

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
ГУМАНИТАРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность: 38.02.07 Банковское дело
Квалификация выпускника: специалист банковского дела

ПРИНЯТО:

Предметной (цикловой) комиссией
общеобразовательных,
общегуманитарных, социально-
экономических, математических и
естественнонаучных дисциплин
колледжа

Протокол № 1
от «31» августа 2020 г.

Председатель предметной
(цикловой) комиссии


(подпись)

Н.Х. Федерова
(Ф.И.О.)

Разработчик:
преподаватель ГЭК НовГУ


(подпись) Ефимова Т.Н.
(Ф.И.О.)
«29» августа 2020 г.

Содержание

Пояснительная записка.....	4
Тематический план.....	5
Содержание практических занятий	9
Практическое занятие № 1.....	9
Практическое занятие № 2.....	10
Практическое занятие № 3.....	13
Практическое занятие № 4.....	15
Практическое занятие № 5.....	27
Практическое занятие № 6.....	30
Практическое занятие № 7.....	35
Практическое занятие № 8.....	37
Практическое занятие № 9.....	49
Практическое занятие № 10.....	40
Практическое занятие № 11.....	41
Информационное обеспечение обучения.....	44
Лист внесения изменений к методическим рекомендациям по практическим занятиям...	46

Пояснительная записка

Методические рекомендации по практическим занятиям, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине ЕН.01 «Элементы высшей математики» составлены в соответствии с:

1. Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 38.02.07 Банковское дело;
2. Рабочей программой учебной дисциплины;
3. Локальными актами НовГУ.

Методические рекомендации включают 10 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины «Математика» в объеме 26 часов.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **уметь**:

- решать системы линейных уравнений;
- производить действия над векторами, составлять уравнения прямых и определять их взаимное расположение;
- вычислять пределы функций;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- моделировать и решать задачи линейного программирования.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **знать**:

- основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы математического анализа;
- виды задач линейного программирования и алгоритмы их моделирования.

Критерии оценки выполненного практического задания:

Оценка «5» ставится за работу, выполненную полностью и без недочетов.

Оценка «4» ставится за выполненную полностью работу, но при наличии в ней не более:

- а) одной негрубой ошибки и одного недочета или
- б) трех недочетов.

Оценку «3» студент получает тогда, когда он правильно выполнил не менее $\frac{2}{3}$ всей работы или допустил не более:

- а) одной грубой ошибки и двух недочетов, или
- б) одной грубой и одной негрубой ошибки, или
- в) двух грубых ошибок, или
- г) одной негрубой ошибки и трех недочетов.

Оценку «2» выставляют тогда, когда работа выполнена хуже, чем это требуется для оценки «3».

Тематический план и содержание учебной дисциплины

«Элементы высшей математики»

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные работы и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Уровень освоения
1	2	3	4
Раздел 1. Элементы линейной алгебры		12	
Тема 1.1. Матрицы и определители	Содержание учебного материала Понятие матрицы, элемента матрицы. Действия с матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, транспонирование матриц, умножение матриц. Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителей.	2	1,2,3
	Практическое занятие № 1: выполнение действий с матрицами.	2	
	Практическое занятие № 2: вычисление определителей.	2	
Тема 1.2. Решение систем линейных уравнений	Содержание учебного материала Понятие системы линейных уравнений, решения систем линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений.	2	1,2,3
	Практическое занятие № 3: решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	4	
Раздел 2. Элементы аналитической геометрии		6	
Тема 2.1. Элементы линейной алгебры (векторы, операции над векторами)	Содержание учебного материала Понятие вектора, модуля; коллинеарные, компланарные вектора. Действия с векторами.	1	1,2,3
	Практическое занятие № 4: выполнение действий над векторами.	2	
Тема 2.2. Уравнение прямой	Содержание учебного материала Уравнение прямой. Взаимное расположение прямых в пространстве.	1	1,2,3
	Практическое занятие № 5: составление уравнений прямых.	2	
Раздел 3. Линейное программирование		4	
Тема 3.1. Понятие и сущность линейного программирования	Содержание учебного материала Понятие и сущность линейного программирования.	1	1,3
Тема 3.2. Системы линейных неравенств с двумя переменными	Содержание учебного материала Системы неравенств с двумя переменными.	1	1

