



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
ГУМАНИТАРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

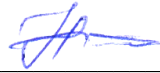
ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Специальность: 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
Квалификация выпускника: бухгалтер

Разработчик: Королёва О.Е., преподаватель колледжа

Методические рекомендации по практическим занятиям приняты на заседании предметной (цикловой) комиссии общеобразовательных, общегуманитарных, социально-экономических, математических и естественнонаучных дисциплин Гуманитарно-экономического колледжа,

протокол № 1 от 5.09.2018 г.

Председатель предметной (цикловой) комиссии  / Федорова Н.Х.

Содержание

Пояснительная записка.....	4
Тематический план.....	5
Содержание практических занятий	10
Практическое занятие № 1.....	10
Практическое занятие № 2.....	18
Практическое занятие № 3.....	23
Практическое занятие № 4.....	28
Практическое занятие № 5.....	31
Практическое занятие № 6.....	37
Практическое занятие № 7.....	42
Практическое занятие № 8.....	46
Практическое занятие № 9.....	50
Практическое занятие № 10.....	52
Информационное обеспечение обучения.....	55
Лист регистрации изменений.....	56

Пояснительная записка

Методические рекомендации по практическим занятиям, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине ЕН.01 «Математика» составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям);

2 Рабочей программой учебной дисциплины;

3 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 10 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины (профессионального модуля) в объеме 44 часов.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **уметь**:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **знать**:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел; теории вероятностей и математической статистики;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

На практических занятиях обучающиеся совместно с преподавателем разбирают методы решения типовых задач и самостоятельно выполняют расчётно-графические работы. Расчётно-графическая работа выполняется студентами по прикладным задачам в области профессиональной деятельности. Обучающийся решает задачи самостоятельно, используя литературу и полученные знания. Примеры задач в аудитории не разбираются.

Критерии оценки расчётно-графических работ:

оценка 5 (отлично) ставится, если все задания выполнены верно и сданы в срок;

оценка 4 (хорошо) ставится, если все задания выполнены верно, но работа сдана не в срок или работа сдана в срок, но часть заданий были выполнены не верно (в этом случае работа возвращается на доработку);

оценка 3 (удовлетворительно) ставится, если не все задания выполнены верно и работа сдана не в срок (в этом случае работа возвращается на доработку);

оценка 2 (неудовлетворительно) ставится, если работа была не сдана спустя две недели после срока сдачи

Знания и умения проверяются во время выполнения индивидуальных домашних заданий, тестов и контрольных работ.

Тематический план и содержание учебной дисциплины
Математика

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	2	3	4
Раздел 1. Основы линейной алгебры		12	
Тема 1.1. Определители и матрицы	Содержание учебного материала Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры. Матрицы и действия над ними. Различные способы вычисления обратных матриц.	2	2
	Практическое занятие № 1 Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы.	4	
Тема 1.2. Системы линейных уравнений	Содержание учебного материала Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом Гаусса, матричным методом.	2	2,3
	Практическое занятие № 2 Решение систем линейных уравнений различными методами.	4	
Раздел 2. Основы теории комплексных чисел		6	
Тема 2.1. Основы теории комплексных чисел	Содержание учебного материала Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.	2	2,3
	Практическое занятие № 3 Решение задач по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме».	4	
Раздел 3. Основные понятия и методы математического анализа		16	

Тема 3.1. Теория пределов функций	Содержание учебного материала Определение предела. Теоремы о пределах. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Два замечательных предела.	2	2,3
	Практическое занятие № 4 Вычисление пределов.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся № 1 Изучение материала по учебно-методической литературе, вычисление пределов	2	
Тема 3.2. Дифференциальное исчисление	Содержание учебного материала Понятие производной, правила вычисления производных. Дифференциал. Производная сложной функции, тригонометрических функций. Касательная, производные высших порядков. Применение производных к исследованию функций.	2	2,3
	Практическое занятие № 5 Нахождение производных. Составление уравнения касательной к графику функций. Исследование функций при помощи производных.	6	
Раздел 4. Интегральное исчисление		16	
Тема 4.1. Неопределённый интеграл	Содержание учебного материала Первообразная и интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций.	2	2,3
	Практическое занятие № 6 Вычисление неопределённых интегралов.	4	
Тема 4.2. Определённый интеграл	Содержание учебного материала Определённый интеграл и его приложения.	2	2,3
	Практическое занятие № 7 Вычисление определённых интегралов, площади фигуры при помощи определённого интеграла, нахождение длины пути по данной скорости.	6	
	Самостоятельная работа обучающихся № 2 Изучение материала по учебно-методической литературе, нахождение неопределённых и определённых интегралов, нахождение площади фигуры	2	
Раздел 5. Основы дискретной математики		10	

Тема 5.1. Множества	Содержание учебного материала Основные понятия теории множеств. Числовые множества. Способы задания множеств, конечные и бесконечные множества. Действия над множествами. Прямое произведение двух множеств.	2	2,3
	Практическое занятие № 8 Выполнение операций над множествами, нахождение прямого произведения множеств. Решение задач на применение формул для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений	4	
Тема 5.2. Элементы комбинаторики	Практическое занятие № 9 Решение задач на применение формул для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений.	4	2,3
Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика		8	
Тема 6.1. Теория вероятностей	Содержание учебного материала Случайные события и их вероятность. Формулы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байеса. Случайная величина и ее закон распределения, основные характеристики распределения случайных величин.	2	2,3
	Практическое занятие № 10 Вычисление вероятностей случайных событий.	4	
Тема 6.2. Элементы математической статистики	Содержание учебного материала Элементы математической статистики.	2	2,3
Всего:		68	

Содержание практических занятий

Раздел 1. Основы линейной алгебры

Тема 1.1 Определители и матрицы

Практическое занятие № 1 (4 часа)

Тема занятия: Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: правила выполнения операций над матрицами; правило вычисления определителя второго порядка; правило вычисления определителей третьего порядка; определение обратной матрицы;

уметь: применять правила выполнения операций над матрицами при решении задач; выполнять операции над матрицами; применять правило вычисления определителя второго порядка при решении задач; вычислять определители третьего порядка; находить обратную матрицу.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры. Матрицы и действия над ними. Различные способы вычисления обратных матриц.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Найти матрицу $5A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение. Используем определения линейных операций над матрицами:

$$5A = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти x , y и m , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их соответствующим элементам матрицы

$$\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, то
$$\begin{cases} 1-2m = -5 \\ 6+mx = 21 \\ -1+my = 8 \\ 2-m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 6+3x = 21 \\ -1+3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5$, $y = 3$, $m = 3$.

Задача 3. Найти AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение. Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность. $A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B :

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B ; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A , второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A :

$$\begin{aligned} d_{11} &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0; & d_{12} &= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4; & d_{13} &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1; & d_{14} &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2; \\ d_{21} &= -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2; & d_{22} &= -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2; & d_{23} &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1; & d_{24} &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0; \\ d_{31} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1; & d_{32} &= 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1; & d_{33} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0; & d_{34} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1; \\ d_{41} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8; & d_{42} &= 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; & d_{43} &= 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2; & d_{44} &= 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Если произведение существует, вычислить его.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение. Сравним размерности матриц A и B : $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Следовательно, $n = l$, $m \neq k$, поэтому произведение $AB[3 \times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB :

$$\begin{aligned} (ab)_{11} &= 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21; & (ab)_{12} &= 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24; & (ab)_{21} &= 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6; \\ (ab)_{22} &= 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8; & (ab)_{31} &= 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2; & (ab)_{32} &= 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2. \end{aligned}$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, BA не существует.

Задача 5. Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Указание. Найдите произведение AA и матрицу $-3A$, а затем сложите полученные матрицы.

Решение. Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.

Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -4; & c_{12} &= -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1; \\ c_{21} &= 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 0; & c_{22} &= 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9. \end{aligned}$$

Итак, $C = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Теперь вычислим элементы матрицы $D = -3A$. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3 : $D = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $A^2 - 3A = C + D = \begin{pmatrix} -4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Указание. Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение. 1-й способ (правило треугольников).

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$$\Delta = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

2-й способ (разложение по строке).

Применим свойство определителя: $\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$.

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22} , так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij} , получается вычеркиванием из исходного определителя i -й строки и j -го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-8) = 34$.

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 7. Используя свойства определителя, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.

Указание. Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение. Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство 6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 8. Используя свойства определителей, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}$.

Указание. Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычитайте удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение. Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 9. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40$.

Указание. Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x .

Решение. Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4x) = 9 - 4x;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - x) = x - 15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (20 - 3) = 17.$$

Тогда $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot (9 - 4x) + 1 \cdot (x - 15) + 3 \cdot 17 = -4x^2 + 10x + 36,$

и требуется решить квадратное уравнение $-4x^2 + 10x + 36 = 40$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.

Задача 10. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} > -3$.

Указание. Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение. Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > -3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4,5.$$

Ответ: $(2; 4,5)$.

Задача 11. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Указание. Преобразуйте определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуйтесь свойством 6.

