Обозначим через m число успешных испытаний. Сделаем N испытаний, тогда в соответствии с теоремой Бернулли

$$P_{пор} = \frac{m}{N}.$$

Пример 2. Пусть есть некоторая цель, на которую бомбардировщики сбрасывают n бомб. Каждая бомба поражает область в виде круга радиусом r (рис. 6). Цель считается пораженной, если одновременно бомбами накрыто K процентов площади S. Найти вероятность поражения цели.

Аналитически решить эту задачу очень трудно. Покажем, как ее можно решить методом статистических испытаний.

Наложим координатную сетку на всю возможную область попадания бомб. Разыграем n точек – координат попадания бомб. Опишем возле каждой точки круг радиусом r (рис. 7) и определим заштрихованную площадь поражения. Если заштрихованная площадь будет составлять K процентов и больше всей площади цели S, то цель считается пораженной, а испытание успешным. В противном случае цель не будет поражена и испытание не успешное.

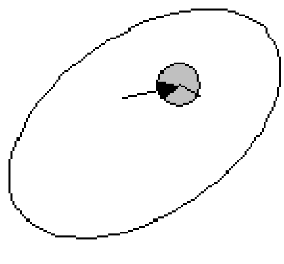


Рис. 6. Пораженная область

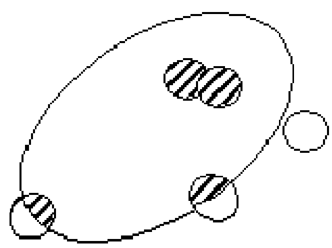


Рис. 7. N попаданий

Выполним N испытаний. Тогда вероятность поражения цели $P_{пор} = \frac{m}{N}$, где m – количество испытании, при которых цель была поражена.

Методом статистических испытаний можно оценить математическое ожидание и другие вероятностные характеристики. Например, оценку математического ожидания площади поражения цели можно определить как $M(S) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i$. При $N \to \infty$ эта оценка будет приближаться к математическому ожиданию в соответствии с законом больших чисел. В этом выражении S_i площадь поражения в i-м испытании.

Алгоритм метода статистических испытаний такой:

1. Определить, что собой будет представлять испытание или розыгрыш.

2. Определить, какое испытание является успешным, а какое – нет.

3. Провести большое количество испытаний.

4. Обработать полученные результаты статистическими методами и рассчитать статистические оценки искомых величин.

К недостаткам метода можно отнести необходимость проведения большого количества испытаний, чтобы получить результат с заданной точностью.

Таким образом, метод статистических испытаний – это метод математического моделирования случайных величин, в котором сама случайность непосредственно включена в процесс моделирования и является его важным элементом. Каждый раз, когда в ход выполнения некоторой операции вмешивается случайный фактор, его влияние моделируется с помощью розыгрыша.

Для эффективного розыгрыша случайных величин используем генераторы случайных чисел. Такие генераторы строятся аппаратными и программными методами. Наиболее применимыми являются программные методы, которые дают возможность получить последовательности псевдослучайных чисел по рекуррентным формулам. Обычно используется мультипликативный конгруэнтный метод, рекуррентное соотношение для которого имеет вид

$$X_i = aX_i(\mathrm{mod}\, m), \qquad (22)$$

где a и m – некоторые константы. Необходимо взять последнее псевдослучайное число X_i, умножить его на постоянный коэффициент a и взять модуль полученного числа по m, то есть разделить на m и получить остаток. Этот остаток и будет следующим псевдослучайный числом X_i. Для двоичного компьютера m =2g -1, где g – длина разрядной сетки. Например, для 32-разрядного компьютера $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$, поскольку один разряд задает знак числа.

В языке GPSS World используется мультипликативный конгруэнтный алгоритм Лехмера с максимальным периодом, который генерирует 2147483647 уникальных случайных чисел без повторения. Эти числа генерируют специальные генераторы, которые обозначаются RN<№>, где № – номер генератора случайных чисел (может принимать значения от 1 до 7). При обращении к этим генераторам выдаются целые случайные числа в диапазоне от 0 до 999 включительно. При использовании генераторов в случайных функциях распределений случайные числа генерируются в диапазоне от 0 до 0,999999 включительно.

Моделирование дискретных случайных величин

Моделирование события. Пусть необходимо смоделировать появление некоторого события A, вероятность наступления которого равняется $P(A)=P$. Обозначим обращения к генератору, который разыгрывает псевдослучайные, равномерно распределенные на интервале (0, 1) числа r_i, через R. Событие A при розыгрыше будет наступать тогда, когда $r < P$ (рис. 8), в противном случае происходит событие A с вероятностью $r > P$.

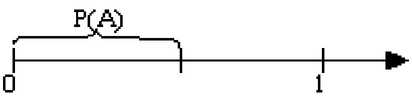


Рис. 8. Вероятность наступления события A

Действительно

$$P(r < P) = \int_0^P f(x)dx = \int_0^P f(r)dr = P = P(A) \qquad (23)$$

Данный метод используется в языке GPSS для блока TRANSFER в статистическом режиме работы, когда транзакты следуют по двум разным направлениям в зависимости от вероятности.

Моделирование группы несовместимых событий. Пусть есть группа несовместимых событий $A_1, A_2,..,A_k$. Известны вероятности наступления событий $P(A_1), P(A_2),..., P(A_k)$. Тогда из-за несовместимости испытаний $\sum_{i=0}^{k} P(A_i) = 1$. Пусть $p_i = P(A_i)$, $p_0 = 0$. На отрезке (0, 1) отложим эти вероятности (рис. 9).

