Министерство науки и технической политики РФ
Новгородский политехнический институт

Кафедра "Высшая и прикладная математика"

ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
к самостоятельной работе

Новгород
1993

УДК 517.445

Операционные методы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Метод. указ. / Сост.: И.Г.Лихтенгольц, А.В.Ласунский; НПИ, Новгород, 1993, 45 с.

Рассмотрены операционные методы отыскания решений линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложение иллюстрируется примерами. Приведены задачи для самостоятельной работы.
Методические указания предназначены для студентов второго курса.

Библиогр. - 7 назв.

Рецензент: канд. техн. наук С.С.Андреев

Одобрено к изданию на заседании кафедры ВПМ

Протокол № 17 от 10 июня 1993 года

Зав. кафедрой ВПМ Б.Ф.Кирьянов

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрены операционные методы отыскания решений линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрены случаи, когда правые части уравнений и систем уравнений являются разрывными функциями. Изложение иллюстрируется многочисленными примерами. Приведены задачи для самостоятельной работы. Настоящее пособие является продолжением пособий [6, 7].

Цель работы

Научить студентов операционным методам отыскания решений линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

I. ЛАПЛАСОВО ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОТ ФУНКЦИИ

Теорема. Если функции $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ удовлетворяют условиям Хевисайда, то

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^n \mathcal{L} f(t) - \left[f(0)p^{n-1} + f'(0)p^{n-2} + \dots + f^{(n-1)}(0)\right], \quad (1)$$

здесь $\operatorname{Re} p > K$, где K - постоянная Хевисайда для функций $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ (не нарушая общности, можно считать, что постоянная K одна и та же для всех функций $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$).

Напомним условия Хевисайда. Говорят, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Хевисайда, если

1. $f(t) = 0$ для $t < 0$.

2. Существуют положительные числа A и K такие, что при любом t

$$|f(t)| \leq Ae^{Kt}.$$

Доказательство. Утверждение докажем методом математической индукции.

При $n = 1$ надо доказать справедливость равенства

$$\mathcal{L} f'(t) = p\mathcal{L} f(t) - f(0). \quad (2)$$

По определению

$$\mathcal{L} f'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} +$$

$$+ p\cdot\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = p\mathcal{L} f(t) - f(0) + \lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t).$$

Докажем, что

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t) = 0.$$

Действительно,

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| = \left|e^{-pt}\right|\cdot|f(t)| \le A\cdot e^{-\operatorname{Re}p\cdot t}\cdot e^{\kappa t} =$$

$$= A e^{-(\operatorname{Re}p-\kappa)t},$$

но $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(\operatorname{Re}p-\kappa)t} = 0$ в области $\operatorname{Re}p > K$, поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t) = 0$ в области $\operatorname{Re}p > K$.

Справедливость равенства (2) доказана.

Предположим, что

$$\mathcal{L} f^{(n-1)}(t) = p^{n-1}\mathcal{L} f(t) - \left[f(0)p^{n-2} + f'(0)p^{n-3} + \ldots + f^{(n-2)}(0)\right]. \quad (3)$$

Докажем справедливость утверждения теоремы. Так как

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = \mathcal{L}\left(f^{(n-1)}(t)\right)',$$

то в силу (2):

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = p\cdot\mathcal{L} f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

Воспользуемся предположением (3), тогда

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = p\left(p^{n-1}\mathcal{L} f(t) - \left(f(0)p^{n-2} + f'(0)p^{n-3} + \ldots + f^{(n-2)}(0)\right)\right) - f^{(n-1)}(0) =$$

$$= p^n\mathcal{L} f(t) - \left(f(0)p^{n-1} + f'(0)p^{n-2} + \ldots + f^{(n-2)}(0)p + f^{(n-1)}(0)\right).$$

Теорема доказана.

2. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n -го порядка

$$\mathcal{P}(\mathcal{D})\,y = f(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ - символический полином, т.е.

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^n + a_1\mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathcal{D} + a_n;$$

$\mathcal{D}$ - оператор дифференцирования; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - постоянные коэффициенты.

Найдем решение задачи Коши для дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(t)\Big|_{t=0} = y(0),\ y'(t)\Big|_{t=0} = y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(t)\Big|_{t=0} = y^{(n-1)}(0),$$

где $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ - заданные постоянные.

Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Лапласа, предполагая, что искомая функция $y(t)$ вместе со своими производными до n -го порядка включительно и правая часть $f(t)$ удовлетворяют условиям Хевисайда. Получим

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{P}(\mathcal{D})y\right) = \mathcal{L}f(t). \tag{5}$$

Воспользуемся линейностью преобразования Лапласа и теоремой о лапласовом изображении производной от функции. Тогда

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{P}(\mathcal{D})y\right) = \mathcal{L}\left(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y\right) = \mathcal{L}y^{(n)} + a_1\mathcal{L}y^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ a_n\mathcal{L}y = p^n\mathcal{L}y - \left(y(0)p^{n-1} + y'(0)p^{n-2} + \ldots + y^{(n-2)}(0)p + y^{(n-1)}(0)\right) +$$
$$\ldots + a_{n-1}\left(p\mathcal{L}y - y(0)\right) + a_n\mathcal{L}y =$$
$$= \left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n\right)\mathcal{L}y - y(0)\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots +\right.$$
$$\left.+ a_{n-2}p + a_{n-1}\right) - \ldots - y^{(n-2)}(0)(p + a_1) - y^{(n-1)}(0).$$

Введем обозначения

$$\mathcal{P}(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n,\ \mathcal{P}_1(p)=\frac{\mathcal{P}(p)-a_n}{p},$$

$$\mathcal{P}_2(p)=\frac{\mathcal{P}_1(p)-a_{n-1}}{p},\ldots,\ \mathcal{P}_n(p)=\frac{\mathcal{P}_{n-1}(p)-a_1}{p}.$$

Здесь $\mathcal{P}(p)$ – характеристический полином рассматриваемого дифференциального уравнения (4). Полиномы $\mathcal{P}_1(p), \mathcal{P}_2(p),\ldots,\mathcal{P}_n(p)$ строятся по указанным правилам с помощью характеристического полинома $\mathcal{P}(p)$. Полином $\mathcal{P}_n(p)$ совпадает с коэффициентом при старшей степени p в характеристическом полиноме $\mathcal{P}(p)$. В нашем случае $\mathcal{P}_n(p)=1$. Учитывая изложенное, имеем

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathcal{D})y)=\mathcal{P}(p)\mathcal{L}y-y(0)\cdot\mathcal{P}_1(p)-y'(0)\mathcal{P}_2(p)-\ldots$$

$$-y^{(n-2)}(0)\mathcal{P}_{n-1}(p)-y^{(n-1)}(0)\mathcal{P}_n(p).$$

Равенство (5) принимает вид

$$\mathcal{P}(p)\mathcal{L}y-y(0)\mathcal{P}_1(p)-y'(0)\mathcal{P}_2(p)-\ldots-y^{(n-2)}(0)\mathcal{P}_{n-1}(p)-$$

$$-y^{(n-1)}(0)\cdot\mathcal{P}_n(p)=\mathcal{L}f(t).$$

Откуда следует, что

$$\mathcal{L}y(t)=\frac{\mathcal{L}f(t)}{\mathcal{P}(p)}+y(0)\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)}+\ldots+y^{(n-1)}(0)\cdot\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)}. \tag{6}$$

Мы получили изображение искомого решения уравнения (4).