Тема 3.3. Решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом	Практическое занятие № 6: решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом.	2	2,3
Раздел 4. Основы математического анализа		22	
Тема 4.1. Теория пределов	Содержание учебного материала Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	1	1,2,3
	Практическое занятие № 7: вычисление пределов функций.	2	
	Самостоятельная работа № 1: решение задач на вычисление пределов функций.	1	
Тема 4.2. Производная и дифферен- циал	Содержание учебного материала Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Дифференциал функции.	1	1,2,3
	Практическое занятие № 8: вычисление производной сложной, обратной функции.	2	
	Самостоятельная работа № 2: вычисление производных высших порядков.	1	
Тема 4.3. Исследование функций и построение графиков	Содержание учебного материала Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.	2	1,2,3
	Практическое занятие № 9: исследование функции, построение графика функции.	4	
Тема 4.4. Неопределённый интеграл	Содержание учебного материала Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Методы интегрирования.	2	1,2,3
	Практическое занятие № 10: вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования; вычисление неопределённых интегралов методом подстановки и по частям.	2	
Тема 4.5. Определённый интеграл	Содержание учебного материала Понятие определённого интеграла. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.	2	1,2,3
	Практическое занятие № 11: вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла.	2	
Всего:		44	

Содержание практических занятий

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическая работа № 1 (2 часа)

Выполнение действий с матрицами

Цель работы: научиться выполнять сложение, вычитание матриц одинакового размера;

умножение матриц на число; умножение матриц друг на друга.

Студент должен:

знать:

- определение матрицы, действия над матрицами и их свойства;
- элементарные преобразования матриц;

уметь:

- выполнять операции над матрицами.

2. Необходимое оборудование и материалы: Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий изложены в лекции «Матрицы и действия над матрицами».

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

- матрица;
- элемент матрицы;
- диагонали матрицы;
- вектор-столбец, вектор-строка;
- квадратная матрица;
- равные матрицы;
- симметричная матрица;
- диагональная матрица;
- единичная матрица;
- нулевая матрица;
- треугольная матрица;
- транспонированная матрица;
- операция транспонирования матрицы;
- правила сложения и вычитания матриц;
- правило умножения матрицы на число;
- свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число;
- правило умножения матриц;
- свойства умножения матриц.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала.
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Вычислите элементы матриц K, M, N, D, T, H, если

$$K = 2A + C$$

$$M = B - 4C$$

$$N = 3C + A - B$$

$$D = A + B + C$$

$$T = 3A - 2B + 4C$$

$$H = 5(K - D + C)$$

2. Докажите, что для любых матриц A , B и C , элементы, которых действительные числа справедливы законы сложения и умножения на число, то есть

$$A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

3. Для матриц A и B найдите $\frac{1}{2}A$, $\frac{3}{5}B$, $3A - \frac{1}{5}B$, $\frac{(A + 9B)}{3}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 12 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 \\ -5 & -10 & -15 \\ 20 & \frac{20}{3} & -\frac{15}{9} \end{pmatrix}$$

4. Для следующих матриц найдите транспонированную матрицу A^T , B^T , C^T , D^T :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ -8 & 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Даны матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ и число $\lambda = 2$. Найти $(A^T + 3(A + B^T))/2$

Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} \cdot e_{11} + a_{12} \cdot e_{21}; \quad a_{11} \cdot e_{12} + a_{12} \cdot e_{22})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = (a_{11} \cdot e_{11} + a_{12} \cdot e_{21})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot e_{11} & a_{11} \cdot e_{12} \\ a_{21} \cdot e_{11} & a_{21} \cdot e_{12} \end{pmatrix}$$

Задание: выполнить действия

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & - \\ 0 & 6 & - \\ 5 & -2 & \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$13. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$14. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$15.$$

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение матрицы.

