

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В.А.Литвинов, В.В.Учайкин*

ON FUNCTIONAL APPROXIMATION IN SOLVING INVERSE PROBLEMS

V.A.Litvinov, V.V.Uchaikin*

Барнаульский юридический институт МВД России, lva201011@yandex.ru

*Ульяновский государственный университет, vuchaikin@gmail.com

В работе описывается новый метод решения обратных задач, возникающих при решении интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма 2 рода. В основу метода положено использование приближенного представления решений прямого и сопряженного (в смысле Лагранжа) интегральных уравнений. Рассмотрено два метода построения приближенных решений, основанных на использовании значений нескольких решений приближенной задачи, а также вариационных производных приближенных решений. На примере модельных задач продемонстрирована хорошая точность приближенного представления решений интегральных уравнений в широком интервале искомых значений. Показано, что использованное приближенное представление решения прямой задачи сводит обратную задачу к решению системы алгебраических уравнений. Приведены примеры нахождения коэффициентов интегральных уравнений.

Ключевые слова: обратная задача, полином Эрмита, уравнение переноса, интегральные уравнения, дифференциальные уравнения

Для цитирования: Литвинов В.А., Учайкин В.В. О функциональной аппроксимации в решении обратных задач // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2020. №5(121). С.92-98. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5\(121\).92-98](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5(121).92-98).

This paper describes a new method for solving inverse problems that arise when solving Volterra and Fredholm integral equations of the 2nd kind. The method is based on the use of approximate representations of solutions of direct and conjugate (in the sense of Lagrange) integral equations. We consider two methods for constructing approximate solutions based on the use of values of several solutions to the approximate problem, as well as variational derivatives of approximate solutions. Good accuracy of approximate representation of solutions of integral equations in a wide range of desired values is demonstrated by the example of model problems. It is shown that the approximate representation of the solution of the direct problem reduces the inverse problem to the solution of a system of algebraic equations. Examples of finding coefficients of integral equations are given.

Keywords: inverse problem, Hermite polynomial, transfer equation, integral equations, differential equations

For citation: Litvinov V.A., Uchaikin V.V. On functional approximation in solving inverse problems // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2020. №5(121). С.92-98. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5\(121\).92-98](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5(121).92-98).

1. Введение

Ряд физических процессов описывается интегральными уравнениями Вольтерра или Фредгольма 2-го рода, в большинстве случаев являющимися линейными. В общем случае такие уравнения для функции Φ в операторной форме можно записать:

$$L\Phi = S, \quad (1)$$

где S в задачах переноса имеет смысл функции источника. Экспериментально измеряемые величины в общем случае можно представить как функционал J от Φ , определяемый функцией чувствительности детектора $D(y)$, где y — набор фазовых координат:

$$J(x) = \int \Phi(y) D(x, y) dy \equiv (\Phi, D). \quad (2)$$

Предположим, что оператор L зависит от некоторой функции $u(x)$, тогда и функционал J будет зависеть от u . Если в уравнении (1) неизвестной является функция Φ , то говорят о решении «прямой» зада-

чи. В том случае, когда неизвестной является функция S , то говорят об «обратной» задаче определения источника. Если ставится задача отыскания функции u , определяющей вид оператора L , то говорят о коэффициентной «обратной» задаче [1].

Если для решения интегро-дифференциальных уравнений математической физики разработано множество аналитических и численных методов, то «обратные» задачи даже на уровне постановки по-прежнему являются предметом научных исследований. При этом наличие эффективных методов решения прямых задач может способствовать как тестированию алгоритмов решения обратных задач, так и способствовать непосредственно математической постановке обратных задач.

В настоящей работе демонстрируется применение двойственного (прямого и сопряженного) подхода к решению интегральных уравнений вида (1), используемого в дальнейшем для математической формулировки обратных задач.

2. Функциональные аппроксимации решений «прямой» задачи

2.1. Прямые и сопряженные уравнения

Для вычисления показаний детектора (2) можно использовать сопряженные (в смысле Лагранжа) уравнения для функции ценности [2]. Уравнение для функции ценности Φ^+ , соответствующей уравнению (1) и функционалу (2), имеет вид:

$$L^+ \Phi^+ = D, \quad (3)$$

где L^+ — сопряженный в смысле Лагранжа оператор оператору L .