Решение. Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 6. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1 . Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

- а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;
 - б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;
 - в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки
- (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Задача 12. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 0 \\ -67 & 83 & 2 & 0 \\ 19 & 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}$.

Указание. Разложите определитель по 1-й строке, а затем полученный определитель 3-го порядка вновь разложите по 1-й строке.

Решение. Разложим определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 83 & 2 & 0 \\ 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка вновь разложим по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-8 - 0) = 24.$$

Ответ: $\Delta = 24$.

Обратите внимание: если в определителе все элементы, стоящие

по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Задача 13. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и проверить выполнение условий $A A^{-1} = A^{-1} A = E$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам **транспонированной** матрицы!

Найдем произведения $A A^{-1}$ и $A^{-1} A$:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} + \frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} & \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

Задача 14. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$. Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 15. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу

$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит, $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 16. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \dots$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Задача 17. При каких x, y, z матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$ является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание. Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение. Проверим невырожденность матрицы A :

$$\Delta_A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x+2y+3z \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix}$.

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x+3z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-\frac{4}{3}x \\ x-\frac{4}{3}x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3, \\ z=4 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: $x = -3, y = -3, z = 4$.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 1. Основы линейной алгебры

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 2 (4 часа)

Тема занятия: Решение систем линейных уравнений различными методами

Цель практического занятия: научиться решать системы линейных уравнений тремя методами: по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса

Студент должен:

знать: методы решения систем линейных уравнений: матричный, по правилу Крамера, метод Гаусса;

уметь: решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Решение систем линейных уравнений методом Крамера, методом Гаусса, матричным методом.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Решить систему по правилу Крамера
$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание. Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x , Δ_y и Δ_z .

Решение. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, следовательно, система имеет един-

ственное решение. Найдем Δ_x , Δ_y и Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x , Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

Отсюда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2$.

Ответ: $x = 1$, $y = 4$, $z = 2$.

Задача 2. Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \text{ имеет бесконечно много решений.}$$

Указание. Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Решение. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$. Разложением по первой строке получим:

$$\begin{aligned}\Delta &= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = \\ &= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = \\ &= (a - 1)^2(a + 2).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.

Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.

Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.

1) При $a = 1$ система имеет вид: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \text{ и } \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.

2) При $a = -2$ получаем систему $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \text{ для которой} \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{ Следовательно, при этом случае решений нет.}$$

Ответ: $a = 1$.

Задача 3. Решить систему с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$

Указание. Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

Решение. Составим матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем матрицу A^{-1} :

$$\begin{aligned}A_{11} &= -11 & A_{21} &= -25 & A_{31} &= 2 \\ A_{12} &= 9 & A_{22} &= -12 & A_{32} &= 3 \\ A_{13} &= -13 & A_{23} &= -11 & A_{33} &= 7\end{aligned}$$

Тогда $A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$

Если $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то исходная система превращается в матричное уравнение $AX = B$,

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$= -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 - 150 + 8 \\ 9 - 72 + 12 \\ -13 - 66 + 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3, y = 1, z = 1$.

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1$.

Задача 4. Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Указание. Для решения по правилу Крамера найдите определители $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение. 1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$.

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы: $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -12 + 18 + 10 \\ 42 - 15 + 5 \\ 66 - 3 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Задача 5. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание. Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение. Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -24y = 0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3, x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = 0, z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 6. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Указание. Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 .

Решение. Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 2 Основы теории комплексных чисел

Тема 2.1 Основы теории комплексных чисел

Практическое занятие № 3 (4 часа)

Тема занятия: Решение задач по теме «Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме»

Цель практического занятия: научиться выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Студент должен:

знать: определение комплексного числа; понятие сопряженных комплексных чисел; понятие модуля комплексного числа; правила выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме; формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической форме комплексного числа; правила выполнения действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме;

уметь: записывать число, сопряженное заданному комплексному числу; вычислять модуль комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Задана комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1+i$; г) $z_4 = -1+2i$; д) $z_5 = -1-i\sqrt{3}$; е) $z_6 = 2-i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение. а) имеем (см. рис. 1) $r = 1$; $\varphi = \pi$,

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

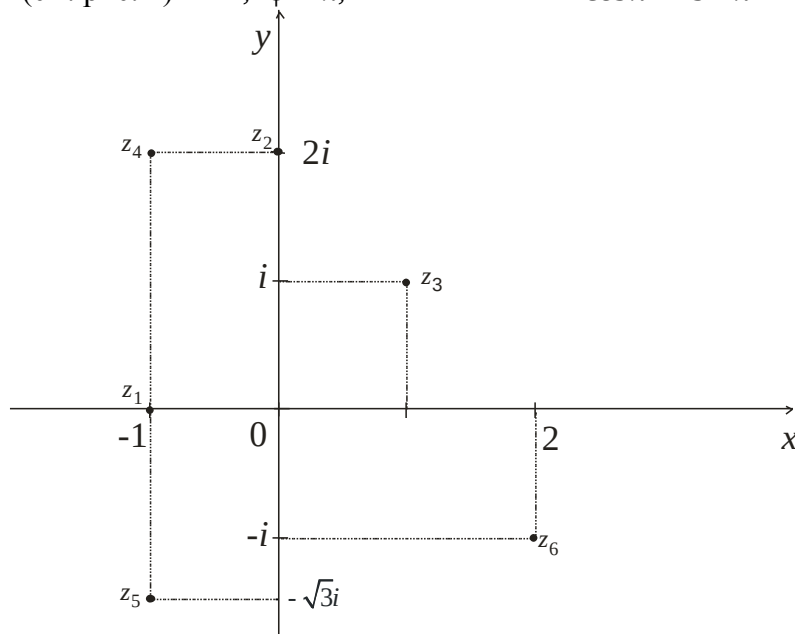


рис. 1

б) имеем (см. рис. 1) $r = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$;

в) имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$; согласно рис. 1 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так что $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$;

г) имеем $r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2$; согласно рис. 1, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} 2$, так что $-1+2i = \sqrt{5}e^{i(\pi - \operatorname{arctg} 2)}$;

д) имеет $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$, согласно рис. 1, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, так что $-1-i\sqrt{3} = e^{i\frac{4}{3}\pi}$;

е) имеем $r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2}$, согласно рис. 1, точка z_6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $2-i = \sqrt{5}e^{i\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$.

Задача 2. Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-1-i3}$.

Решение. а)

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1;$$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$1. \text{ При } k = 0: \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2. \text{ При } k = 1: \quad z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$3. \text{ При } k = 2: \quad z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$1. \text{ При } k = 0: \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$2. \text{ При } k = 1: \quad z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right);$$

$$3. \text{ При } k = 2: \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

$$4. \text{ При } k = 3: \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Задача 3. Представить в алгебраической форме $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^9$

Решение Пусть $z_1 = 1-i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$. Имеем $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = -1$; точка z_1 принадлежит четвертому квадранту, поэтому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^9 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^9 \left[\cos 9(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin 9(\varphi_1 - \varphi_2) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 \left[\cos \frac{57}{4}\pi + i \sin \frac{57}{4}\pi \right] = \frac{1+i}{32}$$

Задача 4 Дано комплексное число $z_0 = \frac{2}{1+i}$. Требуется:

- 1) записать данное число в алгебраической и тригонометрической формах;
- 2) найти все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$.

Решение. 1) Приведем комплексное число z_0 к алгебраической форме: $z_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$.

Для этого умножим числитель и знаменатель дроби z_0 на число $1-i$, комплексно-сопряженное знаменателю. Получим:

$$z_0 = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1-i.$$

Это и есть алгебраическая форма комплексного числа z_0 , где $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -1$.

Теперь приведем комплексное число $z_0 = 1 - i$ к тригонометрическому виду: $z_0 = \rho_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, где ρ_0 - модуль комплексного числа z_0 , φ_0 - аргумент этого числа.

Для этого найдем $\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} = \sqrt{2}$. Для нахождения φ_0 имеем систему:
$$\begin{cases} \alpha_0 = \rho_0 \cos \varphi_0 \\ \beta_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \varphi_0 \\ -1 = \sqrt{2} \sin \varphi_0 \end{cases}$ и тогда $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма комплекс-

ного числа z_0 имеет вид: $z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$.

3) Найдем теперь все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$, откуда $z = \sqrt[3]{-z_0}$. Тригонометрическая

форма комплексного числа $-z_0$ имеет вид: $-z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$.

По второй из формул Муавра получаем:
$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

Тогда корни уравнения имеют вид:

5. При $k = 0$: $z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$

6. При $k = 1$: $z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$

7. При $k = 2$: $z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$

Задача 5. Для комплексных чисел $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$ найти число, комплексно сопряженное числу $z_1 + z_2$.

Указание. $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i;$

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Решение. $z_1 + z_2 = (3 + 5) + (-2 + 3)i = 8 + i, \quad \overline{(z_1 + z_2)} = 8 - i$

Ответ: $8 - i$.

Задача 6. Для комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$ найти $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби $\frac{4-i}{3+4i}$ на выражение, сопряженное знаменателю.