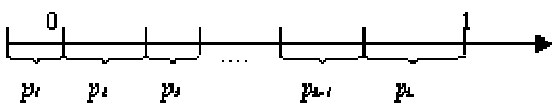


Рис. 9. Вероятности наступления группы несовместимых событий

Если полученное число попало в интервал от $\sum_{k=0}^{i-1} p_k$ до $\sum_{k=0}^{i} p_k$, то произошло событие A_i. Такую процедуру называют определением результата испытания по жребию, и она основывается на формуле

$$P\{\sum_{k=0}^{i-1} p_k < r \le \sum_{k=0}^{i} p_k\} = p_i = P(A_i) \qquad (24)$$

где $p_0 = 0$.

Моделирование случайной дискретной величины. Моделирование случайной дискретной величины выполняется аналогично моделированию группы несовместимых событий. Дискретная случайная величина X задается в соответствии с таблицей, в которой указаны возможное значение величины и его вероятность.

Случайную величину X можно представить как полную группу событий:

$$A_1 = (X = x_1),\ A_2 = (X = x_2),\ \ldots,\ A_n = (X = x_n).$$

Данный метод используется в языке GPSS для моделирования дискретных случайных функций распределения.

Моделирование условного события. Моделирование условного события A, которое происходит при условии, что наступило событие B с вероятностью $P(A/B)$, показано на рис. 10. Сначала моделируем событие B. Если событие B происходит, то моделируем наступление события A, если имеем B, то не моделируем наступление события A.

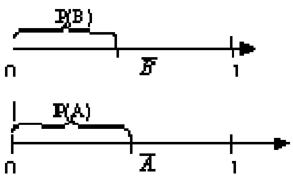


Рис. 10. Моделирование условного события А

Моделирование непрерывных случайных величин. В данном случае используется метод обратной функции. Пусть есть некоторая функция распределения случайной величины (рис. 11). Разыграем на оси ординат точку r, используя функцию $F(x)$. Тогда можем получить значение величины x такое, что $F(x)= r$.

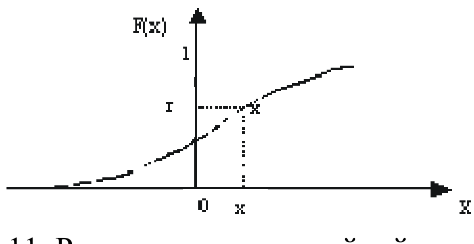


Рис. 11. Распределение случайной величины

Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. По определению она равна вероятности $P(X<x)$. Из рис. 12 очевидно, что

$$P(X < x) = P(R < F(X)) = \int_0^{F(x)} f(r)dr = F(x) \qquad (25)$$

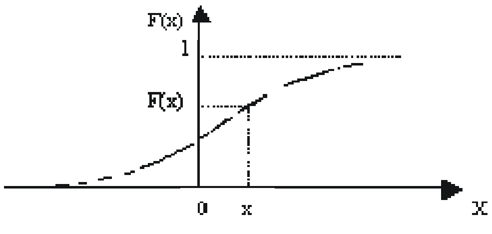


Рис. 12. Распределение случайной величины

Таким образом, последовательность *r1, r2, r3...*, принадлежащая *R(0, 1),* преобразуется в последовательность *x1, x2, x3...*, которая имеет заданную функцию плотности распределения *f(x).*

Моделирование равномерного распределения в интервале (a, b) случайной величины. Для моделирования воспользуемся методом обратной функции. На рис. 13 показана функция плотности равномерного распределения.

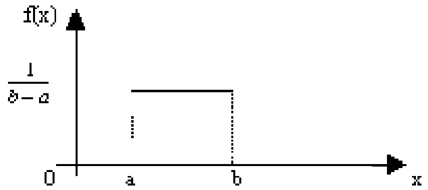


Рис. 13. Функция плотности равномерного распределения

Находим функцию распределения и приравниваем ее к случайному числу

$$R = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, \qquad (26)$$

Отсюда $x = (b-a)R + a$.

Выполнить следующие задания:

Оценить погрешность результата косвенных измерений показателя преломления стекла можно при помощи метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Для этого перепишим формулу (1) для случая измерения углов ***Θ*** и ***ε*** с погрешностями ***δΘ*** и ***δε***

$$\delta n(\delta\Theta, \delta\varepsilon) = \frac{\sin\left[\frac{(\Theta+\delta\Theta+\varepsilon+\delta\varepsilon)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Theta+\delta\Theta}{2}\right)} - \frac{\sin\left[\frac{(\Theta+\varepsilon)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)}, \qquad (2)$$

где:

n - измеренное значение показателя преломления стекла;

Δn - погрешность измерения показателя преломления стекла;

Θ - измеренное значение угла призмы;

ΔΘ - погрешность измерения угла призмы;

ε - измеренное значение угла наименьшего отклонения;

Δε - погрешность измерения угла наименьшего отклонения.

Погрешность единичного измерения показателя преломления стекла будет равна

Метод статистических испытаний

Метод статистических испытаний (МСИ) заключается в получении при помощи ЭВМ выборок случайной погрешности измерения ***ΔΘ*** угла призмы ***Θ*** и случайной погрешности измерения ***Δε*** угла наименьшего отклонения ***ε***. Эти выборки представляют собой векторы (массивы), состоящие из ***N*** значений погрешностей измерений углов ***ΔΘ*** и ***Δε***. При чем, погрешности измерений углов ***ΔΘ*** и ***Δε*** должны, подчинятся прогнозируемому (заданному) виду закона распределения с прогнозируемыми (заданными) параметрами.

