

Вопросы по ТФДП, гр. 7131, 2020 г.

1. Понятие мощности множества. Счетные множества. Свойства счетных множеств.
2. Несчетность множества действительных чисел. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
3. Теорема Кантора о мощности множества подмножеств. Свойства множеств мощности континуума.
4. Структура открытых и замкнутых подмножеств прямой.
5. Структура ограниченных совершенных множеств. Канторово совершенное множество. Теорема о мощности совершенного множества.
6. Функции ограниченной вариации на отрезке и их основные свойства.
7. Теорема о структуре функций ограниченной вариации. Необходимое и достаточное условие спрямляемости плоской кривой.
8. Внешняя мера на прямой и ее свойства.
9. Внутренняя мера ограниченного множества. Корректность определения (независимость от выбора отрезка). Свойства внутренней меры.
10. Понятие измеримого множества и меры Лебега. Основные свойства измеримых множеств.
11. Измеримость конечного дизъюнктного объединения интервалов. Измеримость открытых и замкнутых множеств.
12. Критерий измеримости ограниченного множества.
13. Измеримость объединения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Лебега.
14. Измеримость счетных объединений и пересечений измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Свойства непрерывности меры Лебега.
15. Регулярность меры Лебега. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов. Пример неизмеримого множества.
16. Измеримые функции. Равносильность различных условий измеримости. Эквивалентные функции. Измеримость эквивалентных функций.
17. Измеримость операций над измеримыми функциями. Измеримость суммы, произведения и частного измеримых функций.
18. Последовательности измеримых функций. Понятие сходимости “почти всюду”. Измеримость предельной функции. Понятие сходимости “по мере”.

19. Связь между сходимостью “почти всюду” и сходимостью “по мере”. Теоремы Лебега и Рисса.
20. Соотношение между сходимостью “почти всюду” и равномерной сходимостью. Теорема Егорова.
21. Аппроксимации измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина.
22. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции. Свойства интегральных сумм. Определение интеграла.
23. Корректность определения интеграла Лебега. Оценки интеграла и их следствия.
24. Счетная аддитивность интеграла по области интегрирования.
25. Равенство интегралов от эквивалентных функций. Свойства линейности и монотонности интеграла. Оценка модуля интеграла.
26. Условие равенства нулю интеграла от неотрицательной измеримой функции. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
27. Неравенство Чебышева. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
28. Восстановление дифференцируемой функции по ее производной.
29. Интеграл Лебега от неотрицательной суммируемой функции. Основные свойства.
30. Предельный переход под знаком интеграла. Лемма Фату и теорема Леви.
31. Интеграл Лебега от произвольной суммируемой функции и его свойства.
32. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла для равномерно суммируемых последовательностей.
33. Нормированное пространство суммируемых функций $L^1(E)$ и его полнота.