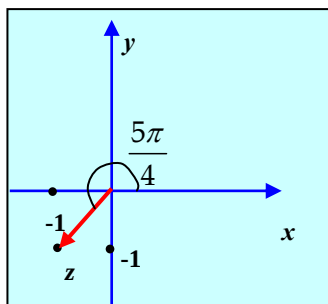
Решение.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-i}{3+4i} = \frac{(4-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-19i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{12-19i-4}{9+16} = \frac{8-19i}{25} = 0,32 - 0,76i$$

Ответ: $0,32 - 0,76i$.

Задача 7. Найти аргумент комплексного числа $z = -1 - i$.

Указание. Найдите угол, образованный вектором $(-1, -1)$ и положительным направлением оси абсцисс.

Решение.



Вектор $(-1, -1)$ образует с осью Ox угол $\frac{5\pi}{4}$, который является аргументом числа $-1 - i$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 8. Найти модуль числа $z_1 z_2 + z_3$, если $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 + 5i$.

Указание. Найдите действительную и мнимую части числа $z_1 z_2 + z_3$ и воспользуйтесь формулой $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Решение.

$$z_1 z_2 = (1 - 5i)(2 + i) = 2 - 9i - 5i^2 = 7 - 9i; \quad z_1 z_2 + z_3 = (7 - 4) + (-9 + 5)i = 3 + 4i;$$

$$|z_1 z_2 + z_3| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Ответ: 5.

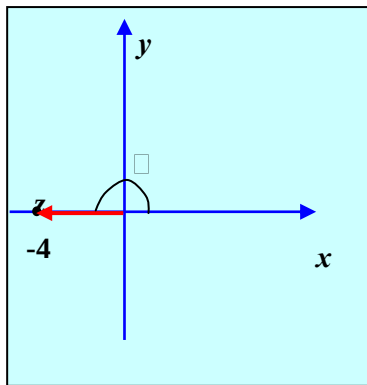
Задача 9. Записать в тригонометрической форме число -4 .

Указание. Рассмотрите на плоскости вектор $(-4, 0)$.

Решение. $a = -4$, $b = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 0} = 4$;

$$\arg z = \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin \varphi = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Второй способ решения задачи: Задачу можно решить, исходя из геометрических соображений: модуль вектора $(-4; 0)$ равен 4, а угол, который он образует с осью Ox , равен π . Следовательно, $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.



Ответ: $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Задача 10. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^{20}$

Указание. Представьте данное число в тригонометрической форме.

$$\text{Решение. } |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3 + 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right);$$

$$(\sqrt{3} - i)^{20} = 2^{20} \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{6} \right) \right) = 2^{20} \left(\cos \left(-4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right) =$$

$$= 2^{20} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} (-1 + \sqrt{3}i)$$

Ответ: $2^{19}(-1 + \sqrt{3}i)$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 3 Основные понятия и методы математического анализа

Тема 3.1 Теория пределов функций

Практическое занятие № 4 (4 часа)

Тема занятия: Вычисление пределов

Цель практического занятия: научиться вычислять пределы

Студент должен:

знать: способы задания числовых последовательностей; определение предела, свойства пределов; способы раскрытия неопределенностей вида «бесконечность на бесконечность»; способы раскрытия неопределенностей вида «ноль на ноль»; первый замечательный предел; второй замечательный предел;

уметь: вычислять члены последовательности; вычислять пределы функции; вычислять пределы, имеющие неопределенности вида «бесконечность на бесконечность»; вычислять пределы, имеющие неопределенности вида «ноль на ноль»; использовать первый замечательный предел при вычислении пределов; использовать второй замечательный предел при вычислении пределов.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Определение предела. Теоремы о пределах. Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Два замечательных предела.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$.

Указание. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение. Перед нами так называемая неопределенность типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, так как при $x = 3$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю. Следовательно, $x = 3$ является корнем и числителя, и знаменателя. Поэтому можно разложить обе части дроби на множители и сократить общий множитель $(x - 3)$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{3 + 1}{3 - 2} = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 - 3}{3x^3 - x^2 - x - 1}$.

Указание. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение. При $x = 1$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю, следовательно, можно разложить их на множители и сократить общий множитель $(x - 1)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^4 + x^3 - 3}{3x^3 - x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3)}{(x-1)(3x^2 + 2x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{1 + 2 + 3 + 3 + 3}{3 + 2 + 1} = \frac{12}{6} = 2.\end{aligned}$$

Ответ: 2.

Задача 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^3 + 6x^2 + 9x}$.

Указание. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби, а затем сократите на общий знаменатель.

Решение. При $x = -3$ и числитель, и знаменатель дроби равны нулю, следовательно, можно разложить их на множители и сократить общий множитель $(x + 3)$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^3 + 6x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x(x+3)}.$$

Теперь при $x \rightarrow -3$ числитель дроби стремится к -6, а знаменатель – к нулю. Следовательно, дробь неограниченно возрастает, и предел равен бесконечности.

Ответ: ∞ .

Задача 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 - x - 8}$.

Указание. Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень знаменателя.

Решение. На этот раз перед нами неопределенность вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ – обе части дроби при x , стремящемся к бесконечности, неограниченно возрастают. Для того чтобы избавиться от этой неопределенности, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 - x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}}.$$

Учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^a} = 0$ при $a > 0$, получим $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$.

Ответ: 0.

Задача 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 - 2}{x^2 - x + 4}$.

Указание. Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 – старшую степень знаменателя.

Решение. Для того чтобы избавиться от неопределенности вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2 – старшую степень знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 - 2}{x^2 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Ответ: ∞ .

Задача 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 - x - 5}{2x^3 - 5x + 7}$.

Указание. Разделите каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень числителя и знаменателя.

Решение. Для того чтобы избавиться от неопределенности вида $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, разделим каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^3 – старшую степень числителя и знаменателя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x^2 - x - 5}{2x^3 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2 - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки : см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 3 Основные понятия и методы математического анализа

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление

Практическое занятие № 5 (6 часов)

Тема занятия: Нахождение производных. Составление уравнения касательной к графику функций. Исследование функций при помощи производных

Цель практического занятия: научиться находить производные функций и их значения в точке; находить производные сложных функций; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; исследовать функцию при помощи дифференциального исчисления

Студент должен:

знать: основные правила и формулы дифференцирования; правило нахождения производной сложной функции; основные правила и формулы дифференцирования; понятие дифференциала; правило отыскания экстремумов функции; правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции;

уметь: применять основные правила и формулы дифференцирования при решении задач; находить производные сложных функций; находить производные функций и их значения в точке; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; находить точки экстремумов функции и экстремумы функции; находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Нахождение производных. Составление уравнения касательной к графику функций. Исследование функций при помощи производных.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить производную функции $y = 3 \sin x - 2 \ln x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной линейной комбинации функций.

Решение. $y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Ответ: $3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Задача 2. Вычислить производную функции $y = \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной произведения функций.

Решение. $y' = (\sqrt[5]{x})' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg} x}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y = \frac{x + e^x}{x \cos x}$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулы производных линейной комбинации и отношения функций.

Решение. $y' = \frac{(x + e^x)' x \cos x - (x + e^x)(x \cos x)'}{(x \cos x)^2} = \frac{(1 + e^x)x \cos x - (x + e^x)(\cos x - x \sin x)}{x^2 \cos^2 x}$

Ответ: $\frac{e^x \cos x(x - 1) + (x + e^x)x \sin x}{x^2 \cos^2 x}$.

Задача 4. Вычислить производную функции $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

Решение.

$y' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot (\ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot (3x^2 - 2)' = -\frac{\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot 6x}{3x^2 - 2}$

Задача 5. Найти вторую производную от функции $y = \sqrt{3 - x^2}$

Указание. Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что $f''(x) = (f'(x))'$.

Решение. $y' = \left((3 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} (3 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$

$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{3 - x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{\sqrt{3 - x^2}}}{3 - x^2} = -\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$.

Задача 6. Найти вторую производную от функции $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ при $x = 1$.

Указание. Найдите вторую производную по формуле $f''(x) = (f'(x))'$, а затем вычислите ее значение при $x = 1$.

Решение. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{(1+1^2)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 7. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x-5)^7 + 4x - 7$.

Указание. Функция выпукла при условии $f''(x) < 0$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 5(x-5)^4 + 4, \quad y'' = 20(x-5) < 0 \Rightarrow x < 5.$$

Ответ: $(-\infty, 5)$.

Задача 8. Найти интервалы вогнутости функции $y = \frac{x^2}{9} - \sqrt[3]{x-2}$.

Указание. Границами интервалов выпуклости и вогнутости могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) (x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} (x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

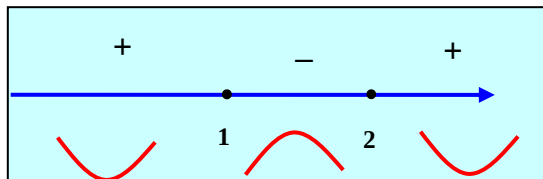
Представим вторую производную в виде:

$$y'' = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}} + 1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}} = -1, \quad x-2 = (-1)^{\frac{3}{5}} = -1, \quad x = 1.$$

Знак второй производной:



Следовательно, интервалы вогнутости: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Задача 9. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1+x^2)$.