Если в правой части уравнения (3) стоит функция чувствительности детектора, то значение функционала J может быть вычислено и с использованием функции ценности Φ^+ :

$$J(x) = \int \Phi^+(x, y) S(y) dy \equiv (\Phi^+, S). \quad (4)$$

Равенство (4) можно рассматривать как математическую постановку «обратной» задачи по нахождению функции источника $S(x)$ по известным показаниям детектора. Указанное равенство является интегральным уравнением первого рода, для решения которого разработаны численные алгоритмы с различными методами регуляризации. В работе [3] приведены примеры решения задачи по определению функции источника для одномерного уравнения диффузии с использованием соотношения (4). Очевидно, что данный подход может быть использован для нахождения функции $S(x)$ при любом виде оператора L .

2.2. Вариационное интерполирование

Формулировка коэффициентной «обратной задачи» не является столь очевидной, как задача о нахождении функции источника. Даже при наличии аналитического решения уравнения (1) математическая формулировка задачи нахождения функции $u(x)$, определяющей вид оператора L , может вызвать серьезные затруднения. Наиболее просто коэффициентные «обратные» задачи решаются при возможности параметризации функционального вида $u(x)$ одним-двумя параметрами. Но для этого необходимо располагать предварительной информацией о виде функции $u(x)$.

Если зависимость оператора L от $u(x)$ удастся качественно параметризовать и этих параметров один-два, то для их нахождения можно провести серию решений уравнения (1), построить интерполяционный полином и найти искомые значения. Трудоемкость такого метода определяется сложностью решения уравнения (1), количеством неизвестных параметров и степенью чувствительности функционала (2) к вариациям этих параметров. Чтобы уменьшить трудозатраты при реализации данного подхода вместо точного решения уравнения (1) можно воспользоваться приближенными методами. Очевидно, что точность восстановления параметров, характеризующих оператор L , будет зависеть от точности используемого приближенного метода для широкого интервала изменений функционала (2).

В работе [4] нами продемонстрировано применение метода вариационного интерполирования

(ВИ-метода) [5] в качестве приближенного метода решения дифференциальных уравнений вида (1) для определения коэффициентов, входящих в эти уравнения. Показано, что использованный ВИ-метод позволяет с хорошей точностью (1%) описать изменение рассматриваемых функционалов на один-два порядка. При этом для построения приближенного ВИ-представления использовались аналитические решения упрощенных уравнений (1) и (3). Не вдаваясь в подробности ВИ-метода, подробно описанного в работе [5], отметим, что для построения ВИ-представления функционала (2) используются решения уравнений (1) и (3) для нескольких упрощенных «опорных» операторов L_1, L_2 и т.д. При помощи этих решений Φ_1, Φ_2 и Φ_1^+, Φ_2^+ и параметризованного оператора L вычисляются матричные элементы:

$$L_{ij} = \int \Phi_i^+(x) L(\alpha) \Phi_j(x) dx. \quad (5)$$

В общем случае «опорных» решений может быть любое количество. Вариационное представление функционала (2) J_v является функционалом от матричных элементов L_{ij} или при параметризации оператора L параметром (параметрами) α — функцией от α . Приравнявая значения этой функции к экспериментально измеренным значениям функционала, находим значения параметров α .

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром.

$$\Phi(x) = \int_a^b \omega(x) \rho(y) \Phi(y) dy + f(x). \quad (6)$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение:

$$\Phi(x) = C \omega(x) + f(x), C = \int_a^b \omega(x) f(x) dx / \left(1 - \int_a^b \omega(x) \rho(x) dx \right). \quad (7)$$

Пусть $\omega(x) = x^\alpha$, а $\rho(y) = y^\beta$, где $\alpha = 5$ и $\beta = 2$, будем считать неизвестными, значения которых надо определить. В качестве «опорных» рассмотрим решения уравнения (6) для точек в плоскости $\alpha \times \beta \in \{(3, 1.7), (3, 2.3), (7, 1.7), (7, 2.3)\}$. Для построения ВИ-представления решения уравнения (6) в точке x_0 необходимо предварительно найти решение сопряженного к нему уравнения:

$$\Phi^+(x) = \int_a^b \omega(y) \rho(x) \Phi^+(y) dy + \delta(x - x_0). \quad (8)$$

Данное уравнение также имеет аналитическое решение в виде:

$$\Phi^+(x) = D \omega(x_0) \rho(x) + \delta(x - x_0), D = \left(1 - \int_a^b \omega(x) \rho(x) dx \right)^{-1}. \quad (9)$$