С целью отыскания решения рассматриваемой задачи применим к обеим частям полученного равенства (6) обратный оператор Лапласа. Тогда в силу линейности этого оператора получим

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(t)}{\mathcal{P}(p)}\right)+y(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)}+\ldots+$$

$$+y^{(n-1)}(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)}. \tag{7}$$

Убедимся в том, что полученное решение (7) является общим решением линейного неоднородного дифференциального уравнения (4).

При этом мы будем исходить из следующих двух фундаментальных теорем.

I. Сумма какого-либо частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения есть общее решение рассматриваемого линейного неоднородного дифференциального уравнения.

2. Линейная комбинация с n произвольными постоянными n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка есть общее решение рассматриваемого линейного однородного дифференциального уравнения.

Частное решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

может быть, согласно (7), представлено в виде

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L} f(t)}{\mathcal{P}(p)}\right). \tag{8}$$

Эта функция удовлетворяет условиям

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Учитывая, что $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ могут быть заданы произвольным образом, достаточно доказать, что функции

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)},\ \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_2(p)}{\mathcal{P}(p)},\ \ldots,\ \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)} \tag{9}$$

являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{P}(\mathcal{D})\, x = 0, \tag{10}$$

соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению (4).

Положим, в уравнении (4) $f(t) = 0$, тогда мы придем к уравнению (I0). Так как $\mathcal{L}(0) = 0$ и $\mathcal{L}^{-1}(0) = 0$, то $Y(t)$ (см. (8)) обратится в нуль. Если при этом положить

$$y(0) = z(0),\ \ y'(0) = z'(0), \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = z^{(n-1)}(0),$$

то решение уравнения (I0) примет вид

$$z(t) = z(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)} + \ldots + z^{(n-1)}(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)}. \tag{I1}$$

Обозначим через

$$z_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_k(p)}{\mathcal{P}(p)},\quad k = 1, \ldots, n, \tag{I2}$$

тогда в силу (I1) и (I2) получим

$$z(t) = z(0)\,z_1(t) + z'(0)\,z_2(t) + \ldots + z^{(n-1)}(0)\,z_n(t).$$

Положим, в этом решении уравнения (I0)

$$z(0) = 1,\ \ z'(0) = 0, \ldots,\ z^{(n-1)}(0) = 0.$$

При таких начальных условиях

$$z(t) = z_1(t),$$

и потому выше указанные начальные условия можно переписать так

$$z_1(0) = 1,\ \ z_1'(0) = 0, \ldots,\ z_1^{(n-1)}(0) = 0.$$

Следовательно, функция

$$z_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)}$$

является решением уравнения (I0), удовлетворяющим этим начальным условиям.

Аналогично можно показать, что функция

$$z_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_2(p)}{\mathcal{P}(p)}$$

является решением уравнения (I0), удовлетворяющим начальным условиям

$$z_2(0)=0, \quad z_2'(0)=1, \ldots, z_2^{(n-1)}(0)=0.$$

. . . .

Функция

$$z_n(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)}$$

является решением уравнения (I0), удовлетворяющим начальным условиям

$$z_n(0)=0, \quad z_n'(0)=0, \ldots, z_n^{(n-1)}(0)=1.$$

Для того, чтобы n решений $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского для этих решений был отличен от нуля, хотя бы в одной точке.

Вычислим определитель Вронского, составленный для функций $z_1(t), \ldots, z_n(t)$, при $t=0$

$$W(t)\Big|_{t=0}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ - & - & - & - & -\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, рассмотренная совокупность функций $z_1(t), \ldots z_n(t)$, которая согласно (I2) совпадает с совокупностью функций (9), является линейно независимой, и потому равенство (7) даёт общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4).

Согласно (6) и (I2) общее решение (7) уравнения (4) можно переписать в виде

$$y(t)=Y(t)+y(0)z_1(t)+y'(0)z_2(t)+\ldots+y^{(n-1)}(0)z_n(t). \qquad (I3)$$

Примеры

Найти решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

I. $y''+y=2\cos t, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-1.$

Решение. Имеем

$$\mathcal{P}(p) = p^2+1\,,\quad \mathcal{P}_1(p) = p\,,\quad \mathcal{P}_2(p) = 1\,.$$

Так как

$$\mathcal{L}\,(2\cos t) = \frac{2p}{p^2+1}\,,$$

то в силу формулы (7) получим

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\,\frac{2p}{(p^2+1)^2} - \mathcal{L}^{-1}\,\frac{1}{p^2+1}\,.$$

Далее имеем (см. [7], стр. 9)

$$y(t) = -2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{p^2+\xi}\right)\Bigg|_{\xi=1} - \sin t =$$

$$= -2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\cos\sqrt{\xi}\,t\right)\Bigg|_{\xi=1} - \sin t = \frac{2t\sin\sqrt{\xi}\,t}{2\sqrt{\xi}}\Bigg|_{\xi=1} - \sin t =$$

$$= t\sin t - \sin t\,.$$

Ответ: $y(t) = (t-1)\sin t\,.$

2. $y'' + y' = \cos t\,,\quad y(0) = y'(0) = 0.$

Решение. Искомое решение дифференциального уравнения может быть представлено в следующем виде

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(t)}{\mathcal{P}(p)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\,\frac{p}{(p^2+1)(p^2+p)} = \mathcal{L}^{-1}\,\frac{1}{(p^2+1)(p+1)}\,.$$

Найдем разложение полученной правильной дробно-рациональной функции на простейшие

$$\frac{1}{(p^2+1)(p+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{C}{p+1}\,.$$

Откуда следует, что

$$(Ap+B)(p+1) + C(p^2+1) = 1\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим систему

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + A = 0 \\ B + C = 1. \end{cases}$$

Находим $A = -\frac{1}{2}$, $B = C = \frac{1}{2}$. Решение принимает вид

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1-p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{2}\left(\sin t - \cos t + e^{-t}\right).$$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t - \cos t + e^{-t}\right)$.

3. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{P}(\mathcal{D})y = f(t).$$

Общее решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(t)}{\mathcal{P}(p)}\right) + y(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_1(p)}{\mathcal{P}(p)} + y'(0)\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_2(p)}{\mathcal{P}(p)} +$$

$$\ldots + y^{(n-1)}(0)\cdot\mathcal{L}^{-1}\frac{\mathcal{P}_n(p)}{\mathcal{P}(p)}.$$

У рассматриваемого уравнения есть частное решение

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}f(t)}{\mathcal{P}(p)}\right), \tag{14}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Введем функцию

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\mathcal{P}(p)}. \qquad (15)$$

Тогда

$$\mathcal{L}\,H(t) = \frac{1}{\mathcal{P}(p)}$$

и решение (14) примет вид

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}H(t)\cdot\mathcal{L}f(t)\right).$$

Согласно второй теореме Бореля (см. [7], стр.19), получаем

$$Y(t) = H(t) * f(t), \qquad (16)$$

т.е.

$$Y(t) = \int_0^t H(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (17)$$

или

$$Y(t) = \int_0^t H(\tau)f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (18)$$

Функция $H(t)$ (см. (15)) называется передаточной функцией. Существенно, что

$$H(t) = z_n(t),$$

т.е. $H(t)$ является частным решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$\mathcal{P}(D)z = 0,$$

причем это решение удовлетворяет начальным условиям

$$H(0) = H'(0) = \ldots = H^{(n-2)}(0) = 0,\ H^{(n-1)}(0) = 1.$$

Явный вид передаточной функции $H(t)$ легко получить согласно (15) по правилу вычисления обратного преобразования Лапласа от правильной дробно-рациональной функции (см., например, [7], стр. 7-14). Затем по формуле (17) (или (18)) находим частное решение $Y(t)$. Для отыскания общего решения уравнения (4) надо ещё найти общее решение соответствующего линейного однородного уравнения. Для этого достаточно осуществить обратное преобразование Лапласа от правильных дробно-рациональных функций

$$\frac{\mathcal{P}_i(p)}{\mathcal{P}(p)}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Наряду с формулами (17) или (18) применяются и другие интегральные формы частного решения $Y(t)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (4).