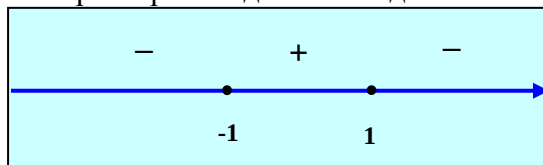
Указание. В точках перегиба вторая производная меняет знак, то есть требуется найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0, \quad x = \pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.



Значит, $x = \pm 1$ – точки перегиба.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 10. При каких значениях a и b точка $(-2, 0)$ служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2 + 5x - 6$?

Указание. Для определения a и b требуется решить систему $\begin{cases} y''(-2) = 0 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$.

Решение. $y' = 3ax^2 + 2bx + 5$, $y'' = 6ax + 2b$.

Для того чтобы $(-2, 0)$ была точкой перегиба, нужно, чтобы $y''(-2) = 0$.

$$6a(-2) + 2b = 0, \quad b = 6a.$$

При этом точка $(-2, 0)$ лежит на кривой, то есть $y(-2) = 0$. Подставим в это равенство $b = 6a$:

$$-8a + 24a - 10 - 6 = 0, \quad 16a - 16 = 0, \quad a = 1, \quad b = 6.$$

Ответ: $a = 1$, $b = 6$.

Задача 11. Сколько асимптот имеет график функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad (|k| < \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b \quad (|b| < \infty).$$

Решение. Исследуем функцию на наличие асимптот разных видов.

1) $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода, поэтому прямые $x = \pm 1$ – горизонтальные асимптоты графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 < \infty.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика на обоих концах оси Ox .

При этом наклонных асимптот у функции быть не может.

Итак, график имеет 3 асимптоты (две вертикальных и одну горизонтальную).

Ответ: 3.

Задача 12. Асимптоты какого вида имеет график функции $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Решение. 1) Точка разрыва функции: $x=0$. При этом

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x e^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t}}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{2t})'}{(t)'} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{2t}}{1} = \infty$$

Если хотя бы один из односторонних пределов в данной точке бесконечен, через точку проходит вертикальная асимптота. Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = \infty, \text{ следовательно, горизонтальных асимптот нет.}$$

$$3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x e^{\frac{2}{x}} + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x e^{\frac{2}{x}} + 1 - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 2 + 1 = 3$$

Значит, прямая $y = x + 3$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: график имеет вертикальную и наклонную асимптоту.

Задача 13. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x=1$, где знаменатель дроби обращается в нуль.

2) График данной функции пересекает координатную ось Oy в точке $M_0(0, -2)$, т.к. $y = -2$ при $x = 0$.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox , необходимо решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$. Но данное уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, у графика данной функции нет точек пересечения с осью Ox .

3) Данная функция непрерывна во всей области своего определения. Для исследования функции на четность проверим выполнение условия $f(-x) = f(x)$; для исследования функции на нечетность проверим выполнение условия $f(-x) = -f(x)$. Имеем:

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то, следовательно, данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Исходная функция не периодична, т.к. $f(x+T) \neq f(x)$ для любого $T \neq 0$.

4) Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Определим стационарные точки. Для этого приравняем $y' = 0$. Получим:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Производная y' не существует в точке $x=1$. Но точка $x=1$ не принадлежит области определения данной функции. Следовательно, стационарными точками данной функции являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Отметим все три точки на числовой оси:



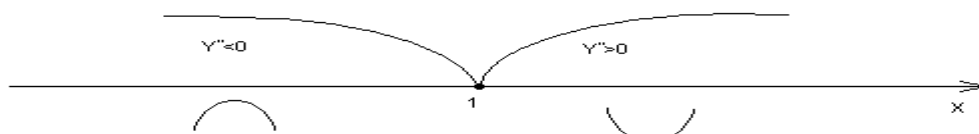
Определим знак производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить в производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке. Следовательно, исходная функция убывает на интервале $(0,1) \cup (1,2)$, возрастает на интервале $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (что показано на рисунке).

5) Так как производная меняет знак при переходе через стационарные точки, то эти точки являются точками экстремума. А именно, $x = 0$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума. Максимальное значение функции равно $y(0) = -2$, минимальное значение $y(2) = 2$.

6) Вычислим вторую производную данной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, но y'' не существует при $x = 1$. Точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Отметим эту точку на числовой оси:



Определим знак второй производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить во вторую производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке.

Следовательно, график данной функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1, +\infty)$ (что показано на рисунке).

Так как вторая производная нигде не обращается в нуль и точка $x = 1$, где y'' не существует, не принадлежит области определения данной функции, то у исходной функции нет точек перегиба.

7) Найдем предел данной функции при $x \rightarrow 1$ слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

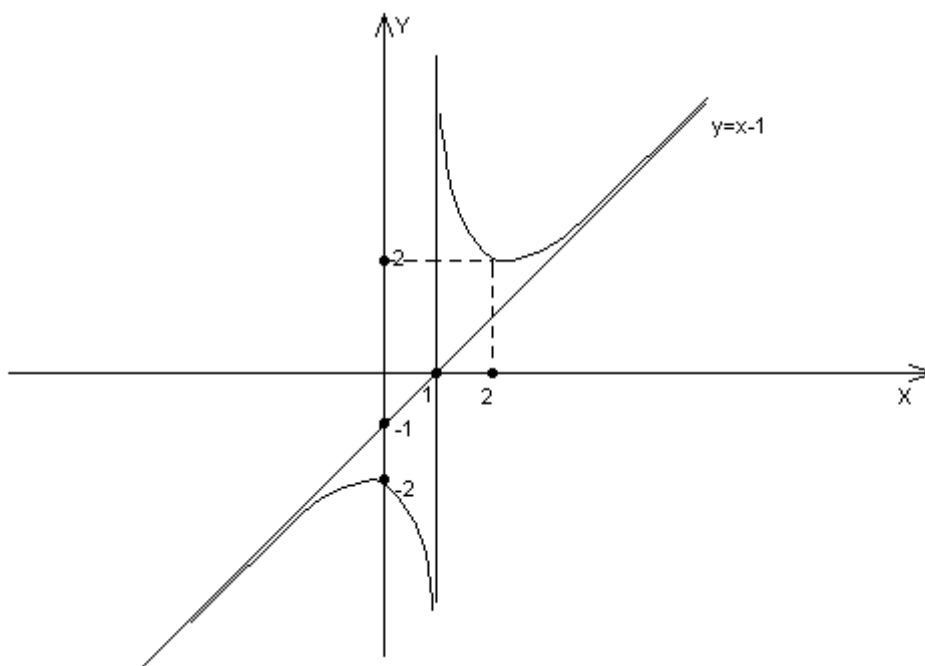
Для нахождения наклонной асимптоты вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x}{x - 1} = -1.$$

Следовательно, наклонная асимптота графика данной функции имеет вид $y = x - 1$.

8) Используя полученные данные, построим график исходной функции:



Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки : см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 4 Интегральное исчисление

Тема 4.1 Неопределённый интеграл

Практическое занятие №6 (4 часа)

Тема занятия: Вычисление неопределённых интегралов

Цель практического занятия: научиться вычислять интегралы с использованием их свойств и таблицы интегралов; выполнять линейную замену переменной в неопределённом интеграле, интегрировать по частям; находить интегралы от дробно-рациональных функций. Студент должен:

знать: определение неопределённого интеграла, табличные интегралы, свойства интеграла; метод замены переменной в неопределённом интеграле, формулу интегрирования по частям; приёмы интегрирования дробно-рациональных функций;

уметь: находить табличные интегралы, вычислять интегралы с использованием их свойств и таблицы интегралов; выполнять линейную замену переменной в неопределённом интеграле, интегрировать по частям; интегрировать дробно-рациональные функции.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Первообразная и интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить интеграл $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$

Указание. Представьте слагаемые в виде степеней: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ и т.д.

Решение.
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x} + C$$

Ответ: $2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$

Задача 2. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - x3^x + 5}{x} dx$.

Указание. Разделите на знаменатель каждое слагаемое числителя по отдельности и найдите первообразные полученных функций.

Решение.
$$\int \frac{x^3 - x3^x + 5}{x} dx = \int \left(x^2 - 3^x + \frac{5}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 5\ln|x| + C$$

Ответ: $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + 5\ln|x| + C$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)} dx$.

Указание. Раскройте скобки в числителе и сгруппируйте слагаемые так, чтобы каждое из них имело один общий множитель со знаменателем.