Выражения (7) и (8) используются для вычисления матричных коэффициентов (5), при помощи которых строится вариационный функционал:

$$J_{vi}(\alpha, \beta, x_0) = \sum C_j(\alpha_j, \beta_j, x_0). \quad (10)$$

Коэффициенты C_j находятся из системы линейных уравнений:

$$\sum_j L_{ij} C_j = \Phi(\alpha_i, \beta_i, x_0). \quad (11)$$

На рис.1 представлены погрешности (в %) определения значений коэффициентов α и β , найденных путем приравнивания выражения (10) точным значениям функции $\Phi(x_0)$ и $\Phi(x_0+0,5)$ для различных значений x_0 . Погрешность восстановления коэффициента α не превышает сотых долей процента (сплошная линия). Несколько хуже восстанавливается значение коэффициента β , которое сильно зависит от выбора «опорных» точек, а также выбора значения x_0 . На рисунке представлены результаты расчетов с двумя наборами «опорных» точек. Если исследователь свободен в выборе «опорных» решений, то вычисление искомых коэффициентов может быть проведено в два-три этапа путем уменьшения расстояния между «опорными» точками.

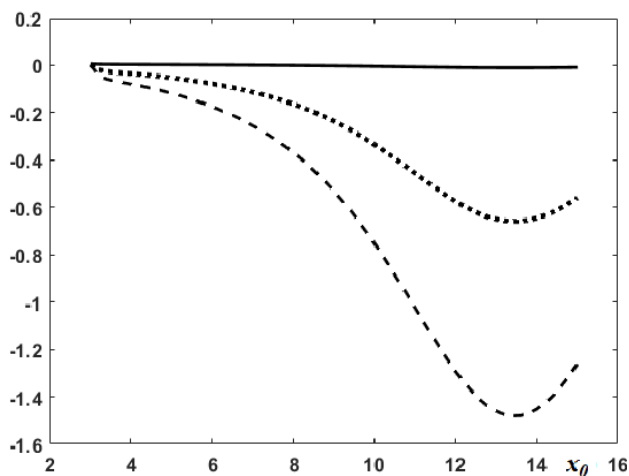


Рис.1. Относительная погрешность (в %) восстановления параметров α и β . Линия — погрешность восстановления α , пунктир — погрешность восстановления β для опорных точек $\{(3,1.7) (3,2.3) (7,1.7) (7,2.3)\}$, точки — для опорных точек $\{(3,1.8) (3,2.2) (7,1.8) (7,2.2)\}$

Для демонстрации «стабильности» рассматриваемого метода проведен еще один расчет по восстановлению различных значений параметра α . При этом по-прежнему неизвестными считались оба параметра α и β . Для восстановления параметров использовались точные значения Φ при $x_0=3$ и $x_0=5$. Из данных рис.2 видно, что даже для значений α , выходящих за границы опорного интервала $[3,7]$, погрешность восстановления параметров не превосходит половины процента.

Приведенные выше результаты показывают, что в случае возможности параметризации функциональной зависимости ядра интегрального оператора, вариационный метод интерполирования позволяет с хорошей точностью определить параметры, определяющие функциональный вид ядра. Ранее нами были сделаны аналогичные выводы и для параметров дифференциальных уравнений, включая дробный порядок оператора дифференцирования.

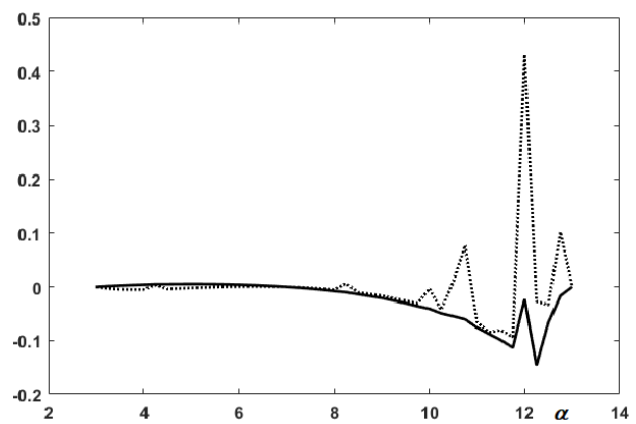


Рис.2. Зависимость относительной погрешности (в %) восстановления параметров α и β от исходного (восстанавливаемого) значения α . Сплошная линия — погрешность для α , точки — погрешность β

В том случае, когда неизвестен функциональный вид ядра оператора, «обратная» задача нахождения ядра интегрального оператора требует большего числа значений решения «прямой» задачи. Если решениям «прямой» задачи сопоставить ВИ-представление, то можно найти численные значения матричных элементов L_{ij} , определенных равенством (5), то есть получить интегральные уравнения первого рода относительно ядра оператора. При этом даже для двух «опорных» точек функционал зависит от четырех матричных элементов. Уменьшить число неизвестных можно, если несколько изменить вид аппроксимирующего функционала.