Беря ***N*** пар значений погрешностей измерения углов ***δΘ*** и ***δε***, из полученных ранее массивов, рассчитываем по формуле (2), новый массив из ***N*** значений погрешностей измерения показателя преломления стекла ***Δnsm***. Делаем статистическую обработку этого массива погрешностей измерения показателя преломления ***Δnsm*** и получаем следующие оценки статистических характеристик для этих погрешностей:

MΔnsm - среднее выборочное;

σΔnsm – среднее квадратическое отклонение;

RΔnsm – размах выборки.

Для получения наглядного представления о распределении выборки погрешностей ***Δnsm*** строим гистограмму или полигон частот. Статистическую обработку полученных погрешностей необходимо выполнить при помощи Mathcad документа «sod2000m».

Таким образом, для получения оценок статитстических характеристик погрешностей измерения показателя преломления стекла ***Δnsm*** при помощи метода статистических испытаний необходимо:

1. Смоделировать (сгенерировать) по ***N*** случайных погрешностей измерения углов ***ΔΘ*** и ***Δε*** с нужным видом закона распределения и требуемыми статистическими характеристиками ***; MΔΘ***, ***σΔΘ*** и ***MΔε*** и ***σΔε***;
2. При помощи формулы (2) рассчитать массив из ***N*** погрешностей измерения показателя преломления стекла ***Δnsm***;
3. Получить статистические характеристики погрешности измерения показателя преломления стекла ***MΔnsm***,***σΔnsm*** и ***RΔnsm,*** сделав статистическую обработку полученных в пункте 2 погрешностей ***Δnsm***.
4. Исходя из предпосылки ,что рассеивание погрешностей измерения углов ***ΔΘ*** и ***Δε*** подчиняюся нормальному закону определяется практически предельное отклонение погрешности измерения показателя преломления по формуле:

Δnsm=3·σΔnsm.

Порядок выполнения работы

1. Получить задание по работе.
2. Изучить данные методические указания по работе или Word файл “m-opipp-msi” с этими указаниями.
3. Изучить распечатку примера оформления документа Mathcad по данной работе.
4. Загрузить Mathcad файл «m-opipp-msi-zagotovka» и сохранить его («Сохранить как») под новым именем «m-opipp-msi-510IGV», где «510» номер группы, а «IGV» инициалы исполнителя работы. Этот файл надо использовать в качестве заготовки для оформления нового документа по работе.
5. Отредактировать и дополнить загруженный документ в соответствии с полученным заданием.
6. Ознакомиться с Mathcad документом «m-sod2000m» и изучить как он был встроен в Mathcad файл «m-opipp-msi-zagotovka».
7. Сравнить результаты оценки погрешностей измерения показателя преломления, полученные традиционным методом и при помощи метода статистических испытаний, и сделать выводы по проделанной работе.

Работа оформляется в виде документа Mathcad с именем ”m-opipp-NNN-IGV”, где NNN – номер группы, а IGV – инициалы исполнителя раборы. Содержание работа должна состоять из следующих разделов:

1. Титульный лист документа.
2. Ввод результатов измерения углов ***Θ*** и ***ε*** и предельных погрешностей их измерения ***δΘ*** и ***δε***.
3. Расчет показателя преломления стекла ***n*** по результатам измерений углов ***Θ*** и ***ε*** по формуле.
4. Расчет предельной частичной погрешности измерения показателя преломления стекла ***δnδΘ*** из-за предельной погрешности измерения угла призмы ***δΘ*** «методом дифференцирования функции».
5. Расчет предельной частичной погрешности измерения показателя преломления стекла ***δnδε*** из-за предельной погрешности измерения угла наименьшего отклонения ***δε*** «методом дифференцирования функции».

6. Расчет предельной частичной погрешности измерения показателя преломления стекла $\delta n \delta \Theta$ из-за предельной погрешности измерения угла призмы $\delta \Theta$ "аналитическим методом".

7. Расчет предельной частичной погрешности измерения показателя преломления стекла $\delta n \delta \varepsilon$ из-за предельной погрешности измерения угла наименьшего отклонения $\delta \varepsilon$ "аналитическим методом".

8. Сравнение результатов полученных в пунктах 4, 5, 6 и 7.

9. Расчет предельной погрешности измерения показателя преломления стекла δns методом геометрического суммирования.

10. Моделирование выборок единичных погрешностей измерения углов призмы и наименьшего отклонения $\sigma x\ \Theta$ и $\delta \varepsilon$ при помощи встроенной в Mathcad функций rnorm(N, Mx, σx) , где N - объем выборки погрешности x, Mx - выборочное среднее и σx - выборочное среднее квадратическое отклонение погрешности x.

11. Статистическое моделирование N реализаций погрешностей измерения показателя преломления δnsm и графическое представление смоделированных погрешностей.

12. Ввод смоделированных погрешностей в программу "Статистическая обработка данных" с именем "*sod2000m*".

13. Вычисление статистических характеристик Mx, σx и Rx для введенных данных и построение их гистограммы.

14. Вычисление по полученному значению σx практически предельного отклонения погрешности измерения показателя преломления δnsm и сравнение его с полученным ранее значением δns.

15. Выводы по проделанной работе.

Контрольные вопросы:

Приведите определения для следующих понятий:

1. Погрешность измерения;
2. Предельная погрешность измерения;
3. Прямые и косвенные измерения;
4. В чем заключается сущность измерения показателя преломления на гониометре методом наименьшего отклонения?
5. Приведите схему установки для измерения показателя преломления стекла на гониометре методом наименьшего отклонения.
6. В чем заключается сущность расчета погрешности косвенных измерений методом частных производных?
7. Выведите формулу погрешности измерения показателя преломления на гониометре методом наименьшего отклонения.
8. В чем заключается сущность расчета погрешности косвенных измерений методом статистических испытаний?
9. Какие статистические характеристики погрешностей используются для оценки погрешностей измерений?
10. Сравните результаты оценок, полученных при помощи метода частных производных и метода статистических испытаний.
11. Каким образом Вы моделировали (генерировали) случайные величины?
12. Что такое математическая модель погрешности косвенного измерения?
13. Каким образом моделировались выборки случайных погрешностей измерения углов и каким законам рассеивания они подчинялись?