Решение.
$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)} dx &= \int \frac{x^2 - 6x + 9}{x(x^2+9)} dx = \int \frac{(x^2+9) - 6x}{x(x^2+9)} dx = \int \left(\frac{(x^2+9)}{x(x^2+9)} - \frac{6x}{x(x^2+9)} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - 6 \cdot \frac{1}{(x^2+9)} \right) dx = \ln|x| - 6 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \ln|x| - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\ln|x| - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int \frac{3 - 2\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулами $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Решение.
$$\begin{aligned} \int \frac{3 - 2\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{5\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{5\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{5}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = 5\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \end{aligned}$$

Ответ: $5\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{2 - \sqrt{x}} dx$

Указание. Сделайте замену: $t = \sqrt{x}$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{2 - t} = -2 \int \frac{t - 2 + 2}{t - 2} dt = -2 \int \left(1 + \frac{2}{t - 2} \right) dt = -2(t + 2\ln|t - 2|) + C = \\ &= -2(\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} - 2|) + C = -2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} - 2| + C \end{aligned}$$

Ответ: $-2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} - 2| + C$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.

Решение. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \arcsin^4 x + C$

Ответ: $\frac{1}{4} \arcsin^4 x + C$

Задача 7. Вычислить интеграл $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{2x^5 - 3} dx$.

Указание. Сделайте замену: $t = 2x^5 - 3$.

Решение.

$$\int x^4 \cdot \sqrt[3]{2x^5 - 3} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{2x^5 - 3} \\ t^3 = 2x^5 - 3 \\ 3t^2 dt = 10x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{3}{10} t^2 dt \end{array} \right| = \int t \cdot \frac{3}{10} t^2 dt = \frac{3}{10} \int t^3 dt = \frac{3}{10} \frac{t^4}{4} + C = \frac{3(2x^5 - 3)^{\frac{4}{3}}}{40} + C$$

Ответ: $\frac{3}{40} (2x^5 - 3)^{\frac{4}{3}} + C$.

Задача 8. Вычислить интеграл $\int (3x - 2) \cos 4x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям, $u = 3x - 2$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int (3x - 2) \cos 4x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x - 2 & dv = \cos 4x dx \\ du = 3 dx & v = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right| = (3x - 2) \cdot \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{3}{4} \int \sin 4x dx =$$
$$= (3x - 2) \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{3}{16} \cos 4x + C$$

Ответ: $(3x - 2) \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{3}{16} \cos 4x + C$

Задача 9. Вычислить интеграл $\int x \arctg x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям, $u = \arctg x$

Решение.

$$\int x \arctg x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx =$$
$$= \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + C = \frac{(1+x^2) \arctg x - x}{2} + C$$

Ответ: $= \frac{(1+x^2) \arctg x - x}{2} + C$

Задача 10. Вычислить интеграл $\int \frac{3x-19}{x^2-x-6} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение. $\frac{3x-19}{x^2-x-6} = \frac{3x-19}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+2}{(x+2)(x-3)}$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A+2B=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{3x-19}{x^2-x-6} dx = \int \left(\frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-3} \right) dx = 5 \ln|x+2| - 2 \ln|x-3| + C$$

Ответ: $5 \ln|x+2| - 2 \ln|x-3| + C$

Задача 11. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение. $\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} =$
 $= \frac{Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx}{x(x-1)^3}$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B+C=-3 \\ 3A+B-C+D=2 \\ -A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3 \\ D=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} \right) dx = 2 \ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Ответ: $2 \ln|x| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

Задача 12. Вычислить интеграл $\int \frac{3}{x^3+8} dx$

Указание. Разложите подынтегральную функцию в сумму простейших дробей.

Решение.

$$\frac{3}{x^3+8} = \frac{3}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \frac{Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=0 \\ 4A+2C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{16} \\ B=-\frac{1}{16} \\ C=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^3+8} dx &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{x-4}{x^2-2x+4} \right) dx = \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{(x-1)-3}{(x-1)^2+3} dx = \left| \frac{x-1=t}{dx=dt} \right| = \\ &= \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{t-3}{t^2+3} dt = \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{16} \int \frac{t}{t^2+3} dt + \frac{1}{16} \int \frac{3}{t^2+3} dt = \\ &= \frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{8} \ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{16} \ln|x+2| - \frac{1}{8} \ln(x^2 - 2x + 4) + \frac{\sqrt{3}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$

Задача 13. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

Указание. Подынтегральная функция – неправильная дробь, поэтому вначале выделите ее целую часть, а затем разложите оставшуюся правильную дробь в сумму простейших.

Решение. $\frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} = x - \frac{5x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$$\frac{5x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx^3+Cx+D}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=5 \\ B+D=0 \\ 4A+C=4 \\ 4B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=D=0 \\ C=\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int \left(x + \frac{1}{3} \frac{x}{x^2+1} - \frac{8}{3} \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{8}{3} \ln(x^2+4) + C$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1) - \frac{8}{3} \ln(x^2+4) + C$

Задача 14. $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$.

Указание. Разложите дробь в сумму простейших.

Решение. Подынтегральной функцией является правильная дробь, разложение которой в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем:

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x , что приведет к линейной системе относительно A, B, C, D, E :

$$x^4: A+B=0$$

$$x^3: -2B+C=0$$

$$x^2: 2A+B-2C+D=2$$

$$x: -2B+C-2D+E=2$$

$$x^0: A-2C-2E=13.$$

Отсюда $A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right) dx, \text{ где}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| + C_1,$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C_2,$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} +$$

$+4\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x\right) + C_3$. Таким образом, окончательный результат имеет вид:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{4x-3}{2(x^2+1)} + 4\arctg x + C.$$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 4 Интегральное исчисление

Тема 4.2 Определённый интеграл

Практическое занятие 7 (6 часов)

Тема занятия: Вычисление определенных интегралов, площади фигуры при помощи определенного интеграла, нахождение длины пути по данной скорости

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу.

Студент должен:

знать: формулу Ньютона-Лейбница; свойства определенного интеграла; геометрический смысл определенного интеграла; физические приложения определенного интеграла;

уметь: применять формулу Ньютона – Лейбница; применять свойства определенного интеграла при вычислениях; вычислять площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла; находить длину пути по данной скорости.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Определенный интеграл и его приложения.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение. $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx = \int_9^{16} \left(x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_9^{16} = 2 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - \left(9^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} \right) \right) = 76$

Ответ: 76.

Задача 2. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \right) dx = (-\operatorname{ctgx} - 2x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулой замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\text{Решение. } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = 4 \quad t = 2 \\ x = 9 \quad t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t}{t-1} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1) dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 7 + 2 \ln 2$$

Ответ: $7 + 2 \ln 2$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, разложив ее в сумму простейших дробей, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = (\ln|x+2| + 2 \ln|x+3|) \Big|_1^5 = \ln 7 + 2 \ln 8 - \ln 3 - 2 \ln 4 = \ln \frac{28}{3}$$

Ответ: $\ln \frac{28}{3}$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 9x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18} \sin \frac{9\pi}{2} - 0 = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, представив числитель дроби как разность квадратов, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 (\sqrt{x}-1) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right) \Big|_4^9 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \left(\frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - 4 \right) = \frac{23}{3}.$$

Ответ: $\frac{23}{3}$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

Указание. Сделайте замену $t = \sqrt{1+\ln x}$

$$\text{Решение. } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{1+\ln x} \\ t^2 = 1+\ln x \\ x=1 \quad t=1 \\ x=e^3 \quad t=2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 2tdt = \frac{dx}{x} \\ \int_1^2 \frac{2tdt}{t} = 2t \Big|_1^2 = 2(2-1) = 2 \end{array}$$

Ответ: 2.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x^3 \cos x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^3 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^3 \quad dv = \cos x dx \\ du = 3x^2 dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = x^3 \sin x \Big|_0^\pi - 3 \int_0^\pi x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= \pi^3 \sin \pi - 3 \left((-x^2 \cos x) \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos x dx \\ du = dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = 3\pi^2 \cos \pi - 6 \left((x \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \right) = \\ &= -3\pi^2 - 6 \cos x \Big|_0^\pi = -3\pi^2 - 6 \cos \pi + 6 \cos 0 = 12 - 3\pi^2 \end{aligned}$$

Ответ: $12 - 3\pi^2$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} = (e-1) \ln e - 0 - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = \\ &= e-1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = e-1 - (x - \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} = e-1 - (e-1-1) = 1 \end{aligned}$$

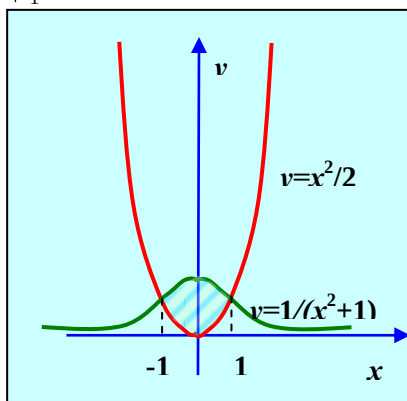
Ответ: 1.

Задача 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$

Указание. Постройте графики функций, ограничивающие фигуру, и найдите абсциссы точек их пересечения. Затем вычислите площадь фигуры по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$, где $f_1(x)$ – функция, график которой является нижней границей фигуры, а $f_2(x)$ – функция, задающая верхнюю границу.

Решение. $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ – найдены пределы интегрирования.

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\arctg x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 5 Основы дискретной математики

Тема 5.1 Множества

Практическое занятие №8 (4 часа)

Тема занятия: Выполнение операций над множествами, нахождение прямого произведения множеств. Решение задач на применение формул для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений

Цель практического занятия: научиться выполнять действия с множествами, находить их прямое произведение.

