

О ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Выполнил студент группы 9312
Родченко Дмитрий Дмитриевич

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Тихомиров Алексей Сергеевич

Постановка задачи

Написать компьютерную программу,
реализующую методы поиска экстремумов
функции многих переменных.

Пусть целевая функция $f : R^d \mapsto \mathbb{R}$ принимает минимальное значение в единственной точке x_* . Рассмотрим проблему поиска точки глобального минимума x_* с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Путь решения проблемы — применить методы алгоритмов случайного поиска экстремума функции.

В качестве пространства оптимизации будем рассматривать пространства $X = \mathbb{R}^d$ и $X = [a, b]^d$ с d -мерной мерой Лебега μ и метрикой ,

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq n \leq d} |x_n - y_n|$$

Где $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $y = (y_1, \dots, y_d)$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x обозначим как $B_r(x) = \{y \in X : \rho_\infty(x, y) \leq r\}$.

Метрика ρ_∞ выбрана по соображениям простоты моделирования рассматриваемого случайного поиска.

Для поиска точки минимума X_* используются следующие методы:

1. алгоритм Марковского однородного монотонного случайного поиска;
2. алгоритм Марковского однородного случайного поиска с нормальным распределением;
3. алгоритм Марковского однородного случайного поиска с распределением Ингбера;
4. алгоритм Марковского неоднородного случайного поиска;
5. алгоритм Марковского неоднородного случайного поиска с нормальным распределением.

Рассмотрим алгоритм Марковского однородного монотонного случайного поиска

Обозначение « $\zeta \leftarrow P(\cdot)$ » читается так: «получить реализацию случайного вектора ζ с распределением P ». x — начальная точка поиска, а $P(x, \cdot)$ — марковские переходные(пробные) функции.

Рассмотрим случайный поиск алгоритма 1, функции $P(x, \cdot)$ которого обладают симметричными плотностями вида $p(x, y) = g(\rho_\infty(x, y))$, где ρ_∞ — метрика, а g — невозрастающая неотрицательная функция, определенная на полуоси $(0, +\infty)$. Функция g — форма поиска. Пусть при $0 < \nu < \theta \leq \Theta$ (ν, θ, Θ — параметры поиска) форма поиска g задается следующей формулой:

$$g(r) = \frac{1}{2^d \lambda} \begin{cases} \nu^{-d} & \text{при } 0 < r \leq \nu, \\ r^{-d} & \text{при } \nu < r \leq \theta, \\ \theta^{-d} & \text{при } \theta < r \leq \Theta, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases}$$

где $\lambda = d \ln(\theta/\nu) + \Theta^d/\theta^d$ — нормирующая константа (обеспечивающая необходимое для плотности условие нормировки).

Через $U_r(x, \cdot)$ обозначим равномерное распределение в шаре $B_r(x)$, т.е. положим $U_r(x, \cdot) = \mu(\cdot \cap B_r(x))/\mu(B_r(x))$. Пусть α — равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина. Получим алгоритм 2 моделирования случайного вектора ζ , имеющего распределение $P(x, \cdot)$ с формой (1).

1. Алгоритм моделирования случайной величины ξ

1. $\xi_0 \leftarrow x, k \leftarrow 1$.
2. $\zeta_k \leftarrow P(\xi_{k-1}, \cdot)$.
3. Если $f(\zeta_k) \leq f(\xi_{k-1})$, то $\xi_k \leftarrow \zeta_k$, иначе $\xi_k \leftarrow \xi_{k-1}$.
4. $k \leftarrow k + 1$ и перейти к шагу 2.

2. Алгоритм моделирования случайного вектора ζ

1. Получить α .
2. Если $\alpha \geq d \ln(\theta/v)/\lambda$, то $r \leftarrow \theta$, иначе $r \leftarrow v \exp(\lambda\alpha/d)$.
3. $\zeta \leftarrow U_r(x, \cdot)$, завершить работу алгоритма.

Пример

$$\Theta = 0,7;$$

Пространство $X = [-8,8]^2$, $x = (x_1, x_2)$, $N = 500$, $\nu = 0,02$.

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}((x_1^4 - 16x_1^2 + 5x_1) + (x_2^4 - x_2^2 + 5x_2)),$$

$$f(x_*) = -78.332.$$

$$x_* = (-2.903, -2.904).$$

Начальная точка поиска выбрана $x = (4,0, 6,4)$ и $f(x) = 537,18$.

Для разработки данной программы используется среда программирования IntelliJ IDEA 2016 и язык программирования Java

Главные причины:

- Удобная реализация математических расчетов;
- Доступность;
- Популярность.

Список литературы

- Tikhomirov A S 2018 On the program implementation of a Markov homogeneous monotonous random search algorithm of an extremum *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* Vol **441** 012055 1–8.
- Tikhomirov A S 2019 On the program implementation of a Markov homogeneous random search algorithm of an extremum with normal distributions *Journal of Physics: Conference Series* Vol **1352** 012052 1–7.
- Tikhomirov A S 2019 On the program implementation of a Markov inhomogeneous random search algorithm of an extremum with normal distributions *Journal of Physics: Conference Series* Vol **1352** 012053 1–8.
- Tikhomirov A S On the program implementation of one inhomogeneous Markov algorithm of search for extremum *Journal of Physics: Conference Series* Vol **1352** 012054 1–9.
- Tikhomirov A S 2019 On the program implementation of a Markov homogeneous random search algorithm of an extremum with Ingber's distribution *Journal of Physics: Conference Series* Vol **1352** 012055 1–7.

О ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Выполнил студент группы 9312
Родченко Дмитрий Дмитриевич

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Тихомиров Алексей Сергеевич