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.

2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.1. Неориентированные графы, основные понятия

Практическое занятие №13: Метрические характеристики графа

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение находить метрические характеристики графа;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая *длина* пути, соединяющего эти вершины. *Расстояние* между вершинами a и b обозначается через $d(a,b)$. Если в графе нет пути, соединяющего a и b, то есть эти вершины принадлежат разным компонентам связности, то *расстояние* между ними считается бесконечным.

Функция $d(x,y)$ обладает следующими свойствами:

1. $d(x,y) \geqslant 0$, причем $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x)$;
3. $d(x,y)+d(y,z) \geqslant d(x,z)$ (неравенство треугольника).

В математике функцию двух переменных, определенную на некотором множестве и удовлетворяющую условиям 1 - 3, называют*метрикой*, а множество, на котором задана *метрика*, - *метрическим пространством*. Таким образом, *множество вершин* любого графа можно рассматривать как метрическое *пространство*.

Расстояние от данной вершины a до наиболее удаленной от нее вершины называется *эксцентриситетом* вершины a и обозначается через $\operatorname{ecc}(a)$. Таким образом,

$$ecc(a)=\max_{x\in VG} d(a,x).$$

Вершину с наименьшим *эксцентриситетом* называют *центральной*, а вершину с наибольшим *эксцентриситетом* - *периферийной*. Множество всех центральных вершин называется *центром* графа. Сама величина наименьшего эксцентриситета называется *радиусом*графа и обозначается через $rad(G)$, а величина наибольшего - *диаметром* и обозначается $diam(G)$. Иначе говоря,

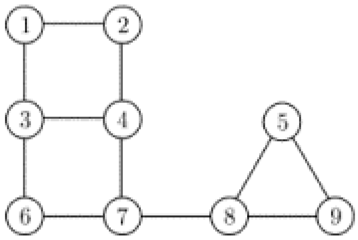
$$rad(G)=\min\nolimits_{x\in VG}\max\nolimits_{y\in VG} d(x,y),$$

$$diam(G)=\max_{x\in VG}\max_{y\in VG} d(x,y).$$

Наименьший *диаметр* имеет полный *граф* - его *диаметр* равен 1. Среди связных графов с n вершинами наибольший *диаметр*, равный $n-1$, имеет цепь P_n.
Если *расстояние* между двумя вершинами равно диаметру графа, то кратчайший *путь*, соединяющий эти вершины, называется*диаметральным путем*, а *подграф*, образованный вершинами и ребрами этого пути, - *диаметральной цепью*.
Для графа, изображенного на рис. 2.3, эксцентриситеты вершин приведены в следующей таблице:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{ecc}(x)$	5	4	4	3	5	3	3	4	5

Центр этого графа составляют вершины $4, 6, 7$; периферийные вершины - $1, 5$ и 9; *радиус* его равен 3, а *диаметр* 5. Одна из *диаметральных цепей* порождается множеством вершин $\{1,3,6,7,8,9\}$.



Выполнить следующие задания:

1. Найти все попарно неизоморфные графы с 5-ю вершинами.
2. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее (n-1)/2, связен.
3. Пусть G и H два графа. Доказать, что если G изоморфен H , то и H изоморфен G.
4. Доказать, что графыG и H, заданные списками ребер, изоморфны.

G : (1,4) (1,5) (1,6) (2,4) (2,5) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6)

H : (1,2) (1,3) (1,5) (2,4) (2,6) (3,4) (3,6) (4,5) (5,6)

5. Докажите, что не существует графа, степени которого все попарно различны.
6. Пусть задан граф G по правилам: вершины соответствуют натуральным числам между a=2 и в=25 с шагом 3. Две вершины смежны, если соответствующие числа взаимно просты. Найти с помощью ПВШ диаметр, диаметральную цепь, радиус и центры графа.
7. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины, если диаметр дерева четный и из двух вершин, если – нечетный.
8. Найдите базисные циклы и разрезы графа, заданного списками смежности:
$\Gamma 1=\{2,4\}$, $\Gamma 2=\{1,3,5,6\}$, $\Gamma 3=\{2,4\}$, $\Gamma 4=\{1,3,5,6,7\}$, $\Gamma 5=\{2,4,6,8\}$
$\Gamma 6=\{2,4,5,7,9\}$, $\Gamma 7=\{4,6,10\}$, $\Gamma 8=\{5,9\}$, $\Gamma 9=\{6,8,10\}$, $\Gamma 10=\{7,9\}$,
9. Является ли двудольным граф, заданный списками смежности: $\Gamma 1=\{2,7,9\}$, $\Gamma 2=\{1,3,5\}$, $\Gamma 3=\{2,4,9\}$, $\Gamma 4=\{3,6\}$,
$\Gamma 5=\{2,8\}$, $\Gamma 6=\{4,7\}$, $\Gamma 7=\{1,6,8\}$, $\Gamma 8=\{5,7,9\}$, $\Gamma 9=\{1,3,8\}$
10. Используя характеристическую функцию, найти число независимости графа, заданного списком ребер: $U=\{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5)\}$
11. Сколько баз содержит циклический матроид, построенный для связного графа с m ребрами. Как найти это число баз?

Контрольные вопросы:

1. Что такое полный граф?
2. Дайте понятие степени вершины графа?
3. Какая вершина графа называется четной?
4. Какая вершина графа называется нечетной?
5. Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин графа?