2.3. Функциональные полиномы

Высокая точность ВИ-представления функционалов обусловлена использованием информации не только об их значениях в нескольких «опорных» точках, но и об их вариациях вблизи этих точек, которая содержится в диагональных матричных элементах L_{ij} . Для функций в аналогичной ситуации используют интерполяционные полиномы Эрмита. В случае функциональных вариаций можно также построить аналог полинома Эрмита [6], если кроме значений искомого функционала использовать и его вариации в «опорных» точках.

Проварьируем уравнение (1) по значениям функции $u(x)$, от которой зависит оператор L , в некоторой точке x_1 .

$$L\Psi = -\frac{\delta L}{\delta u}\Phi, \text{ где } \Psi(x, x_1) \equiv \frac{\delta \Phi}{\delta u}. \quad (12)$$

По сложности решения и трудозатратам уравнение для вариационной производной Ψ такое же, как и уравнение (1).

Представим искомый функционал в виде:

$$J = \frac{\bar{u} - \bar{u}_2}{u_1 - u_2} J_1 + \frac{\bar{u} - \bar{u}_1}{u_2 - u_1} J_2 + (\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u} - \bar{u}_2)(C_1 + C_2 \bar{u}). \quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{u}_j(x_0) = \int u_j(x) q(x, x_0) dx, \quad \bar{u}(x_0) = \int u(x) q(x, x_0) dx, \quad (14)$$

где $q(x, x_0)$ — некоторая функция, такая, что приведенные выше интегралы существуют. Проварьируем равенство (13) по $u(x)$ в точке x_1 и положим $u(x) = u_1(x)$.

$$\frac{\delta J}{\delta u} \Big|_{u=u_1} = \Psi(x_0, x_1) = \frac{(J_2 - J_1)q(x_1)}{u_2 - u_1} - q(x_1)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)(C_1 + C_2 \bar{u}_1). \quad (15)$$

Аналогичное уравнение можно получить, полагая после варьирования $u = u_2$. Проинтегрировав данные уравнения по x_1 , получим уравнения на коэффициенты C_1 и C_2 .

Выражение (13) можно рассматривать как уравнение относительно $\bar{u}(x_0)$, если известны значения функционала $J(x_0)$. В этом случае равенство $\bar{u}(x_0) = \int u(x)q(x, x_0)dx$ будет интегральным уравнением первого рода для функции $u(x)$, определяющей оператор L . Выражение (13) легко обобщается и на произвольное число «опорных» точек.

В приведенных выше рассуждениях к функции $q(x, x_0)$ фактически не предъявлялось никаких требований, кроме существования интегралов (14). В то же время данная функция является ядром интегрального уравнения первого рода для функции $u(x)$ и ее вид может влиять на устойчивость решения этого уравнения. С другой стороны, выбор вида $q(x, x_0)$ будет влиять на точность представления (13) «прямой» задачи.

В том случае, когда речь идет об «обратной» задаче, т. е. нам известны значения функционала J , мы имеем возможность поэкспериментировать с выбором $q(x, x_0)$ и «опорных» функций $u_j(x)$. А далее в зависимости от конфигурации задачи решается уравнение Вольтерра или Фредгольма первого рода. В случае уравнения Фредгольма необходимо применять методы регуляризации, например, А.Н.Тихонова или М.М.Лаврентьева.

Представление (13) не является единственным, основанным на использовании функций $\bar{u}(x_0)$ и вариационных производных функционалов. Другим видом является дробно-полиномиальное представление, например:

$$J = \frac{A\bar{u} + B}{C\bar{u}^2 + D\bar{u} + 1} \quad \text{или} \quad J = \frac{A\bar{u}^2 + B\bar{u} + C}{D\bar{u}^3 + E\bar{u}^2 + F\bar{u} + 1}. \quad (16)$$

В отличие от представления (13), приводящего к системе линейных уравнений для коэффициентов C_j , выражения (16) требуют численного решения систем уравнений на неизвестные коэффициенты. При этом не является очевидным обобщение этих уравнений на произвольное число «опорных» точек. В то же время следует учитывать, что при аппроксимации функций применение дробно-полиномиального вида во многих случаях позволяет достичь лучшей точности, чем полиномиальная аппроксимация при том же числе неизвестных коэффициентов.