Введем функцию

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p\cdot\mathcal{P}(p)}. \tag{19}$$

Сравнивая $A(t)$ (19) с выражением для $Y(t)$ (14) и учитывая, что $\mathcal{L}(1)=\frac{1}{p}$, убеждаемся

$$A(t) = Y(t)\Big|_{f(t)=1}. \tag{20}$$

Так как при любых правых частях $f(t)$ функция $Y(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$Y(0) = Y'(0) = \dots = Y^{(n-1)}(0) = 0,$$

а $A(t)$ получается из $Y(t)$ при $f(t)=1$, то функция $A(t)$ также удовлетворяет нулевым начальным условиям, т.е.

$$A(0) = A'(0) = \dots = A^{(n-1)}(0) = 0.$$

Выразим $Y(t)$ через $A(t)$.

Согласно (19), $\mathcal{L}A(t) = \frac{1}{p\mathcal{P}(p)}$ или $\frac{1}{\mathcal{P}(p)} = p\cdot\mathcal{L}A(t)$.

Пользуясь этим равенством и формулой (14), получаем

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(p\mathcal{L}A(t)\cdot\mathcal{L}f(t)\right)$$

или, согласно первой теореме Бореля (см. [7], стр.I7),

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(p\mathcal{L}\,A(t) * f(t)\right). \qquad (21)$$

Воспользуемся теперь теоремой о лапласовом изображении производной от функции, а именно (см. (2))

$$\mathcal{L}\left(\varphi'(t)\right) = p\mathcal{L}\varphi(t) - \varphi(0),$$

откуда следует, что

$$p\mathcal{L}\varphi(t) = \mathcal{L}\left(\varphi'(t)\right) + \varphi(0).$$

Полагая здесь

$$\varphi(t) = A(t) * f(t),$$

получаем

$$p\mathcal{L}\left(A(t)*f(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(A(t)*f(t)\right)\right) + A(t)*f(t)\Big|_{t=0}.$$

Учитывая, что

$$A(t)*f(t)\Big|_{t=0} = \int_0^0 A(\tau)f(-\tau)\,d\tau = 0,$$

имеем

$$p\mathcal{L}\left(A(t)*f(t)\right) = \mathcal{L}\frac{d}{dt}\left(A(t)*f(t)\right).$$

Это позволяет переписать формулу (2I) в виде

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\frac{d}{dt}\left(A(t)*f(t)\right)$$

или, с учетом того, что $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}g(t) = g(t)$ (см. [7], стр.3), получаем

$$Y(t) = \frac{d}{dt}\left(A(t)*f(t)\right). \qquad (22)$$

Входящую сюда функцию $A(t)$ (I9) называют переходной.

Если воспользоваться определением свертки двух функций, то можем написать

$$Y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (23)$$

или

$$Y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau) f(t-\tau)\,d\tau. \tag{24}$$

Установим связь между передаточной функцией (15) и переходной функцией (19).

Согласно (18) и (20),

$$A(t) = Y(t)\Big|_{f(t)=1} = \int_0^t H(\tau) f(t-\tau)\,d\tau\Big|_{f(t)=1} =$$

$$= \int_0^t H(\tau) f(t-\tau)\,d\tau\Big|_{f(t-\tau)=1} = \int_0^t H(\tau)\,d\tau.$$

Итак,

$$A(t) = \int_0^t H(\tau)\,d\tau \tag{25}$$

и

$$A'(t) = H(t). \tag{26}$$

Переходная функция $A(t)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения (4) с правой частью равной единице, причем $A(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$A(0) = A'(0) = \ldots = A^{(n-1)}(0) = 0.$$

Дифференциальное уравнение (4) является математической моделью устройства, которое сигнал $f(t)$, подаваемый на вход этого устройства, преобразует в сигнал $Y(t)$ на выходе при условии, что начальное состояние устройства было состоянием покоя

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогда функция $A(t)$ есть сигнал на выходе этого устройства, если на его вход подать единичный сигнал, при условии, что

$$A(0) = A'(0) = \ldots = A^{(n-1)}(0) = 0.$$

Зная переходную функцию $A(t)$, можно с помощью дифференцирующего устройства получить передаточную функцию

$$H(t)=A'(t).$$

Интегралы типа свертки (см. (17), (18), (23), (24)) часто называют интегралами Дюамеля.

Наряду с соотношениями (17)-(18) и (23)-(24) используются и другие формы частного решения $Y(t)$. Мы рассматривать их не будем.

Примеры.

Найти решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

1. $y'' + y = \sin t$.

Решение. Характеристический многочлен уравнения имеет вид $\mathcal{P}(p)=p^2+1$. Вычислим передаточную функцию

$$H(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+1}=\sin t.$$

Искомое решение может быть представлено в виде

$$Y(t)=H(t)*f(t)=\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\cos(2\tau-t)-\cos t\right)d\tau=\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right).$$

Мы нашли частное решение $Y(t)$ с помощью передаточной функции $H(t)$. Частное решение $Y(t)$ можно найти и с помощью переходной функции $A(t)$. Согласно формуле (25)

$$A(t)=\int_0^t H(\tau)\,d\tau$$

и потому

$$A(t)=\int_0^t \sin\tau\,d\tau=1-\cos t.$$

Воспользуемся равенством (24)

$$Y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t A(\tau)f(t-\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t(1-\cos\tau)\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{2}\int_0^t\big(\sin t+\sin(t-2\tau)\big)d\tau\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(1-\cos t-\frac{1}{2}t\sin t\right)=\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right).$$

Ответ: $Y(t)=\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right)$.

2. $y''-y=e^t$.

Решение. Для рассматриваемого уравнения $\mathcal{P}(p)=p^2-1$. Передаточная функция имеет вид

$$H(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2-1}=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p-1}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

и, согласно формуле (18),

$$Y(t)=\int_0^t\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{2}\cdot e^{t-\tau}d\tau=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}.$$

3. $y''+y=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t<2\\ 0, & t\ge 2.\end{cases}$$

Решение. Отметим, что указанная функция $f(t)$ имеет точки разрыва при $t=0$, $t=1$ и $t=2$, однако удовлетворяет условиям Хевисайда. Приведём два решения рассматриваемого примера.

Первое решение. Воспользуемся формулой (17) для отыскания решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям. В рассматриваемом примере передаточная функция имеет вид

$$H(t) = \mathscr{L}^{-1}\frac{1}{p^2+1} = \sin t.$$

С учетом вида функции $f(t)$ разобьём соответственно область её определения на промежутки:
а) $t<0$ б) $0 \le t < 1$ в) $1 \le t < 2$ г) $t \ge 2$. Рассмотрим выражение для $Y(t)$ на каждом из этих промежутков.

а) $t<0$

$$Y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Так как при $t<0$ $f(t)=0$, то $Y(t)=0$ при $t<0$.