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.1. Неориентированные графы, основные понятия

Практическое занятие №14: Проверка графа на двудольность, плоскость

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

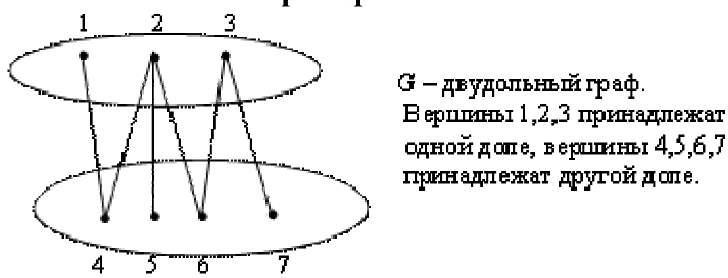
- проверить на практике умение проверять граф на двудольность и плоскость;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Определение 1

Граф называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на две части (доли) так, чтобы концы каждого ребра принадлежали разным долям.

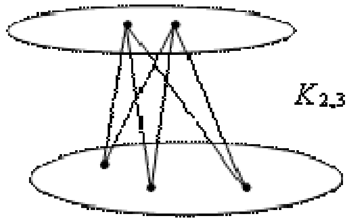
Пример



Определение 2

Двудольный граф называется полным двудольным, если любые две его вершины, принадлежащие разным долям, смежны. Обозначают: $K_{n,m}$ – полный двудольный граф, где в одной доле *n*, а в другой доле *m* вершин.

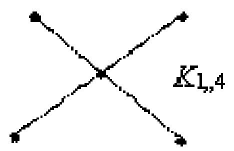
Пример

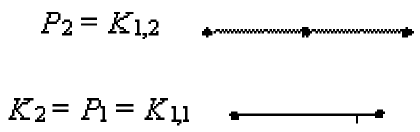


Определение 3

Граф вида $K_{1,n}$ называется звездой порядка n.

Пример

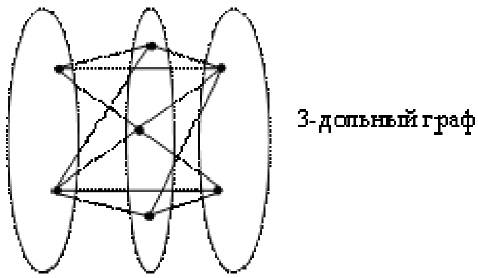




Определение 4

Граф называется k-дольным, если множество его вершин можно разделить на k долей так, чтобы концы любого ребра принадлежали разным долям.

Пример



Теорема 5 (Кёнига, критерий двудольности графа)

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Доказательство

Необходимость. Пусть двудольный граф содержит цикл длины k.
Докажем, что k – четное число. Концы всех его ребер принадлежат разным долям, поэтому, проходя по циклу, мы каждый раз попадаем из одной доли в другую. На последнем шаге мы возвращаемся в исходную вершину, а значит, делаем четное число таких «переходов», поэтому k – четное число.

Достаточность. Пусть граф G не содержит циклов нечетной длины, то есть все имеющиеся в нем циклы четной длины. Разделим все вершины графа G на две части. В первую часть попадут все вершины, расстояние до которых от фиксированной вершины v четное число, и сама вершина v, а во вторую – все остальные вершины. Осталось показать, что никакие две вершины, попавшие в один класс не смежны. Предположим противное, то есть некоторые вершины x и y, принадлежащие одному из двух полученных множеств, смежны. Рассмотрим цикл, полученный в результате объединения ребра $(x; y)$ и кратчайших цепей, соединяющих вершины x и y с вершиной v. Длина этого цикла равна сумме длин этих двух цепей плюс один. Но длины этих двух цепей одинаковой четности, поэтому их сумма – четное число, значит длина получившегося цикла – нечетное число. Пришли к противоречию, значит никакие две вершины, попавшие с один класс, не смежны.

Следствие 6

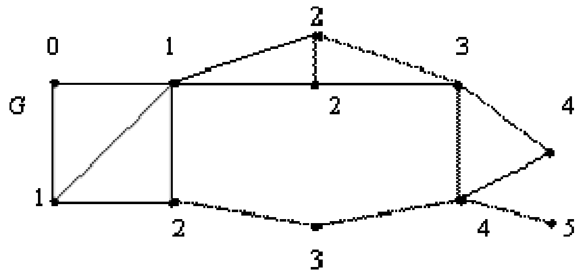
Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины.

Алгоритм поиска в ширину

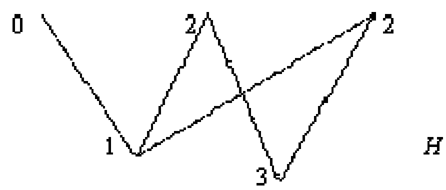
Выбираем произвольную вершину в графе и приписываем ей номер ноль. Всем вершинам из ее окружения приписываем номер один. Далее рассматриваем поочередно окружение всех вершин с номером один и еще не занумерованным вершинам приписываем номер два, и так далее, пока это возможно. Если граф *G* связен, то поиск в ширину занумерует все его вершины.

Далее разобьем множество вершин на две части V_1, V_2, отнеся к V_1 все вершины с четными номерами, а к V_2 - все остальные. Если среди вершин множества V_1 нет смежных и среди вершин множества V_2 нет смежных (достаточно проверить все пары вершин с одинаковыми номерами), то граф *G* – двудольный.

Примеры



Граф *G* не является двудольным



Граф *H* – двудольный.

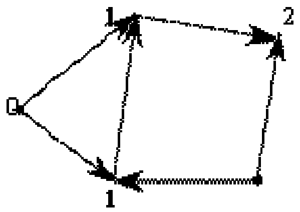
Алгоритм поиска в ширину позволяет решать следующие задачи.