Произвольный вид функции $q(x, x_0)$ фактически означает, что мы можем выбрать $q = \delta(x - x_0)$ или $q(x, x_0) = 1$. Первый случай автоматически дает нам

решение обратной задачи $u(x_0) = \bar{u}(x_0)$, а второй приводит к задаче (в случае уравнения Фредгольма) с множеством решений. Но при этом выбор первого варианта может привести к большим погрешностям представления (13) или (16). Исходя из приведенных рассуждений, можно сделать вывод, что $q(x, x_0)$ желательно выбирать в виде, наиболее близком к дельта функции, например в виде распределения Гаусса, и, изменяя дисперсию распределения, добиваться наилучшей точности аппроксимации значений функционала.

Промежуточным вариантом между ВИ-представлением, рассмотренным в предыдущем параграфе, и функциональными полиномами, рассмотренными выше, является представление вида:

$$J_L = J_1 + J_2 - L_{12} + (J_1 - L_{12})(J_2 - L_{12})(C_1 + C_2 L_{12}), \quad (17)$$

где L_{12} определено равенством (5). Из данного равенства и выражений (2) и (4) следует, что $L_{12}(u_1) = J_2$ и $L_{12}(u_2) = J_1$. Это в свою очередь приводит к тому, что $J_L(u_1) = J_1$ и $J_L(u_2) = J_2$ при любых значениях коэффициентов C_1 и C_2 . Значения коэффициентов C_1 и C_2 можно найти, приравнявая вариации J_L вариациям J по u .

Проварьируем выражение (17) по $u(x_1)$ и положим $u = u_1$ или $u = u_2$.

$$\Psi_1(x_0, x_1) = -(\delta L_{12} / \delta u)(1 + (J_1 - J_2)(C_1 + C_2 J_2)), \quad (18)$$

$$\Psi_2(x_0, x_1) = -(\delta L_{12} / \delta u)(1 + (J_2 - J_1)(C_1 + C_2 J_1)).$$

Вид вариации $\delta L_{12} / \delta u$ определяется равенством (5) и видом зависимости L от $u(x)$. Если оператор L линейно зависит от $u(x)$, то $\delta L / \delta u = \delta(x - x_1)$. А вариация матричного элемента может быть представлена в виде:

$$\frac{\delta L_{12}}{\delta u} = \Phi_1^+(x_0, x_1)\Phi_2(x_1). \quad (19)$$

Проинтегрировав (18) по x_1 и x_2 с учетом (19), получим уравнения для коэффициентов C_1 и C_2 .

Рассмотрим в качестве примера интегральное уравнение Вольтерра II рода:

$$\Phi(E) - \int_E^{E_0} K(E', E)\Phi(E')dE' = S(E). \quad (20)$$

Данным уравнением описывается, например, равновесный энергетический спектр частиц с дифференциальным сечением взаимодействия $K(E', E)$.

Рассмотрим модельную задачу с ядром уравнения (20) в виде

$$K(E', E) = k\alpha(\alpha + 1)\left(\frac{E}{E'}\right)^{\alpha-2}\left(1 - \frac{E}{E'}\right)\frac{1}{E'}. \quad (21)$$

В этом случае решение уравнения (20) можно получить при помощи преобразования Меллина.

$$\Phi(E) = \frac{(\beta_1 + \alpha)(\beta_1 + \alpha - 1)}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\beta_1} + \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \alpha - 1)}{\beta_2 - \beta_1}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\beta_2} + \delta(E - E_0), \quad (22)$$

где $\beta_1 = (1 - 2\alpha - d)/2$, $\beta_2 = (1 - 2\alpha + d)/2$, $d = \sqrt{k(1 + 2\alpha)^2 + 1 - k}$.