Студент должен:

знать: основные понятия теории множеств; числовые множества; способ задания множества с помощью характеристического свойства; операции над множествами; определения операций над множествами; определение прямого произведения множеств; формулы для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений;

уметь: устанавливать соотношения между числовыми множествами и исследовать числа на принадлежность числовым множествам; применять основные понятия теории множеств при решении задач и оформлении математических записей; различать конечные и бесконечные множества, читать характеристическое свойство множества; выполнять операции над множествами; применять определения операций над множествами при решении задач; находить прямое произведение множеств; применять формулы для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений при решении задач.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Основные понятия теории множеств. Числовые множества. Способы задания множеств, конечные и бесконечные множества. Действия над множествами. Прямое произведение двух множеств.

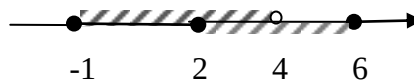
Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Изобразить множества

$A = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 4\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ на числовой прямой. Выполнить операции: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $A \times B$. Записать результат каждой операции с указанием характеристического свойства.

Решение.

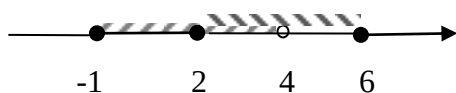
$$1) \quad \begin{aligned} A &= \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 4\} = [-1; 4) \\ B &= \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\} = [2; 6] \end{aligned}$$



Если изобразить множества A и B на числовой прямой, то объединение $A \cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е.

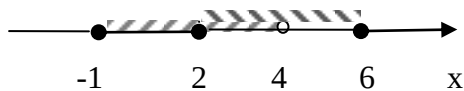
$$A \cup B = [-1; 6] = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 6\}.$$

2) Пересечение множеств $A \cap B$ есть часть оси, где есть двойная штриховка, т.е.



$$A \cap B = [2; 4) = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 4\}.$$

3) Разность $A \setminus B$ есть часть множества A , отмеченная лишь одной штриховкой, т.е.



$$A \setminus B = [-1; 2) = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 2\}.$$

Точка $x = 2 \in B$ и поэтому $2 \notin A \setminus B$.

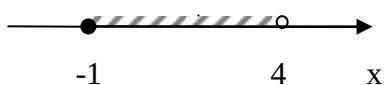
4) Найдем $\bar{A}$, считая универсальным множеством всех действительных чисел, т.е. $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus A$.

Дополнение множества A есть часть оси, где нет штриховки, т.е.

$$\bar{A} = (-\infty; -1) \cup [4; +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, x < -1 \text{ или } x \geq 4\}.$$

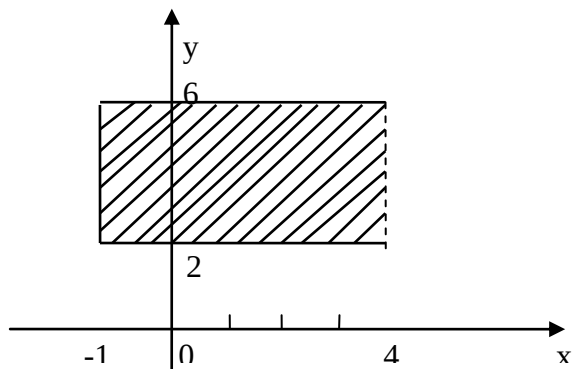
Точка $x = -1 \notin \bar{A}$, так как $x = -1 \in A$, точка $x = 4 \in A$,

так как $x = 4 \notin \bar{A}$.



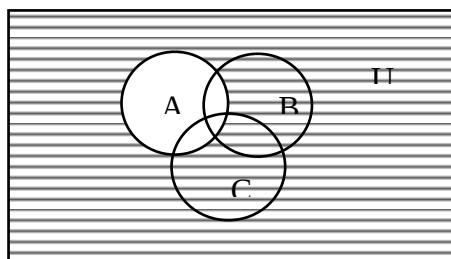
5) Множество $A = [-1; 4)$ изобразим на оси Ox , множество $B = [2; 6]$ на оси Oy . Тогда декартово произведение изобразится заштрихованным прямоугольником, но без его левой стороны, т.е.

$$A \times B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 4 \text{ и } 2 \leq y \leq 6\}.$$

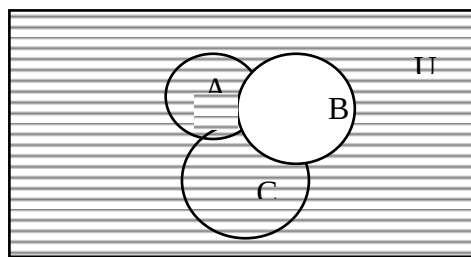


Задача 2. Изобразить множество $M = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C$ на диаграммах Эйлера-Венна.

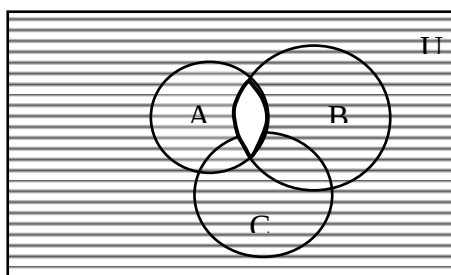
Решение. Множество M является результатом операций над множествами A, B и C . Изобразим результат выполнения этих операций последовательно.



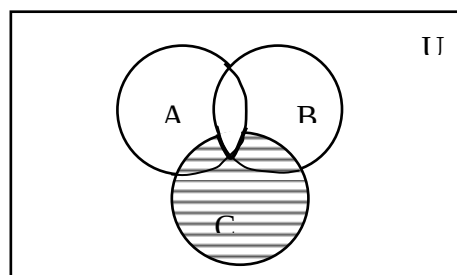
1. $\bar{A}$



2. $\bar{B}$



3. $\bar{A} \cup \bar{B}$



4. $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C = M$

Задача 3. Упростить выражение $A \cap (\bar{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B$, пользуясь законами алгебры множеств.

Решение. Поскольку операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, то, если нет скобок, изменяющих приоритет, сначала выполняется пересечение, а затем объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности определим порядок действий $\left(A \cap (\bar{A} \cup B) \right)^3 \cup \left((B \cup C) \cup B \right)^2$.

Выполним преобразования, указывая номер закона над знаком равенства:

$$1) \quad A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B;$$

$$2) \quad (B \cup C) \cup B \stackrel{1}{=} (C \cup B) \cup B \stackrel{2}{=} C \cup (B \cup B) \stackrel{7}{=} C \cup B;$$

$$3) \quad (A \cap B) \cup (C \cup B) \stackrel{1}{=} (A \cap B) \cup (B \cup C) \stackrel{2}{=} ((A \cap B) \cup B) \cup C = (B \cup (B \cap A)) \cup C \stackrel{9}{=} B \cup C.$$

Итак, $A \cap (\bar{A} \cup B) \cup (B \cup C) \cup B = B \cup C$.

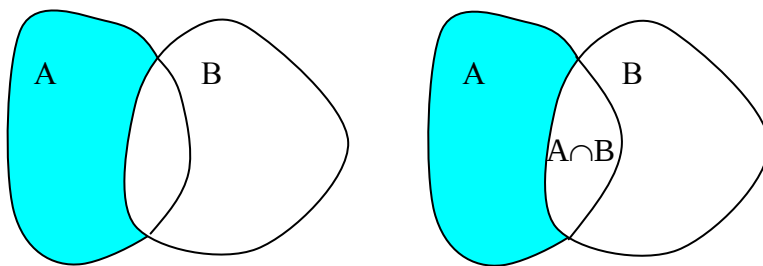
Задача 4. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера - Вейна.

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

Доказательство. Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \setminus (A \cap B) = (A \setminus A) \cup (A \setminus B) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \setminus B. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера – Вейна



Задача 5. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Решение. Если некоторый элемент $x \in A \setminus (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A , но не принадлежит множествам B и C .

Множество $A \setminus B$ представляет собой множество элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Множество $A \setminus C$ представляет собой множество элементов множества A , не принадлежащих множеству C .

Множество $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат ни множеству B , ни множеству C .

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Задача 6. Найти декартово произведение $X \times Y$ множеств $X = \{a, b\}$ и $Y = \{a, c\}$ равно

Решение. Декартово произведение множеств – это множество, состоящее из упорядоченных пар элементов, первым элементом которых являются элементы первого множества, вторым – элементы второго, то есть $X \times Y = \{(a, a); (a, c); (b, a); (b, c)\}$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 5 Основы дискретной математики

Тема 5.2 Элементы комбинаторики

Практическое занятие №9 (4 часа)

Тема занятия: Решение задач на применение формул для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений

Цель практического занятия: научиться применять формулы комбинаторики

Студент должен:

знать: формулы для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений;

уметь: применять формулы для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений при решении задач.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: применение формул для нахождения числа перестановок из n элементов, числа сочетаний и числа размещений.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв.

Решение. Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000. Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900. Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций. Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Задача 2. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?

Решение. $P_7 = 7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Задача 3. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?

Решение. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Задача 4. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3 $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$.