б) $0 \le t < 1$

$$Y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Так как $f(t)$ на этом промежутке равняется единице, то

$$Y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\, d\tau = 1-\cos t.$$

в) $1 \le t < 2$

$$Y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Воспользовавшись свойством аддитивности определенного интеграла и учитывая вид функции $f(t)$, имеем

$$Y(t) = \int_0^1 \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_1^t \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Далее, так как

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2, \end{cases}$$

то

$$Y(t) = \int_0^1 \sin(t-\tau)\, d\tau + 2\int_1^t \sin(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= 2 - \cos t - \cos(t-1).$$

г) $t \geq 2$

$$Y(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Воспользовавшись свойством аддитивности определенного интеграла и учитывая вид функции $f(t)$, имеем

$$Y(t) = \int_0^1 \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_1^2 \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_2^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Далее, так как

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2, \end{cases}$$

то

$$Y(t) = \int_0^1 \sin(t-\tau) d\tau + 2\int_1^2 \sin(t-\tau) d\tau =$$

$$= 2\cos(t-2) - \cos(t-1) - \cos t.$$

Ответ:

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \cos t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - \cos t - \cos(t-1), & 1 \leq t < 2 \\ 2\cos(t-2) - \cos(t-1) - \cos t, & t \geq 2. \end{cases}$$

Рекомендуем самостоятельно построить графики функций $f(t)$ и $Y(t)$.

Второе решение. Функцию $f(t)$, стоящую в правой части рассматриваемого уравнения, можно записать в виде

$$f(t) = \eta(t) + \eta(t-1) - 2\eta(t-2),$$

где $\eta(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Применяя оператор Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения и учитывая нулевые начальные условия, получаем

$$(p^2+1)\overline{Y}(p) = \mathcal{L}\left(\eta(t) + \eta(t-1) - 2\eta(t-2)\right).$$

Если теперь воспользоваться теоремой запаздывания, имеем

$$(p^2+1)\cdot \overline{Y}(p) = \frac{1+e^{-p}-2e^{-2p}}{p},$$

откуда

$$\overline{Y}(p) = \frac{1+e^{-p}-2e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Если теперь воспользоваться разложением

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

на сумму простейших первого и второго рода, то $\overline{Y}(p)$ можно переписать в виде

$$\overline{Y}(p) = \frac{1}{p}\left(1+e^{-p}-2e^{-2p}\right) - \frac{p}{p^2+1}\left(1+e^{-p}-2e^{-2p}\right).$$

Применяя обратный оператор Лапласа и учитывая теорему запаздывания, получаем

$$Y(t) = \eta(t)+\eta(t-1)-2\eta(t-2)-\cos t\cdot\eta(t)-\cos(t-1)\eta(t-1)+$$
$$+2\cos(t-2)\eta(t-2).$$

Полученное решение можно переписать и в таком виде

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-\cos t, & 0\le t<1 \\ 2-\cos t-\cos(t-1), & 1\le t<2 \\ -\cos t-\cos(t-1)+2\cos(t-2), & t\ge 2. \end{cases}$$

4. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим нормальную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n = f_1(t) \\ y_2'(t) + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{2n} y_n = f_2(t) \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ y_n'(t) + a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n = f_n(t). \end{cases} \tag{27}$$

Будем предполагать, что искомые функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ вместе с их первыми производными, а также заданные функции $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ удовлетворяют условиям Хевисайда.

Найдем решение задачи Коши для системы (27), удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$y_1(t)\Big|_{t=0} = y_1(0), \; y_2(t)\Big|_{t=0} = y_2(0), \ldots, y_n(t)\Big|_{t=0} = y_n(0),$$

где $y_1(0), y_2(0), \ldots, y_n(0)$ - заданные постоянные.

Применим к обеим частям всех уравнений системы (27) преобразование Лапласа.

Если воспользоваться линейностью преобразования Лапласа и теоремой о лапласовом изображении производной от функции, то придем к системе

$$\begin{cases} p\mathcal{L}y_1 - y_1(0) + a_{11}\mathcal{L}y_1 + \ldots + a_{1n}\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_1(t) \\ p\mathcal{L}y_2 - y_2(0) + a_{21}\mathcal{L}y_1 + \ldots + a_{2n}\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_2(t) \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ p\mathcal{L}y_n - y_n(0) + a_{n1}\mathcal{L}y_1 + \ldots + a_{nn}\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_n(t) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}+p)\mathcal{L}y_1 + a_{12}\mathcal{L}y_2 + \ldots + a_{1n}\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_1(t) + y_1(0) \\ a_{21}\mathcal{L}y_1 + (a_{22}+p)\mathcal{L}y_2 + \ldots + a_{2n}\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_2(t) + y_2(0) \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}\mathcal{L}y_1 + a_{n2}\mathcal{L}y_2 + \ldots + (a_{nn}+p)\mathcal{L}y_n = \mathcal{L}f_n(t) + y_n(0). \end{cases} \tag{28}$$

Мы получили линейную алгебраическую систему n уравнений относительно изображений искомых функций. Обозначим через

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+p & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+p \end{vmatrix} \qquad (29)$$

определитель системы (28), а через $\Delta_{ij}(p),\ i,j=1,\dots,n$ – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении i -й строки и j -го столбца определителя $\Delta(p)$. Заметим, что применительно к частному случаю $n=1$ (система состоит из одного уравнения) $\Delta_{11}(p)=1$.

Применяя теорему Крамера к системе (28), получим соотношения

$$\mathcal{L}y_1 = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)}, \dots, \mathcal{L}y_n = \frac{\Delta_n(p)}{\Delta(p)}, \qquad (30)$$

где определители Δ_i, $i=1,\dots,n$ в соответствии с теоремой Крамера получается из определителя $\Delta(p)$ заменой элементов i -х столбцов на столбец свободных членов. Если теперь определители Δ_i раскрывать по элементам i -х столбцов, то получаем

$$\mathcal{L}y_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathcal{L}f_i(t)+y_i(0)\right)\cdot\frac{\Delta_{i1}(p)}{\Delta(p)},$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\mathcal{L}y_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathcal{L}f_i(t)+y_i(0)\right)\cdot\frac{\Delta_{in}(p)}{\Delta(p)}.$$

Определитель $\Delta(p)$ представляет собой полином n-й степени переменной p, а алгебраические дополнения $\Delta_{ij}(p)$ – полиномы степени меньшей, чем n, и потому $\Delta_{ij}(p)/\Delta(p)$ – правильные дробно-рациональные функции переменной p.

С целью отыскания решения системы (27) применим к обеим частям последних соотношений обратный оператор Лапласа и, пользуясь его линейностью, получим

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t) \cdot \frac{\Delta_{i1}(p)}{\Delta(p)}\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i(0) \cdot \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{i1}(p)}{\Delta(p)},$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t) \frac{\Delta_{in}(p)}{\Delta(p)}\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i(0) \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{in}(p)}{\Delta(p)}.$$

Введем матрицы

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t) \cdot \frac{\Delta_{i1}(p)}{\Delta(p)}\right) \\ - - - - - - - - - - - \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t) \cdot \frac{\Delta_{in}(p)}{\Delta(p)}\right) \end{pmatrix},$$

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)} \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{1n}(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}, \ldots, \quad z_n(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{n1}(p)}{\Delta(p)} \\ - - - - - \\ \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_{nn}(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

тогда искомое решение можно представить в виде

$$y(t) = Y(t) + y_1(0) z_1(t) + \ldots + y_n(0) z_n(t). \tag{32}$$

Учитывая, что $y_1(0), \ldots, y_n(0)$ могут быть заданы произвольным образом, можно показать, что решение (32) является общим решением линейной неоднородной системы (27). Для этого над убедиться в том, что $Y(t)$ есть частное решение системы (27), а $Z_1(t),\ldots,Z_n(t)$ - линейно независимые решения линейной однородной системы, соответствующей неоднородной системе (27) (т.е. при $f_i(t)=0$, $i=1,2,\ldots,n$):

$$\begin{cases} Z_1'+a_{11}Z_1+a_{12}Z_2+\ldots+a_{1n}Z_n=0 \\ Z_2'+a_{21}Z_1+a_{22}Z_2+\ldots+a_{2n}Z_n=0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ Z_n'+a_{n1}Z_1+a_{n2}Z_2+\ldots+a_{nn}Z_n=0. \end{cases} \qquad (33)$$

Матрица $Y(t)$ (см. (31)) является частным решением системы (27), удовлетворяющим нулевому начальному условию, т.е. матрица $Y(t)$ при $t=0$ обращается в нулевую матрицу:

$$Y(0)=0.$$

Матрица $Z_1(t)$ является частным решением соответствующей линейной однородной системы (33), удовлетворяющим начальному условию

$$Z_1(0)=Z_1(t)\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Матрица $Z_2(t)$ является частным решением системы (33), удовлетворяющим начальному условию

$$Z_2(0)=Z_2(t)\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}.$$

- -

Матрица $Z_n(t)$ является частным решением системы (33), удовлетворяющим начальному условию

$$Z_n(0)=Z_n(t)\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Матрицы $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ определяются равенствами (31).