В том случае, когда детектор измеряет интегральный спектр частиц с энергией больше E_1 , значения функционала J можно вычислить как интеграл от выражения (22).

$$J(E, E_1) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1) - k\alpha(\alpha+1)} + \frac{(\beta_1 + \alpha)(\beta_1 + \alpha - 1) \left(\frac{E_0}{E}\right)^{\beta_2}}{\beta_1(\beta_1 - \beta_2)} + \frac{(\beta_2 + \alpha)(\beta_2 + \alpha - 1) \left(\frac{E_0}{E}\right)^{\beta_2}}{\beta_2(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (23)$$

В качестве «опорных» выберем решения, соответствующие ядрам

$$K_i(E', E) = k_i \alpha_i \left(\frac{E}{E'}\right)^{\alpha_i - 2} \left(\frac{1}{E'}\right). \quad (24)$$

Учитывая, что сопряженное к (20) уравнение имеет вид:

$$\Phi^+(E) - \int_{E_1}^E K(E, E') \Phi^+(E') dE' = \theta(E - E_1), \quad (25)$$

где $\theta(E - E_1)$ — ступенчатая функция, получим набор «опорных» решений (20) и (24):

$$\Phi_j(E) = k_j \alpha_j (E_0/E)^{2+\alpha_j k_j - \alpha_j} / E_0 + \delta(E - E_0),$$

$$\Phi_i^+(E, E_1) = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i - \alpha_i k_i - 1} - \frac{\alpha_i k_i}{\alpha_i - \alpha_i k_i - 1} \left(\frac{E_1}{E}\right)^{\alpha_i - \alpha_i k_i - 1}. \quad (26)$$

Для вычисления коэффициентов C_1 и C_2 , входящих в выражение (17), необходимо получить также вариационную производную искомого функционала в «опорных» точках, которая с учетом равенства (4) равна вариации $\Psi^+(E, E_1)$ при $E = E_0$. Таким образом, уравнение для вариации функционала примет вид:

$$\Psi^+(E_0, E_1, x, y) = \int_{E_1}^{E_0} K(E_0, E') \Psi^+(E', E_1, x, y) dE' + \delta(E_0 - x) \Phi^+(y, E_1). \quad (27)$$

Решение данного уравнения может быть также получено при помощи преобразований Меллина:

$$\Psi_j^+(E_0, E_1, x, y) = \Phi_j^+(y, E_1) \left(\frac{\alpha_j k_j}{E} \left(\frac{x}{E}\right)^{\alpha_j - 2 - \alpha_j k_j} + \delta(x - E) \right). \quad (28)$$

Если коэффициенты C_1 и C_2 находить непосредственно из уравнений (18), то они получатся как функции точек варьирования x и y , что фактически делает их применение невозможным. Очевидно, требуется некоторое усреднение по x и y . Вариационная производная (27), стоящая в левой части равенств (18), может быть использована для вычисления частной производной функционала по некоторому параметру α , в том случае, когда вариация функции $u(x)$, определяющей вид оператора L , связана только с изменением этого параметра α .

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int \Psi(x, x_1) \frac{\partial u}{\partial \alpha} dx_1. \quad (29)$$

Исходя из данного равенства, разумно провести усреднение уравнений (18) с весовым множителем, равным разности «опорных» функций (ядер $K_1(E', E)$ и $K_2(E', E)$).

Домножим уравнения (18) на $K_1(x, y) - K_2(x, y)$ и проинтегрируем по x от E_1 до E_0 и по y от E_1 до x .

Из полученных уравнений найдем коэффициенты C_1 и C_2 для приближенного выражения функционала (17). Приравняв равенства (17) и (22), найдем численные значения $L_{12}(E_0, E_1)$. Это позволяет сформулировать задачу нахождения ядра $K(E', E)$ уравнения (19) в виде:

$$\int_{E_1}^{E_0} \left(\Phi_1^+(E, E_1) \int_E^{E_0} K(E', E) \Phi_2(E', E_0) dE' \right) dE = \int_{E_1}^{E_0} \Phi_1^+(E, E_1) \Phi_2(E, E_0) dE - L_{12}(E_0, E_1). \quad (30)$$

В рассматриваемом модельном примере уравнение (30) можно упростить, принимая во внимание, что «опорные» решения зависят от отношений E/E_0 и E/E_1 .

Введем обозначения:

$$\varepsilon \equiv E/E_0, \quad \varepsilon_1 \equiv E_1/E_0, \quad \tilde{K}(\varepsilon)/E \equiv K(E_0, E)/E_0,$$

$$\Phi_1^+(\varepsilon/\varepsilon_1) \equiv \Phi_1^+(E, E_1), \quad \Phi_2(\varepsilon) \equiv E_0 \Phi_2^+(E, E_0), \quad (31)$$

$$W(\varepsilon_1, y) \equiv \frac{1}{y} \int_{\varepsilon_1}^y \Phi_1^+(\varepsilon/\varepsilon_1) \Phi_2(\varepsilon/y) d\varepsilon.$$

С учетом данных обозначений уравнение (30) примет вид:

$$\int_{\varepsilon_1}^1 W(\varepsilon_1, y) \tilde{K}(y) dy = W(\varepsilon_1, 1) - L_{12}(\varepsilon_1). \quad (32)$$

Уравнение (32) является уравнением Вольтерра I рода относительно искомого ядра $\tilde{K}(y)$. Методы решения таких уравнений хорошо освещены в научной литературе. В данном случае уравнение сводилось к уравнению второго рода путем дифференцирования по ε_1 .