Задача 5. Сколькими способами можно расставить в одну шеренгу 6 человек?

Указание. Требуется найти число перестановок из 6 элементов.

Решение. Первого человека в шеренге можно выбрать шестью способами, второго – пятью и так далее, то есть число способов $N = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Задача 6. Сколько различных трехзначных чисел можно составить, используя по одному разу цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Указание. Требуется найти число размещений из 8 по 3.

Решение. Первую цифру можно выбрать 8 способами, вторую – 7, третью – 6, то есть

$$N = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Задача 7. Сколько различных букетов, состоящих из трех цветов, можно составить, если имеется 10 цветов разных сортов?

Указание. Требуется найти число сочетаний из 10 по 3.

Решение. Букеты различаются только составом входящих в них цветов, следовательно, это неупорядоченные наборы, поэтому $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Раздел 6 Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 6.1 Теория вероятностей

Практическое занятие №10 (4 часа)

Тема занятия: Вычисление вероятностей случайных событий

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: классическое определение вероятности; теоремы умножения и сложения вероятностей;

уметь: находить вероятность события, пользуясь классическим определением вероятности; применять теоремы умножения и сложения вероятностей.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Случайные события и их вероятность. Формулы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байеса. Случайная величина и ее закон распределения, основные характеристики распределения случайных величин.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Из колоды в 32 карты вынуто последовательно без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что обе они — тузы.

Решение. Так как первую карту можно извлечь из колоды 32 способами, а вторую — 31 (поскольку в колоде осталась 31 карта), то число возможных исходов опыта $n = 32 \cdot 31 = 992$. Определим число благоприятных исходов. Первый туз можно выбрать из четырех, имеющих в колоде, второй — из трех оставшихся. Значит, число благоприятных исходов $m = 4 \cdot 3 = 12$, и искомая вероятность равна $p = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0,012.$

Задача 2. Из коробки, в которой лежат пять пирожных «эклер» и семь — «наполеон», достали пять пирожных. Найти вероятность того, что среди них два «эклера» и три «наполеона».

Решение. Количество возможных исходов опыта представляет собой число сочетаний из 12

$$\text{по } 5 \quad n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{5! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

Число благоприятных исходов является произведением количества способов, которыми можно выбрать два «эклера» из пяти имеющихся, и числа наборов по три «наполеона» из семи

$$m = C_5^2 \cdot C_7^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 10 \cdot 35 = 350.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{350}{792} \approx 0,442$.

Задача 3. Из коробки, в которой лежат 6 красных и 5 синих карандашей, случайным образом извлечены 3 карандаша. Найти вероятность того, что все они красные.

Указание. Число возможных исходов опыта – число сочетаний из 11 (общее число карандашей в коробке) по 3, а число благоприятных исходов – число сочетаний из 6 (количество карандашей нужного цвета) по 3.

Решение.
$$n = C_{11}^3 = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165,$$

$$m = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20, \quad p = \frac{m}{n} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}.$$

Задача 4. Из 10 служащих туристического агентства 7 знают французский язык. Какова вероятность того, что среди трех человек, находящихся в данный момент в офисе, французским владеют двое?

Указание. Число благоприятных исходов – это произведение количества способов, которыми можно выбрать двух человек, знающих французский язык, из семи, и способов, которыми можно выбрать одного человека, не знающего этого языка, из оставшихся трех.

Решение.
$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120,$$

$$m = C_7^2 \cdot C_3^1 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 3 = 63, \quad p = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Задача 5. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\bar{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынута 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле для числа сочетаний

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56, \text{ а множество исходов, благоприятных событию } \bar{A} - \text{ это число воз-}$$

можных наборов по 5 шаров только из шести черных $m_{\bar{A}} = C_6^5 = 6$. Тогда $p(\bar{A}) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$, а

$$p(A) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}.$$

Задача 6. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания равны соответственно 0,6 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

A — оба попали в цель;

B — в цель попал хотя бы один.

Решение. Назовем событиями C и D попадание в мишень соответственно первого и второго стрелка и отметим, что C и D являются событиями совместными, но независимыми (иными словами, в мишень могут попасть оба стрелка, а вероятность попадания каждого не зависит от результата другого). Событие A представляет собой произведение событий C и D , поэтому $P(A) = P(C) \cdot P(D) = 0,6 \cdot 0,9 = 0,54$. Событие B является суммой C и D ; для опреде-

ления его вероятности воспользуемся общим видом теоремы сложения $P(B) = P(C + D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96$.

Задача 7. Из полного набора костей домино наудачу извлекаются три кости. Найти вероятность того, что все они – дубли.

Указание. Примените теорему умножения для зависимых событий.

Решение. Будем считать, что кости извлекаются по одной. Событием A назовем извлечение дубля в первый раз, событием B – извлечение второго дубля, событием C – третьего. Эти события являются зависимыми, так как после извлечения каждой очередной кости изменяется и число оставшихся костей (28, затем 27, затем 26), и количество дублей среди них (7, затем 6, затем 5).

Нам требуется найти вероятность произведения ABC .

$$p(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}; \quad p_A(B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}; \quad p_{AB}(C) = \frac{5}{26};$$

$$p(ABC) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{26} = \frac{5}{468}.$$

Задача 8. В первой урне находится 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй соответственно 10, 8 и 6. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару. Найти вероятность того, что они одного цвета (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Примените теорему сложения для трех несовместных событий: A – извлечены белые шары, B – черные, C – красные.

Решение. Событие, вероятность которого требуется определить, представляет собой сумму для трех несовместных событий: A – извлечены белые шары, B – черные, C – красные. Каждое из них, в свою очередь, является произведением двух независимых событий: извлечение шара нужного цвета из первой и второй урны. Применим теорему умножения для независимых событий и теорему сложения для несовместных событий:

$$p(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} = \frac{25}{288}; \quad p(B) = \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} = \frac{11}{72};$$

$$p(C) = \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{1}{12};$$

$$p(A + B + C) = \frac{25}{288} + \frac{11}{72} + \frac{1}{12} = \frac{31}{96} \approx 0,323.$$

Задача 9. Найти вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросках игральной кости (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Найдите вначале вероятность события, противоположного данному.

Решение. Событие, противоположное данному, заключается в том, что при четырех бросках шестерка не выпала ни разу. Найдем его вероятность, используя теорему умножения для не-

зависимых событий $p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}; \quad p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{671}{1296} \approx 0,518$.

Задача 10. В трех одинаковых урнах лежат шары: в первой — 5 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 6 черных, в третьей — 3 белых и 1 черный. Из случайно выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Будем считать гипотезами выбор одной из урн. Поскольку урны одинаковы, каждую из них можно выбрать с одинаковой вероятностью, а так как сумма вероятностей гипотез равна 1, то вероятность каждой гипотезы — $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

Условная вероятность события A , то есть извлечения белого шара из урны, определяется по классическому определению вероятности (количеством благоприятных исходов при этом является число белых шаров, а числом возможных исходов — общее число шаров в урне). Поэтому $P(A|H_1) = 5/8$, $P(A|H_2) = 2/8 = 1/4$, $P(A|H_3) = 3/4$.

Используя формулу полной вероятности, получаем $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{24} \approx 0,542$.

Задача 11. В студенческой группе 20 студентов. Из них 5 отличников, которые знают все экзаменационные вопросы, 8 студентов знают ответы на 70 % вопросов и 7 – на 50 %. Первый вызванный студент ответил на первый вопрос экзаменационного билета. Найти вероятность того, что он отличник.

Решение. Будем считать гипотезой H_1 то, что данный студент является отличником, H_2 – что он принадлежит ко второй группе, H_3 – к третьей. Тогда вероятности гипотез равны $P(H_1) = 5/20 = 0,25$, $P(H_2) = 8/20 = 0,4$, $P(H_3) = 7/20 = 0,35$.

Найдем условную вероятность события A — правильного ответа на первый вопрос – при осуществлении каждой гипотезы $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 0,7$, $P(A|H_3) = 0,5$. Следовательно, полная вероятность события A равна $P(A) = 0,25 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 0,5 = 0,705$.

Применяя формулу Байеса, находим $P(H_1|A) = \frac{0,25 \cdot 1}{0,705} = \frac{50}{141} \approx 0,355$.

Задача 12. Победу в волейбольном матче одерживает команда, выигравшая 3 партии. Найти вероятность того, что матч между командами, для которых вероятность выигрыша каждой партии равна соответственно 0,8 и 0,2, будет состоять из 5 партий.

Решение. Для того, чтобы потребовалось играть пятую партию, нужно, чтобы после четырех партий счет в матче был 2 : 2. Следовательно, каждая из команд должна выиграть любые две партии из четырех. Если $p = 0,8$ есть вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, а $q = 0,2$ — вероятность ее проигрыша, то, применяя формулу Бернулли, найдем, что $P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,64 \cdot 0,04 = 0,1536$.

Задача 13. В первой урне 4 белых шара и 6 черных, во второй 1 белый и 9 черных, в третьей 10 черных шаров. Из наудачу выбранной урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Указание. Используйте формулу полной вероятности, считая гипотезами выбор урны (все три гипотезы равновероятны).