Можно показать, что решения $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ линейно независимы.

Примеры. Решить задачу Коши

I. $$\begin{cases} z_1' - \frac{1}{3} z_1 + \frac{5}{3} z_2 = 0 \\ z_2' - \frac{2}{3} z_1 + \frac{1}{3} z_2 = 0, \quad z_1(0) = 1, \quad z_2(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Искомое решение можно представить в виде (см. (30))

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} \\ \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}.$$

Найдем полином $\Delta(p)$ (см. (29))

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} + p & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} + p \end{vmatrix} = p^2 + 1,$$

а также определители $\Delta_1(p)$ и $\Delta_2(p)$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} + p \end{vmatrix} = p + 2,$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} + p & 1 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix} = -p + 1.$$

Далее имеем

$$z_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{p+2}{p^2+1} = \cos t + 2 \sin t$$

$$z_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1-p}{p^2+1} = \sin t - \cos t.$$

Ответ:

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{cases} y_1' + y_1 - y_2 = 3e^t \\ y_2' + 2y_1 - 5y_2 = 0, \quad y_1(0) = 2, \ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Искомое решение можно представить в виде (см.(30))

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} \\ \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}.$$

Найдем полином $\Delta(p)$ (см. (29))

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1+p & -1 \\ 2 & -5+p \end{vmatrix} = p^2 - 4p - 3,$$

а также определители $\Delta_1(p)$ и $\Delta_2(p)$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} y_1(0) + \mathcal{L} f_1(t) & -1 \\ y_2(0) + \mathcal{L} f_2(t) & -5+p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + \frac{3}{p-1} & -1 \\ 1 & -5+p \end{vmatrix} = \frac{2p^2 - 8p - 6}{p-1},$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} 1+p & 2 + \frac{3}{p-1} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2 - 4p - 3}{p-1}.$$

Далее имеем

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{p-1} = 2e^t, \quad y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p-1} = e^t.$$

Ответ:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

5. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нормальную линейную неоднозначную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. (27)). Представим частное решение $Y(t)$ (см. (31)) в интегральной форме. Введем матрицу $H(t)$, элементы которой $H_{ij}(t)$ определим равенствами

$$H_{ij}(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_{ij}(p)}{\Delta(p)}, \quad i,j=1,\dots,n. \tag{34}$$

Тогда

$$\frac{\Delta_{ij}(p)}{\Delta(p)} = \mathcal{L} H_{ij}(t), \quad i,j=1,\dots,n$$

и решение $Y(t)$ (см. (31)) принимает вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t)\cdot \mathcal{L} H_{i1}(t)\right) \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L} f_i(t)\cdot \mathcal{L} H_{in}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Согласно второй теореме Бореля (см. [7], стр.19), имеем

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t) * H_{i1}(t) \\ \text{- - - - - - - - -} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t) * H_{in}(t) \end{pmatrix},$$

т.е.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^t H_{i1}(t-\tau) f_i(\tau)\,d\tau \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^t H_{in}(t-\tau) f_i(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} \tag{35}$$

или

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_0^t H_{i1}(\tau)f_i(t-\tau)d\tau\\ \text{-------------}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_0^t H_{in}(\tau)f_i(t-\tau)d\tau\end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Матрица $H(t)$ (см. (34)) называется передаточной матрицей.

Сопоставляя матрицы $\mathcal{Z}_1(t),\ldots,\mathcal{Z}_n(t)$ (см. (31)) и матрицу $H(t)$ (см. (34)), можно убедиться в том, что строки матрицы $H(t)$ совпадают с соответствующими по номеру матрицами $\mathcal{Z}_1(t),\ldots,\mathcal{Z}_n(t)$.

Наряду с формулами (35) или (36) применяются и другие интегральные формы частного решения $Y(t)$ нормальной линейной системы дифференциальных уравнений.

Введем матрицу $A(t)$, элементы которой $A_{ij}(t)$ определим равенствами

$$A_{ij}(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_{ij}(p)}{p\cdot\Delta(p)},\ i,j=1,\ldots,n. \qquad (37)$$

Тогда

$$\frac{\Delta_{ij}(p)}{p\cdot\Delta(p)}=\mathcal{L}A_{ij}(t),\quad i,j=1,\ldots,n$$

и решение $Y(t)$ (см. (31)) принимает вид

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{-1}\left(p\cdot\mathcal{L}A_{i1}(t)\cdot\mathcal{L}f_i(t)\right)\\ \text{-------------}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{-1}\left(p\cdot\mathcal{L}A_{in}(t)\cdot\mathcal{L}f_i(t)\right)\end{pmatrix}.$$

Согласно первой теореме Бореля (см. [7], стр.17)

$$Y(t)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{-1}\left(p\cdot\mathcal{L}\left(A_{i1}(t)*f_i(t)\right)\right)\\ \text{-------------}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{L}^{-1}\left(p\cdot\mathcal{L}\left(A_{in}(t)*f_i(t)\right)\right)\end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Если теперь воспользоваться теоремой о лапласовом изображении производной от функции, то формулу (38) можно переписать в виде

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(A_{i1}(t) * f_i(t)\right) \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(A_{in}(t) * f_i(t)\right) \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Матрицу $A(t)$ (см. (37)) называют переходной матрицей. С целью выявления физического смысла матрицы $A(t)$ рассмотрим наряду с системой (27) вспомогательную систему, которая отличается от системы (27) правыми частями. Во вспомогательной системе полагаем все правые части равными нулю, кроме одной: в K-м уравнении полагаем правую часть равной единице. Применяя формулу для матрицы $Y(t)$ (см. (31)) к вспомогательной системе, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(1)\cdot\frac{\Delta_{K1}(p)}{\Delta(p)}\right) \\ \text{- - - - - - - - -} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(1)\cdot\frac{\Delta_{Kn}(p)}{\Delta(p)}\right) \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\ \frac{\Delta_{K1}(p)}{p\Delta(p)} \\ \text{- - - - - - -} \\ \mathcal{L}^{-1}\ \frac{\Delta_{Kn}(p)}{p\Delta(p)} \end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Сопоставляя матрицу (40) с матрицей $A(t)$ (см. (37)), приходим к выводу, что решение (40) совпадает с K-й строкой матрицы $A(t)$. Полагая $K=1,2,\dots,n$, получим систему решений, каждое из которых совпадает с соответствующей строкой матрицы $A(t)$. Все эти решения удовлетворяют нулевым начальным условиям, т.е. $A_{ij}(0)=0$, $i,j=1,\dots,n$.