Поиск кратчайшей цепи, соединяющей две несовпадающие вершины.

Разбиение множество вершин графа на области связности.

Поиск в ориентированном графе всех вершин, достигаемых из заданной вершины.

Пример



Незанумерованная вершина недостижима из вершины с номером ноль.

Выполните следующие задания:

1. Верно ли, что для любых двудольных графов G1 и G2 граф а) G1 ∪ G2 , б) G1 ∩ G2 , в) G1 ×G2 будет двудольным?
2. Докажите, что граф Qk при любом k является двудольным.

СОВЕТ. Можно применить индукцию по k, используя рекурсивное построение графа Qk и решение предыдущей задачи.

3. Докажите, что если в графе нет порожденных подграфов, изоморфных графам C3 и P4 , то этот граф – двудольный. СОВЕТ. Примените следствие из теоремы 5.

Контрольные вопросы:

1. Дать определение графа и основных его видов: ориентированный и неориентированный
2. Описать основные способы задания графов: матрица смежности, матрица инцидентности, список смежности. Степени вершин графа. Теоремы о свойствах степеней вершин.
3. Что называется, маршрутом в графе? Основные виды маршрутов: определения и примеры. Нахождение кратчайших маршрутов.
4. Описать алгоритмы обхода графов в глубину и в ширину.
5. Описать алгоритм построения кратчайшего пути в графе.
6. Дать определение изоморфных графов, привести пример. Как проверить изоморфность графов?
7. Сколько рѐбер в полном графе?
8. Какое наименьшее число рѐбер должно быть в графе, чтобы он был связным?

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.2. Ориентированные графы

Практическое занятие №15: Ориентированные деревья и их использование для обработки информации

Объем учебного времени: 2 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение решать задачи с использованием ориентированных деревьев;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Ориентированным деревом (его называют также прадеревом), растущим из корня v_0, называется граф G=(V,U),если:

1) $(\exists! v_0 \in V)\ \Gamma^{-1}\{v_0\}=\varnothing$ (где символьное обозначение ∃! означает – "существует одна и только одна"), т. е. существует единственная вершина v_0 (называемая корнем дерева), в которую не заходит ни одна дуга (нет предшествующих вершин);

2) $(\forall v_i \in V)|\Gamma^{-1}\{v_i\}| =1\ (v_i \neq v_0)$, т. е. в каждую другую вершину заходит только одна дуга (только одна вершина предшествует вершине v_i);

3) граф не содержит контуров.

Вершина v_i называется *висячей*, если $\Gamma v_i=\varnothing$, т. е. из v_i не исходит дуга (нет следующей вершины), ее также называют листом.

На рис.1.19,*а* показано прадерево с корнем v_0 и висячими вершинами v_3, v_4, v_5, v_6.

Таким образом, можно сказать, что прадеревом является граф без контуров и петель, в котором из корня дерева в любую другую вершину можно прийти только по одному элементарному пути.

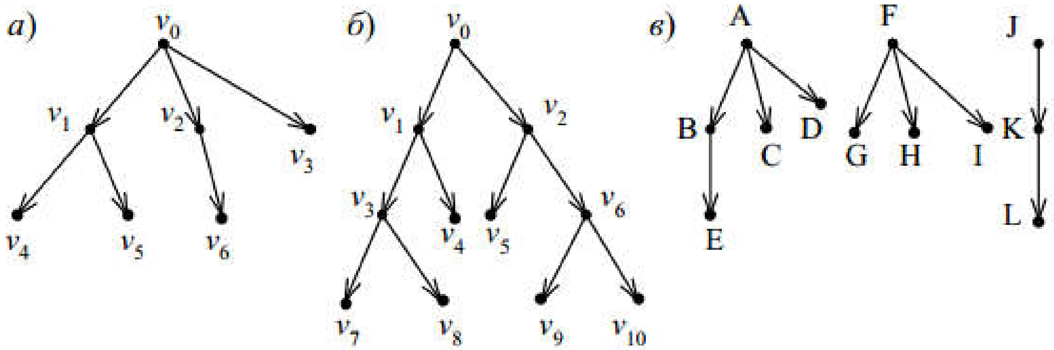


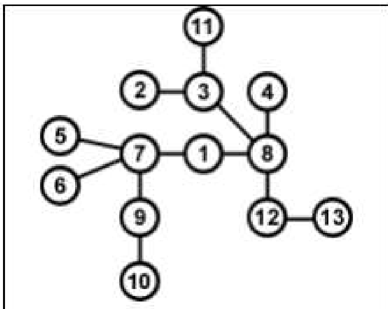
Рис. 1.19. Ориентированные деревья :
***а* – прадерево; *б* – двоичное дерево; *в* – ветвящийся граф**

Двоичным деревом называется прадерево, если $(\forall v_i \in V)|\Gamma\{v_i\}| = 2$ или 0, т. е. из каждой вершины исходит две дуги, если это не висячая вершина (рис. 1.19,*б*).

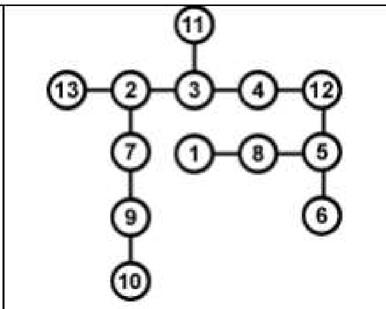
Ветвящимся называется граф, все связные компоненты которого являются прадеревьями (рис 1.19,*в*).