Учитывая наличие в выражении для $\Phi_2(\varepsilon)$ дельта функции Дирака (27), после дифференцирования получим уравнение Вольтерра второго рода:

$$\tilde{K}(\varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{\partial W(\varepsilon_1, y)}{\partial \varepsilon_1} \tilde{K}(y) dy - \frac{\partial W(\varepsilon_1, 1)}{\partial \varepsilon_1} - \frac{L_{12}(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1}. \quad (33)$$

Производная $L_{12}(\varepsilon_1)$ вычислялась численно, так как сами значения L_{12} находились как результат численного решения алгебраического уравнения. Само уравнение (33) также решалось численным методом с применением кусочно полиномиальной аппроксимации искомой функции $\tilde{K}(y)$ полиномами третьей степени.

На рис.3 и 4 приведены результаты решения уравнения (33) для двух наборов «опорных» функций $K_j(E, E')$ и искомой функции, заданной выражением (21). Значения исходной функции представлены сплошной линией, а результат решения уравнения (33) — кружки.

Анализ результатов, представленных на рис.3 и 4, показывает, что даже при существенном различии «опорных» функций описываемый метод позволяет восстановить ядро интегрального оператора с хорошей точностью.

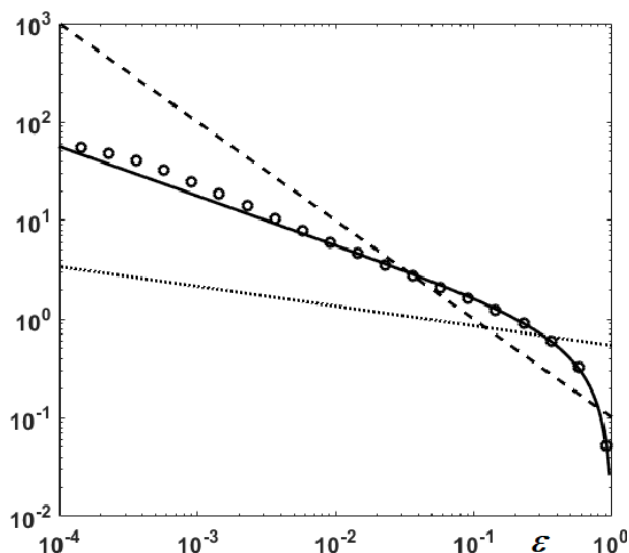


Рис.3. Значения $\tilde{K}(\varepsilon)$. Параметры исходной функции: $\alpha = 1,5$, $k = 0,15$. Линия — искомая функция, пунктир — K_1 при $\alpha = 1$, $k = 0,1$, точки — K_2 при $\alpha = 1,8$, $k = 0,3$, кружки — решение (33)

Несомненно, примененный в работе метод решения уравнения (32) с дифференцированием «экспериментальных» данных может привести к неустойчивости решения. Но в этом случае можно использовать предварительное сглаживание результатов дифференцирования или другие известные методы решения уравнения (33).

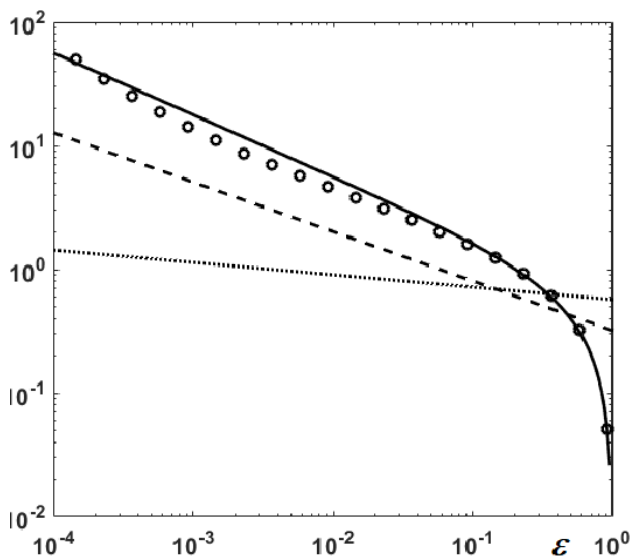


Рис.4. Значения $\tilde{K}(\varepsilon)$. Параметры исходной функции: $\alpha = 1,5$, $k = 0,15$. Линия — искомая функция, пунктир — K_1 при $\alpha = 1,6$, $k = 0,2$, точки — K_2 при $\alpha = 1,9$, $k = 0,3$, кружки — решение (33)