Таким образом, каждая строка матрицы $A(t)$ совпадает с решением вспомогательной системы, у которой в соответствующем уравнении в правой части стоит единица, а в остальных уравнениях в правых частях стоят нули. Следовательно, матрица $A(t)$ характеризует переходные процессы, описываемые системой, когда поочередно одна из правых частей уравнений равняется единице, а остальные - нулю.

Установим связь между передаточной матрицей (см. (34)) и переходной матрицей (см. (37)).

Согласно (34) и (37) имеем

$$\mathcal{L} H_{ij}(t) = p \cdot \mathcal{L} A_{ij}(t). \qquad (41)$$

Так как $A_{ij}(0)=0$ для всех $i,j=1,\ldots,n$, то, в силу теоремы о лапласовом изображении пр изводной от функции с учетом (41), имеем

$$\mathcal{L} H_{ij}(t) = \mathcal{L} A'_{ij}(t).$$

Отсюда следует, что

$$H_{ij}(t) = A'_{ij}(t) \qquad (42)$$

и

$$A_{ij}(t) = \int_0^t H_{ij}(\tau)d\tau, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Примеры. I. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = 1 \\ y_2' + y_1 = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Решение. Найдем определитель $\Delta(p)$. Здесь в силу обозначений (27) $a_{11}=0$, $a_{12}=-1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$, т.е.

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2+1.$$

Для алгебраических дополнений элементов этого определителя имеем

$$\Delta_{11}(p) = p, \ \Delta_{12}(p) = -1, \ \Delta_{21}(p) = 1, \ \Delta_{22}(p) = p.$$

Матрица $H(t)$ (см. (34)) имеет вид

$$H(t)=\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{11}(p)}{\Delta(p)} & \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{12}(p)}{\Delta(p)} \\ \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{21}(p)}{\Delta(p)} & \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{22}(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Для частного решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям (см. (36)), получаем

$$Y(t)=\begin{pmatrix} \int_0^t \cos\tau\, d\tau \\ \int_0^t (-\sin\tau)\, d\tau \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t-1 \end{pmatrix}.$$

Найдем также элементы матрицы $A(t)$

$$A(t)=\begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{11}(p)}{p\Delta(p)} & \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{12}(p)}{p\Delta(p)} \\ \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{21}(p)}{p\Delta(p)} & \mathcal{L}^{-1}\dfrac{\Delta_{22}(p)}{p\Delta(p)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin t & \cos t-1 \\ 1-\cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Отметим, что соотношение (42) между элементами матриц $H(t)$ и $A(t)$ действительно соблюдается, причем $A(0)$ - нулевая матрица.

Ответ:

$$Y(t)=\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t-1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что этот пример можно было решить и с помощью формулы (30). Предлагаем это провести самостоятельно.

2. Найти решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разрывной правой частью

$$\begin{cases} y_1'+y_1-y_2=f_1(t) \\ y_2'+2y_1-y_2=f_2(t), \end{cases}$$

где

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1,\end{cases}\qquad f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Решение. Приведем два решения этого примера.

Первое решение. Вычислим элементы матрицы $H(t)$ (см.(34)) Имеем (см.(29))

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix}1+p & -1\\ 2 & -1+p\end{vmatrix}=p^2+1.$$

Для алгебраических дополнений элементов этого определителя получаем

$$\Delta_{11}(p)=p-1\ ,\ \Delta_{12}(p)=-2\ ,\ \Delta_{21}(p)=1,\ \Delta_{22}(p)=p+1.$$

Следовательно,

$$H_{11}(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{p-1}{p^2+1}=\cos t-\sin t,$$

$$H_{12}(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{-2}{p^2+1}=-2\sin t,\ H_{21}(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+1}=\sin t,$$

$$H_{22}(t)=\mathcal{L}^{-1}\frac{p+1}{p^2+1}=\cos t+\sin t. \tag{43}$$

Воспользовавшись формулой (35), придем к искомому решению:

$$Y_1=\int_0^t H_{11}(t-\tau)f_1(\tau)d\tau+\int_0^t H_{21}(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

$$Y_2=\int_0^t H_{12}(t-\tau)f_1(\tau)d\tau+\int_0^t H_{22}(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

С учетом вида функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ разобьем соответственно их область определения на промежутки:

а) $t<0$ б) $0\le t<1$ в) $t\ge 1$.

Рассмотрим выражение для $Y_1(t)$ на каждом из этих промежутков:

а) $t<0$. Так как при $t<0$ $f_1(t)=0$ и $f_2(t)=0$, то и $Y_1(t)=0$ при $t<0$.

б) $0 \le t < 1$. Так как на этом промежутке $f_1(t)=1$ и $f_2(t)=1$, то мы приходим к выводу (см. (43)), что на этом промежутке

$$Y_1(t)=\int_0^t\left(\cos(t-\tau)-\sin(t-\tau)\right)d\tau+\int_0^t\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\cos(t-\tau)\,d\tau=-\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=\sin t.$$

в) $t \ge 1$. Учитывая вид функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и воспользовавшись свойством аддитивности определенного интеграла, получим

$$Y_1(t)=\int_0^1\left(\cos(t-\tau)-\sin(t-\tau)\right)\cdot 1\,d\tau+\int_1^t\left(\cos(t-\tau)-\sin(t-\tau)\right)\cdot 0\cdot d\tau$$

$$+\int_0^t\sin(t-\tau)\cdot 1\,d\tau=-\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}-\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1}+$$

$$+\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=-\sin(t-1)+\sin t-\cos(t-1)+\cos t+$$

$$+1-\cos t=1+\sin t-\sin(t-1)-\cos(t-1).$$

Аналогично найдем вид функции $Y_2(t)$:

а) $t<0$ $Y_2(t)=0$

б) $0 \le t < 1$

$$Y_2(t)=\int_0^t\left(-2\sin(t-\tau)\right)d\tau+\int_0^t\left(\cos(t-\tau)+\sin(t-\tau)\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\cos(t-\tau)-\sin(t-\tau)\right)d\tau=$$

$$= -\sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \sin t - 1 + \cos t.$$

в) $t \geq 1$

$$Y_2(t) = \int_0^1 \left(-2\sin(t-\tau)\right)d\tau + \int_0^t \left(\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)\right)d\tau =$$

$$= -2\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=1} - \sin(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= -2\cos(t-1) + 2\cos t + \sin t + 1 - \cos t =$$

$$= 1 + \sin t + \cos t - 2\cos(t-1).$$

Ответ:

$$Y_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & 0 \leq t < 1 \\ 1 + \sin t - \sin(t-1) - \cos(t-1), & t \geq 1, \end{cases}$$

$$Y_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t + \cos t - 1, & 0 \leq t < 1 \\ 1 + \sin t + \cos t - 2\cos(t-1), & t \geq 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ непрерывны при любом значении переменной t, однако при $t=0$ и $t=1$ функции $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ недифференцируемы. Таким образом, строго говоря, функции $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются решением рассматриваемой системы на всем промежутке изменения переменной t, кроме точек $t=0$ и $t=1$.