Выполнить следующие задания:

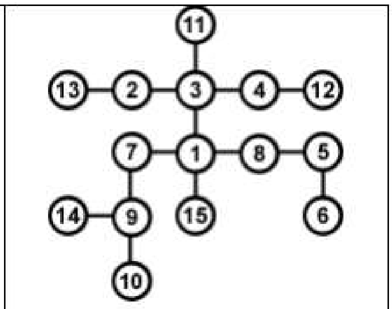
1. Для заданного дерева определите:
а) эксцентриситеты вершин, центр дерева, радиус и диаметр;
б) центроид дерева;
в) код Прюфера.



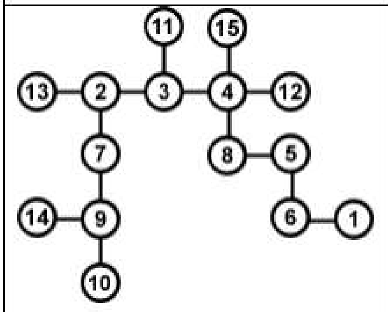
5.1



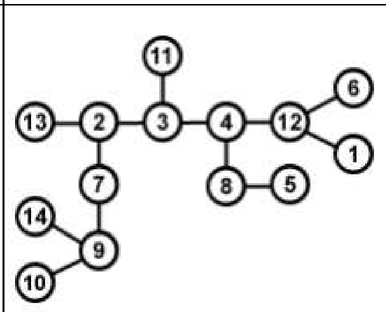
5.2



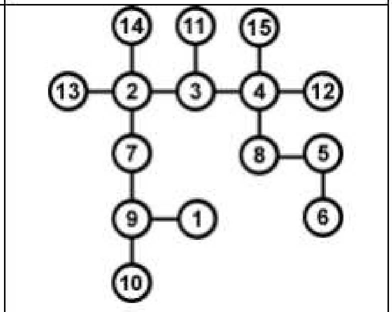
5.3



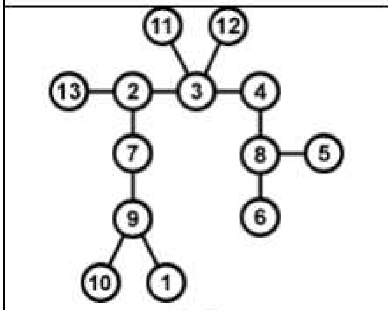
5.4



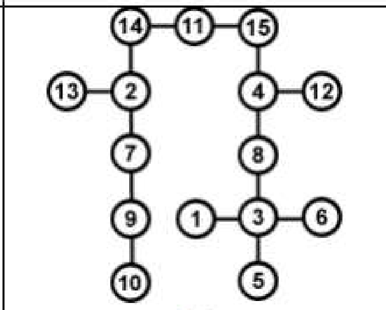
5.5



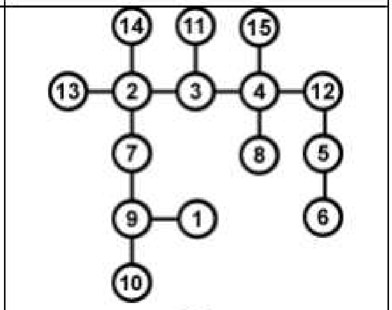
5.6



5.7



5.8



5.9

Контрольные вопросы:

1) Определение ориентированного, неориентированного, смешанного графа. Каноническое представление неориентированного графа (нарисовать пример).
2) Что называют локальной степенью вершины графа. Понятие полустепени исхода" и "полустепень захода" для ориентированного графа.
3) Как формируются матрица смежности для неориентированного и ориентированного графов.
4) Определение пути, длины пути, контура, простого пути, простого контура, элементарного пути, элементарного контура в ориентированном графе.
5) Определение сильно связного и односторонне связного ориентированного графа.
6) Компоненты сильной связности и односторонней связности графа.
7) Какой граф называют взвешенным.
8) Понятие неориентированного дерева.
9) Что называют остовным деревом неориентированного связного графа.
10) Что называется неориентированным лесом.
11) Понятие ориентированного дерева, леса.
12) Что называется остовным деревом ориентированного связного графа.
13) Что называют корнем, потомком вершины, предком вершины, листом, кустом ориентированного дерева.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Раздел 5. Основы теории графов

Тема 5.3. Эйлеровы и гамильтоновы графы

Практическое занятие №16: Эйлеровы и гамильтоновы графы
Объем учебного времени: 4 часа.

Цели занятия:

- проверить на практике умение решать задачи с использованием теорем Эйлера и Гальмитона;
- повторить и систематизировать знания по данной теме.

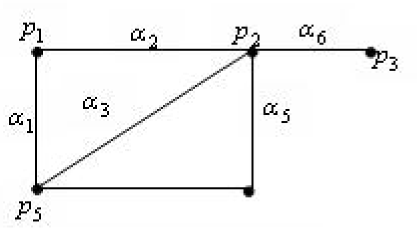
Требования по теоретической готовности (Краткие теоретические сведения)

Эйлеровым циклом (путем) графа называется цикл (путь), содержащий все ребра графа ровно один раз. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется**эйлеровым графом**.

Теорема 4. *Граф G обладает эйлеровым циклом с концами* p_1 *и* p_2 *тогда и только тогда, когда G – связный и* p_1 *,* p_2 *– единственные его вершины нечетной степени.*

Теорема 5. *Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда G – связный и все его вершины имеют четную степень.*

Гамильтоновым циклом (путем) графа *G* называется цикл (путь), проходящий через каждую вершину *G* в точности по одному разу. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется **гамильтоновым**. Критерий существования гамильтонова цикла в произвольном графе *G* еще не найден. Достаточным условием существования гамильтонова цикла является полнота графа *G*.