В рассмотренном примере для нахождения ядра интегрального оператора по известному (экспериментально измеренному) решению интегрального уравнения использовалось приближенное представление функционала (17). Алгоритм решения не изме-

нился бы, если мы использовали бы представление (16) или (13). При этом перед нами не стоит задача априорной оценки погрешности выбранного представления функционала. При решении обратной задачи мы располагаем значениями функционала и нам требуется аппроксимировать их таким выражением, чтобы оно, во-первых, наилучшим образом описывало экспериментальные данные, а во-вторых, позволяло свести задачу нахождения неизвестных коэффициентов уравнения к одной из стандартных математических задач. Именно это и позволяют сделать приведенные выше представления функционалов. В каждом конкретном случае выбор вида функционала, «опорных» решений определяется требованием выполнения первого условия — максимально точного описания экспериментальных данных. Естественно, наличие некоторой предварительной информации о виде искомой функции позволит лучше подобрать «опорные» решения или свести задачу к отысканию параметров.

3. Заключение

Результаты рассмотренных модельных примеров демонстрируют возможности описанного метода приближенного представления функционалов аналогами интерполяционных формул для решения обратных задач. Предложенный метод является универсальным с точки зрения сведения обратной задачи к интегральным уравнениям первого рода. Не представляется возможным дать строгие рекомендации по выбору формы представления функционала. На первом этапе решения обратной задачи методом подбора необходимо определиться с выбором формы аппроксимации экспериментальных данных (функционала), а также количеством опорных решений. Конечно, желательно иметь опорные решения, которые максимально близко описывают экспериментальные данные.

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
2. Льюис Дж. Ценность. Сопряженная функция. М.: Атомиздат, 1972. 175 с.
3. Литвинов В.А., Учайкин В.В. Метод сопряженного уравнения в задаче об определении источника диффузии // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2019. Т.11. №3. С.20-27.
4. Учайкин В.В., Литвинов В.А. Вариационное интерполирование функционалов в обратных задачах теории переноса // Сибирский журнал вычислительной математики, 2019. №22(3). С.351-366.
5. Учайкин В.В. Вариационный метод интерполирования ядерно-технических расчетов // Атомная энергия. 1989. Т.67. С.54-55.
6. Литвинов В.А. О построении функциональных полиномов для решений интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Физика. 2020. Т.63. № 5(749). С.128-134.
7. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1959. Т.127. №1. С.31-33.

References

1. Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p.
2. Lewins J. Importance — The Adjoint Function. Pergamon Press Ltd., 1965, 172 p. (Rus. ed.: Tsennost'. Sopryazhennaya funktsiya. Moscow, Atomizdat, 1972).
3. Litvinov B.A., Uchaykin B.B. Metod sopryazhennogo uravneniya v zadache ob opredelenii istochnika diffuzii [Adjoint equation method for solving the inverse diffusion source problem]. Bulletin of the South Ural State University, series 'Mathematics. Mechanics. Physics', 2019, vol. 11, no. 3, pp. 20–27.
4. Uchaykin V.V., Litvinov V.A. Variatsionnoe interpolirovanie funktsionalov v obratnykh zadachakh teorii perenosa [Variational interpolation of functionals in transport theory inverse problems]. Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki, 2019, no. 22(3), pp. 351–366.
5. Uchaykin V.V. Variatsionnyy metod interpolirovaniya yadernno-tehnicheskikh raschetov [Variational method of interpolation of nuclear-engineer calculations]. Atomnaya energiya, 1989, vol. 67, pp. 54–55.
6. Litvinov V.A. O postroenii funktsional'nykh polinomov dlya resheniy integro-differentsial'nykh uravneniy [Construction of functional polynomials for solutions of integrodifferential equations]. Izvestiya vuzov. Fizika, 2020, vol. 63, no. 5(749), pp. 128–134.
7. Lavrent'ev M.M. Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda [On Integral Equations of the First Kind]. Doklady AN SSSR, 1959, vol. 127, no. 1, pp. 31–33.