Решение. Пусть событие A – извлечение белого шара, гипотезы H_1, H_2, H_3 – выбор соответствующей урны. Тогда

$$\begin{aligned} p(H_1) &= p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}, \\ p_{H_1}(A) &= \frac{4}{10}, \quad p_{H_2}(A) = \frac{1}{10}, \quad p_{H_3}(A) = \frac{0}{10} = 0, \\ p(A) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Задача 14. В ящике 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые (ответ округлить до третьего знака после запятой).

Указание. Используйте формулу полной вероятности, задавая четыре гипотезы по количеству новых мячей среди трех, выбранных для первой игры.

Решение. Пусть событие A – выбор для второй игры трех новых мячей.

Зададим пространство гипотез следующим образом:

H_1 – все мячи, взятые для первой игры, старые (тогда после первой игры в ящике по-прежнему 9 новых мячей);

H_2 – среди мячей, взятых для первой игры, один новый (тогда после первой игры новых мячей осталось 8);

H_3 – среди мячей, взятых для первой игры, два новых (для второй игры остается 7 новых);

H_4 – все мячи, взятые для первой игры, новые (для второй игры остается 6 новых).

Найдем вероятности гипотез, используя классическое определение вероятности и формулу для числа сочетаний:

$$p(H_1) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{20}{455} = \frac{4}{91}; \quad p(H_2) = \frac{C_6^2 \cdot C_9^1}{C_{15}^3} = \frac{15 \cdot 9}{455} = \frac{27}{91};$$

$$p(H_3) = \frac{C_6^1 \cdot C_9^2}{C_{15}^3} = \frac{6 \cdot 36}{455} = \frac{216}{455}; \quad p(H_4) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{84}{455} = \frac{12}{65}.$$

Аналогичным образом, учитывая изменение количества новых мячей перед второй игрой в зависимости от выбора гипотезы, найдем условную вероятность события A при реализации каждой гипотезы:

$$p_{H_1}(A) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{12}{65}, \quad p_{H_2}(A) = \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{56}{455} = \frac{8}{65},$$

$$p_{H_3}(A) = \frac{C_7^3}{C_{15}^3} = \frac{35}{455} = \frac{1}{13}, \quad p_{H_4}(A) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{4}{91}.$$

Теперь можно найти полную вероятность события A :

$$p(A) = \frac{4}{91} \cdot \frac{12}{65} + \frac{27}{91} \cdot \frac{8}{65} + \frac{216}{455} \cdot \frac{1}{13} + \frac{12}{65} \cdot \frac{4}{91} =$$

$$= \frac{528}{5915} \approx 0,089.$$

Задача 15. На двух станках изготавливаются одинаковые детали. Вероятность брака для детали, изготовленной на первом станке, равна 0,02, на втором – 0,05. Из ящика, в котором находятся 20 деталей, изготовленных на первом станке, и 30, изготовленных на втором, случайно выбрана деталь, которая после проверки оказалась доброкачественной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.

Указание. Примените формулу Байеса, выбрав в качестве гипотез изготовление детали на первом или втором станке. Тогда требуется, зная результат опыта, переоценить вероятность гипотезы H_2 .

Решение. Пусть гипотеза H_1 – деталь изготовлена на первом станке, H_2 – на втором, событие A – выбранная деталь доброкачественная. Найдем полную вероятность события A :

$$p(H_1) = \frac{20}{50} = 0,4, \quad p(H_2) = \frac{30}{50} = 0,6,$$

$$p_{H_1}(A) = 1 - 0,02 = 0,98, \quad p_{H_2}(A) = 1 - 0,05 = 0,95,$$

$$p(A) = 0,4 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,95 = 0,962.$$

Применяя формулу Байеса, найдем вероятность гипотезы H_2 при условии, что событие A произошло $p_A(H_2) = \frac{0,6 \cdot 0,95}{0,962} = \frac{285}{481} \approx 0,593$.

Задача 16. В некоторой местности 20% дней в году – дождливые и 80% – солнечные. Прогноз погоды дают два предсказателя. Первый ошибается в 30% случаев, второй – в 10%. Первый утверждает, что завтра будет солнце, второй – что дождь. Чей прогноз сбудется с большей вероятностью?

Указание. Примените формулу Байеса, считая гипотезами солнечную или дождливую погоду на завтрашний день, а событием A – выданные прогнозы.

Решение. Пусть гипотеза H_1 заключается в том, что в выбранный день будет солнечная погода, а гипотеза H_2 – дождливая. Тогда при реализации первой гипотезы прогноз первого предсказателя верен, а второго – ошибочен, а при реализации второй гипотезы – наоборот. Найдем полную вероятность события A (выдачи соответствующих прогнозов):

$$p(H_1) = 0,8, \quad p(H_2) = 0,2,$$

$$p_{H_1}(A) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07, \quad p_{H_2}(A) = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27,$$

$$p(A) = 0,8 \cdot 0,07 + 0,2 \cdot 0,27 = 0,11.$$

Итак, вероятность получения именно таких взаимоисключающих прогнозов равна 0,11. Переоценим вероятность первой гипотезы, зная, что событие A произошло. Если она окажется больше 0,5, то с большей вероятностью сбудется прогноз первого предсказателя, если мень-

ше 0,5 – прогноз второго. $p_A(H_1) = \frac{0,8 \cdot 0,07}{0,11} = \frac{56}{110} > \frac{1}{2}$ – более вероятно, что сбудется прогноз первого предсказателя.

Ответ: прогноз первого.

Задача 17. Найти вероятность выпадения 2-х шестерок при 5 бросках игральной кости.

Указание. Воспользуйтесь формулой Бернулли.

Решение.

$$n=5, \quad k=2, \quad p=\frac{1}{6}, \quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$
$$p_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{625}{3888} \approx 0,161.$$

Задача 18. Стрелку выдано 5 патронов для поражения трех мишеней. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что он израсходует 5 патронов и поразит все цели.

Указание. Событие, вероятность которого требуется определить, заключается в том, что последним, пятым выстрелом поражена последняя, третья мишень. Следовательно, при первых четырех выстрелах было ровно два попадания.

Решение. Представим событие, вероятность которого требуется определить, в виде произведения двух независимых событий: A – два попадания при четырех выстрелах, B – попадание при пятом выстреле. Тогда

$$p(A) = C_4^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^2 = 6 \cdot 0,16 \cdot 0,36 = 0,3456;$$
$$p(B) = 0,4; \quad p(AB) = 0,3456 \cdot 0,4 = 0,13824 \approx 0,138.$$

Задача 19. Для поражения цели произвели 7 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. При одном попадании цель выходит из строя с вероятностью 0,1, при двух – с вероятностью 0,5, при трех – всегда выходит из строя. Найти вероятность выхода цели из строя после 7 выстрелов.

Указание. Рассмотрите гипотезы H_1 – одно попадание из семи выстрелов, H_2 – два попадания, H_3 – три или более попаданий. Вероятности гипотез можно найти по формуле Бернулли. Затем для определения вероятности события A – выхода цели из строя – примените формулу полной вероятности.

Решение. Пусть событие A – выход цели из строя. Вероятность этого события зависит от количества попаданий, поэтому рассмотрим гипотезы H_1 – одно попадание из семи выстрелов, H_2 – два попадания, H_3 – три или более попаданий. Вероятности гипотез можно найти по формуле Бернулли:

$$p(H_1) = C_7^1 \cdot 0,6 \cdot 0,4^6 \approx 0,0172;$$
$$p(H_2) = C_7^2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^5 \approx 0,0774;$$
$$p(H_3) = 1 - p(H_1) - p(H_2) - p(0) \approx$$
$$\approx 1 - 0,0172 - 0,0774 - 0,4^7 \approx 0,9038;$$
$$p(A) = 0,0172 \cdot 0,1 + 0,0774 \cdot 0,5 + 0,9038 \cdot 1 \approx 0,944.$$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>

Рекомендации по подготовке к практическому занятию

Подготовку к каждому практическому занятию начинайте с изучения теоретического материала. При этом:

- вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- разберите доказательства теорем и выводы формул
- в завершение, прочтите теоретический материал еще раз, чтобы убедиться, что он освоен.

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Баврин, И. И. Математика : учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 616 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
2. Дорофеева, А. В. Математика : учебник для СПО / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 400 с. — (Серия : Профессиональное образование). — Режим доступа- <https://biblio-online.ru>
3. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 340 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/430699>

Дополнительные источники:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/437476>
2. Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 346 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/445990>
3. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Малугин. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 266 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/441412>
4. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 248 с. — (Бакалавр. Академический курс). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/434737>
5. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 : учебник для академического бакалавриата / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 305 с. — (Бакалавр. Академический курс). Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/bcode/434738>

Периодические издания:

Учебно-методический журнал «Математика» издательский дом «Первое сентября».

Интернет-ресурсы:

- 1 <http://www.mathematica.ru>
- 2 <http://window.edu.ru>

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изме- нения	Номер листа				Всего ли- стов в доку- менте	ФИО и подпись ответст- венного за внесение изме- нения	Дата внесе- ния измене- ния	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				