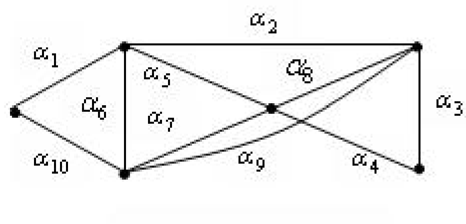


Рисунок 5. Рисунок 6.

На рис. 5 граф G не является эйлеровым (вершина p_3 инцидентна только одному ребру) и не является гамильтоновым, но обладает эйлеровым путем $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ с концевыми вершинами p_5 и p_3 . Граф изображенный на рис. 6 является эйлеровым (последовательность ребер $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10})$ образует эйлеров цикл).

Выполнить следующие задания:

Задание 1. Изобразите графы на 8 вершинах, обладающие (не обладающие) эйлеровым путем; эйлеровым циклом.

Задание 2. Пусть в связном графе две вершины *u* и *v* имеют нечетную степень, а степень остальных вершин четна. Докажите, что вершины *u* и *v* соединены путем.

Задание 3. В некоторой стране из любого города выходит ровно 100 дорог таким образом, что из любого города можно попасть в любой другой город. Докажите, что сообщение между городами не нарушится, если в этой стране закрыть одну дорогу на ремонт.

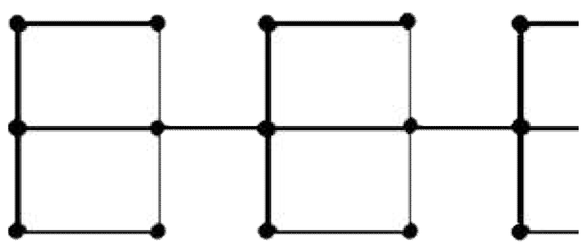
Задание 4. Докажите, что связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда множество его ребер можно разбить на непересекающиеся циклы.

Задание 5. Докажите, что линейный граф эйлерова графа является эйлеровым. Если линейный граф эйлеров, будет ли эйлеровым сам граф?

Задание 6. Докажите, что граф K_5 имеет 264 эйлеровых цикла.

Задание 7. Пусть граф *G* – эйлеров. Что можно сказать о его дополнении $\overline{G}$?

Задание 8. На рисунке представлен план художественной выставки. Где на выставке следовало бы сделать вход, а где – выход?

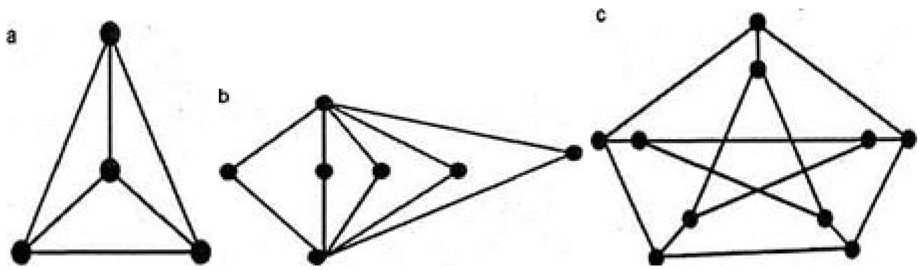


Задание 9. Докажите, что для любого связного графа можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности 2 раза, по 1 разу в каждом направлении.

Замечание. Если у лабиринта все стенки связаны друг с другом, то такой лабиринт всегда можно обойти, касаясь стенки одной рукой.

Задание 10. Эйлеров граф называется *произвольно вычерчиваемым* из данной вершины если, начиная от этой вершины и обходя граф произвольным образом, но не перемещаясь дважды ни по одному из ребер, мы всегда получим эйлеров цикл. Приведите пример эйлерова графа, не обладающего этом свойством.

Задание 11. Являются ли указанные на рисунках графы гамильтоновыми?



Задание 12. Приведите пример гамильтонова, но не эйлерова графа; эйлерова, но не гамильтонова графа. Что можно сказать о графах, одновременно являющихся и эйлеровыми, и гамильтоновыми графами?

Задание 13. Постройте гамильтонов цикл на графе додекаэдра.

Задание 14. Докажите, что если в графе на $n \geq 3$ вершинах $d(v)+d(u) \geq n$ для каждой пары вершин, то граф является гамильтоновым. Выведите отсюда теорему Дирака.

Задание 15. Девять гурманов во время конференции садятся за круглый стол, причем любые два из них занимают соседние места только 1 раз. Что можно сказать о продолжительности конференции?

Задание 16. Найдите в графе K_{2n+1} n гамильтоновых циклов, никакие два из которых не имеют общих ребер. Выполните аналогичное задание для $K_{n,n}$.

Контрольные вопросы:

1. Группа автоморфизмов графа.
2. Операции на группах подстановок.
3. Графы с данной группой.
4. Симметрические графы.

Список рекомендуемой литературы

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
4. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 395с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Дрофа, 2010. – 204с.
3. Григорьев С.Г. Математика: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. - 384с.
4. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2010. – 160с.

Дополнительные источники:

1. Алгебра и начало анализа / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2003. – 384с.
2. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. – М.: Дрофа, 2002. – 396с.
3. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. – М.: Мнемозина, 2003. – 335с.
4. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учеб. для сред. проф. образования. – М.: Академия, 2008. – 320с.
5. Гмурман В.Е. Руководство по решению задач по высшей математике и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009. – 404с.
6. Кочетков Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2005, 2008. – 239с.
7. Попов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М.: Юрайт, 2011. – 440с.; ил.
8. Сидняев Н.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров / Н.И. Сидняев. – М.: Юрайт, 2011. – 219с.: ил.
9. Шипачев В.С. Математический анализ. М.: Высшая школа, 2001. – 176с.

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изме-нения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				