Второе решение. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, стоящие в правых частях уравнений рассматриваемой системы, можно записать в виде

$$f_1(t) = \eta(t) - \eta(t-1), \quad f_2(t) = \eta(t),$$

где $\eta(t)$ - единичная функция Хевисайда.
Применяя теорему запаздывания, получаем

$$\mathcal{L} f_1(t) = \frac{1-e^{-p}}{p}, \quad \mathcal{L} f_2(t) = \frac{1}{p}.$$

Искомое решение системы можно представить в виде (см. (30))

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} \\ \mathcal{L}^{-1} \dfrac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} \end{pmatrix}.$$

Найдем полином $\Delta(p)$ (см. (29))

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1+p & -1 \\ 2 & -1+p \end{vmatrix} = p^2+1,$$

а также определители $\Delta_1(p)$ и $\Delta_2(p)$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} \mathcal{L} f_1(t) & -1 \\ \mathcal{L} f_2(t) & -1+p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1-e^{-p}}{p} & -1 \\ \dfrac{1}{p} & -1+p \end{vmatrix} = \frac{p-pe^{-p}+e^{-p}}{p},$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} 1+p & \dfrac{1-e^{-p}}{p} \\ 2 & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{p-1+2e^{-p}}{p}.$$

Далее имеем

$$Y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{p-pe^{-p}+e^{-p}}{p(p^2+1)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p^2+1} - \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-p}}{p^2+1} + \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-p}}{p} - \mathcal{L}^{-1} \frac{pe^{-p}}{p^2+1},$$

$$Y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{p-1+2e^{-p}}{p(p^2+1)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p^2+1} - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p} + \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{p^2+1} + 2\mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-p}}{p} - 2\mathcal{L}^{-1} \frac{pe^{-p}}{p^2+1}.$$

Применяя теорему запаздывания, получаем

$$Y_1(t) = \sin t\,\eta(t) - \sin(t-1)\,\eta(t-1) + \eta(t-1) - \cos(t-1)\,\eta(t-1)$$

$$Y_2(t) = \sin t\,\eta(t) - \eta(t) + \cos t\,\eta(t) + 2\eta(t-1) - 2\cos(t-1)\,\eta(t-1).$$

Полученное решение можно переписать и в таком виде

$$Y_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & 0 \le t < 1 \\ \sin t - \sin(t-1) + \cos(t-1) + 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

$$Y_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t + \cos t - 1, & 0 \le t < 1 \\ \sin t + \cos t - 2\cos(t-1) + 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

6. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, содержащую производные высших порядков. Если уравнения системы разрешены относительно старших производных от искомых функций и число уравнений равно числу искомых функций, т.е. система является канонической, то введением новых искомых функций систему легко свести к нормальной форме. Покажем это на примере. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' = a_1 x + a_2 x' + a_3 y + a_4 y' + f_1(t) \\ y'' = b_1 x + b_2 x' + b_3 y + b_4 y' + f_2(t), \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Введем функции $u = x'$, $v = y'$. Тогда рассматриваемую систему можно переписать в нормальной форме

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = a_1 x + a_2 u + a_3 y + a_4 v + f_1(t) \\ v' = b_1 x + b_2 u + b_3 y + b_4 v + f_2(t). \end{cases}$$

При этом начальные условия примут вид

$$x(0) = x_0, \quad u(0) = x_1, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = y_1.$$

Так как каноническую систему дифференциальных уравнений всегда можно свести к нормальной системе уравнений, то, применяя ранее изложенные операционные методы решения нормальных систем, найдем решение канонической системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую нельзя привести к канонической форме.

Приведем пример:

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_2 x + y'' + a_3 y' + a_4 y = f_1(t) \\ x'' + b_1 x' + b_2 x + y'' + b_3 y' + b_4 y = f_2(t). \end{cases} \tag{44}$$

Эта система не приводится к канонической форме, так как определитель, составленный из коэффициентов при старших производных искомых функций x и y равен нулю.

Вычтем соответственно левые и правые части уравнений рассматриваемой системы:

$$(a_1 - b_1)x' + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)y' + (a_4 - b_4)y = f_1(t) - f_2(t).$$

Предполагая, что начальные условия для рассматриваемой системы заданы при $t = 0$, положим в последнем уравнении $t = 0$. Тогда получим

$$(a_1 - b_1)x'(0) + (a_2 - b_2)x(0) + (a_3 - b_3)y'(0) + \\ + (a_4 - b_4)y(0) = f_1(0) - f_2(0). \tag{45}$$

Очевидно, что соотношение (45) выполняется не при любых начальных условиях для $x(0)$, $x'(0)$, $y(0)$, $y'(0)$. Более того, можно привести пример, когда рассматриваемая система не имеет решения ни при каких начальных условиях. Так при $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ и $f_1(0) \neq f_2(0)$ соотношение (45) нарушается при любых начальных условиях и, следовательно, рассматриваемая система не имеет решения, более того, система в этом случае противоречива.

Таким образом, системы дифференциальных уравнений, которые не приводятся к нормальным, могут иметь решение задачи Коши, но не при любых начальных условиях. Более того, такие системы могут не иметь решения задачи Коши ни при каких начальных условиях. Операционные методы отыскания решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами целесообразно применять лишь к нормальным системам и приводящимся к ним.

Можно применять операционный метод к канонической системе, не приводя её к нормальной.

Пример. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x'' - y' - y = 0 \\ x' - x + y'' = e^t \end{cases}, \qquad \begin{matrix} x(0) = x'(0) = 2, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{matrix}$$

Решение. Применим к обеим частям уравнений рассматриваемой системы оператор Лапласа и, учитывая начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} p^2\bar{x} - 2p - 2 - p\bar{y} + 1 - \bar{y} = 0 \\ p\bar{x} - 2 - \bar{x} + p^2\bar{y} - p - 1 = \dfrac{1}{p-1}, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} p^2\bar{x} - (p+1)\bar{y} = 2p + 1 \\ (p-1)\bar{x} + p^2\bar{y} = \dfrac{1}{p-1} + p + 3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему по теореме Крамера, находим, что

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2p+1 & -(p+1) \\ \frac{1}{p-1}+p+3 & p^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p^2 & -(p+1) \\ p-1 & p^2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{p-1},$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} p^2 & 2p+1 \\ p-1 & \frac{1}{p-1}+p+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p^2 & -(p+1) \\ p-1 & p^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{p-1}.$$

Применяя обратный оператор Лапласа, получаем

$$x(t) = 2e^t, \quad y(t) = e^t.$$

Покажем, что этот же самый ответ мы бы получили, если сначала исходную систему привели к нормальной форме. Введем функции

$$u = x', \quad v = y',$$

тогда рассматриваемую систему можно переписать в нормальной форме (см. (27))

$$\begin{cases} x' - u = 0 \\ y' - v = 0 \\ u' - y - v = 0 \\ v' - x + u = e^t. \end{cases}$$

При этом начальные условия примут вид

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 1, \quad u(0) = 2, \quad v(0) = 1.$$

Искомое решение можно представить в виде (см. (30))

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \left(\mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} \;\; \mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} \;\; \mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_3(p)}{\Delta(p)} \;\; \mathcal{L}^{-1}\frac{\Delta_4(p)}{\Delta(p)} \right)^T.$$

Найдем полином $\Delta(p)$ (см. (29))

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p & 0 & -1 \\ 0 & -1 & p & -1 \\ -1 & 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p^4 + p^2 - 1.$$

Так как нас интересуют лишь функции $x(t)$ и $y(t)$, то найдем только определители $\Delta_1(p)$ и $\Delta_2(p)$. Имеем

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & p & 0 & -1 \\ 2 & -1 & p & -1 \\ 1+\frac{1}{p-1} & 0 & 1 & p \end{vmatrix} = \frac{2p^4+2p^2-2}{p-1},$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} p & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & p & -1 \\ -1 & 1+\frac{1}{p-1} & 1 & p \end{vmatrix} = \frac{p^4+p^2-1}{p-1}.$$

Далее имеем

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{p-1} = 2e^t$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p-1} = e^t,$$

т.е. мы получили тот же самый ответ.

7. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ "ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ"

I. Найти решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1. $y'' - y = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$

2. $y'' + 4y = 3\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. $y'' + 2y' = -e^{-t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

4. $y'' - y' = -1$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

5. $y'' + 3y' - 4y = 10t - 4t^2 - 1$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$

6. $2y' + 3y = -e^{-2t}$, $y(0)=1$

7. $y' - 2y = -4t$, $y(0)=1$

8. $y'' - y = \sin t$, $y(0)=y'(0)=0$

9. $y'' + 2y' + y = t+1$, $y(0)=y'(0)=0$

10. $y'' - 4y' = t$, $y(0)=y'(0)=0$

11. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0)=2$, $y'(0)=4$

12. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{t} + 5t + 4$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

13. $y'' - 9y = e^{3t}$, $y(0)=y'(0)=0$

14. $y'' + y = \cos t$, $y(0)=y'(0)=0$.

15. $y'' + 4y = e^{t}$, $y(0)=y'(0)=0$

16. $y'' - 3y' = \cos t$, $y(0)=y'(0)=0$.

17. $y'' - y' - 2y = e^{-t}$, $y(0)=y'(0)=0$

18. $y''' - y'' = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=0$

19. $y''' - y' = e^{t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

20. $3y' - y = 10e^{2t}$, $y(0)=2$

21. $y' + y = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$, $y(0)=0$

22. $y'' + y = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & t \geqslant 0 \end{cases}$, $y(0)=y'(0)=0$

23. $y' - 2y = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & 0 \leqslant t < 1 \\ 0, & t \geqslant 1 \end{cases}$, $y(0)=0$

24. $y' + 2y = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & t \geqslant 0 \end{cases}$, $y(0)=0$

25. $y'' - y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

26. $y'' - y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0.$

27. $y'' + 2y' + y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -1, & t \geq 0 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

28. $y'' - 2y' + y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3, & t \geq 0 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0$

29. $y' + 2y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -2, & t \geq 0 \end{cases}$

$y(0) = 0$

30. $y'' + 4y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

$y(0) = y'(0) = 0.$

2. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

I. $\begin{cases} y' + 2x - y = e^{t} \\ x' - x + 2y = 0 \end{cases}$

$y(0) = 0, \; x(0) = 0$

2. $\begin{cases} y' - 2x + 2y = 2 \\ x' + x - y = e^{t} \end{cases}$

$y(0) = 1, \; x(0) = 1$

3. $\begin{cases} y' + 4x + y = t \\ x' - 2x + y = 1 \end{cases}$

$y(0) = 1, \; x(0) = -1$

4. $\begin{cases} y' + x + 2y = 0 \\ x' + 5x - 2y = e^{2t} \end{cases}$

$y(0) = 0, \; x(0) = 1$

5. $\begin{cases} y' + 2x - y = 0 \\ x' - x + 2y = 2e^{t} \end{cases}$

$y(0) = -1, \; x(0) = 1$

6. $\begin{cases} y' - 2x + 2y = 0 \\ x' + x - y = 0 \end{cases}$

$y(0) = 2, \; x(0) = 0$

7. $\begin{cases} y' + 4x + y = 2 \\ x' - 2x + y = e^{-t} \end{cases}$

$y(0) = 2, \; x(0) = 1$

8. $\begin{cases} y' + x + 2y = e^{t} \\ x' + 5x - 2y = 1 \end{cases}$

$y(0) = -1, \; x(0) = 0$

9. $\begin{cases} y'+2x-y=0 \\ x'+3x-2y=0 \end{cases}$
$y(0)=1,\ x(0)=2$

10. $\begin{cases} y'+x+2y=t-2 \\ x'+4x-y=1 \end{cases}$
$y(0)=3,\ x(0)=2$

11. $\begin{cases} y'+3x+y=t-1 \\ x'+5x-y=t \end{cases}$
$y(0)=-2,\ x(0)=1$

12. $\begin{cases} y'+4x+y=0 \\ x'-5x-2y=0 \end{cases}$
$y(0)=1,\ x(0)=3$

13. $\begin{cases} y'+2x-y=e^{2t} \\ x'+3x-2y=0 \end{cases}$
$y(0)=1,\ x(0)=0$

14. $\begin{cases} y'+x+2y=0 \\ x'+4x-y=0 \end{cases}$
$y(0)=0,\ x(0)=-1$

15. $\begin{cases} y'+2x-y=f(t) \\ x'-x+2y=g(t) \end{cases}$
$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0, \end{cases}\quad g(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ -1, & t\geq 0 \end{cases}$
$y(0)=0,\ x(0)=0$

16. $\begin{cases} y'-2x+2y=f(t) \\ x'+x-y=g(t) \end{cases}$
$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ -2, & t\geq 0 \end{cases}$
$g(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0, \end{cases}\quad y(0)=0,\ x(0)=0.$

17. $\begin{cases} y'+4x+y=f(t) \\ x'-2x+y=1 \end{cases}$
$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & 0\leq t<1 \\ 0, & t\geq 1 \end{cases}$
$y(0)=0,\ x(0)=2$

18. $\begin{cases} y'+x+2y=0 \\ x'+5x-2y=g(t) \end{cases}$
$g(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 3, & t\geq 0 \end{cases}$
$y(0)=1,\ x(0)=0$

19. $\begin{cases} y'+4x+y=f(t) \\ x'-2x+y=2 \end{cases}$
$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ -1, & 0\leq t<2 \\ 1, & t\geq 2 \end{cases}$
$y(0)=3,\ x(0)=1.$

20. $\begin{cases} y'+x+2y=f(t) \\ x'+5x-2y=g(t) \end{cases}$
$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$
$g(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2, & t\geq 0, \end{cases}\quad y(0)=0,\ x(0)=0.$

21. $\begin{cases} y' + 3x + y = f(t) \\ x' + 5x - y = g(t) \end{cases}$

$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases}$

$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0, \end{cases}$ $y(0) = 0,$ $x(0) = -2$

22. $\begin{cases} y' + 4x + y = -1 \\ x' - 5x - 2y = g(t) \end{cases}$

$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$

$y(0) = 0$, $x(0) = 0$

23. $\begin{cases} x'' + y' = e^{2t} \\ x' + y' - y = \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$

$x(0) = 1$, $x'(0) = 2$,

$y(0) = -\frac{3}{2}$

24. $\begin{cases} x'' + y' - y = \cos t \\ x' + 2x + y = 2 \sin t \end{cases}$

$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,

$y(0) = -1$

25. $\begin{cases} x' + y'' - y - x = 2 - t^2 - t \\ 2x' + x + y = 3 + t + t^2 \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = 0$,

$y'(0) = 0.$

26. $\begin{cases} 2x' - y' + y - 2x = 0 \\ x'' + x' - y = 3e^t \end{cases}$

$x(0) = 2$, $x'(0) = 2$,

$y(0) = 1.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.

2. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики. М.: Высш. шк., 1973.

3. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1976.

4. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1975.

5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.Ф. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

6. Преобразование Лапласа: Лаб.работа. /Сост.: И.Г.Фихтенгольц, А.В.Ласунский: НПИ, Новгород, 1990.

7. Обратное преобразование Лапласа: Метод.указ./Сост.: И.Г.Фихтенгольц, А.В.Ласунский: НПИ, Новгород, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Л.А.Савельева

Подп. в печ. 12.08.93 Формат 60 х 84 1/16 Бумага тип № 3
Офсетная печать. Уч.-изд.л. 2,9. Печ. л. 3,0.
Тираж 150 экз. Заказ № С

Отдел оперативной полиграфии НПИ
173003, Новгород, ул.Санкт-Петербургская, 41