2. Что обозначают индексы i, j ?
3. Перечислите виды матриц.
4. Сформулируйте правило сложения и вычитания матриц одного размера.
5. Сформулируйте правило умножения матрицы на число и матриц друг на друга.
6. При каком условии можно умножить матрицу на матрицу?
7. Перечислите свойства операций над матрицами.

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1. Матрицы и определители

Практическая работа № 2 (2 часа)

Вычисление определителей

1. Цель работы: научиться вычислять определители второго, третьего и n -ого порядка.

Студент должен:

знать:

- определение определителя второго порядка, свойства определителей;
- определение определителя третьего порядка, свойства определителей;

уметь:

- вычислять определители второго и третьего порядка;
- разлагать определитель по элементам строки или столбца.

2. Необходимое оборудование и материалы:

1. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий изложены в лекции «Определители матриц, их вычисление».

2. Дадаян А.А. Математика: Учебник. — 2-е издание. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 — 552 с. — (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

- понятие определителя первого, второго, третьего порядка;
- понятие минора элемента;

- понятие алгебраического дополнения элемента;
- правила вычисления определителя первого, второго, третьего порядка;
- понятие определителя n-го порядка;
- правила вычисления определителя n-го порядка;
- свойства определителя;
- понятие вырожденной матрицы.

1. Лекция «Определители и их свойства».

2. Дадаян А.А. Математика, стр.94-96; стр.99-100.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала.

2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий см. лекция «Определители матриц, их вычисление».

2. Выполните следующие задания:

№1 Вычислите определители второго и третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 15 & -8 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 13 & 5 \\ 15 & 14 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

№ 2. Вычислить следующие определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

5.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

№ 3. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

№ 4. Вычислите определители пятого порядка:

$$1. \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

№ 5. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Доказать, что определитель тоже делится на 17.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем первого, второго и третьего порядка?
2. Что называется минором элемента?
3. Какими свойствами обладает определитель?
4. Что называется определителем n-ого порядка?
5. Какая матрица называется вырожденной?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.2. Решение систем линейных уравнений

Практическая работа № 3 (4 часа)

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

1. Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

Студент должен:

знать:

- определение системы линейных уравнений (СЛУ), однородных и неоднородных систем

уметь:

- решать системы по правилу Крамера;
- решать системы методом Гаусса.

2. Необходимое оборудование и материалы:

Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

- понятие определителя первого, второго, третьего порядка;
- понятие минора элемента;
- понятие алгебраического дополнения элемента;
- правила вычисления определителя первого, второго, третьего порядка;
- понятие определителя n-го порядка;
- правила вычисления определителя n-го порядка;
- понятие системы линейных уравнений;
- однородные, неоднородные системы линейных уравнений;
- правило Крамера для решения СЛУ
- метод Гаусса.

1. Лекция «Определители и их свойства»

2. Дадаян А.А. Математика, стр.92 §4.,5; стр.98 §4.6.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий см. лекция «Определители матриц, их вычисление».

2. Повторите Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий стр.92 §4.,5; стр.98 §4.6 Дадаян А.А.

Математика.

3. Выполните следующие задания:

3.1. Дадаян А.А. Математика стр.98 № 4.21

3.2. Дадаян А.А. Математика стр.102 № 4.23

3.3. Выполните следующие задания методом Гаусса:

Дадаян А.А. Математика стр.98 № 4.21 (1 столбик)

Дадаян А.А. Математика стр.102 № 4.23 (1 столбик)

Дадаян А.А. Математика стр.105 № 4.24 (1 столбик)

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Что называется системой линейных уравнений?

2. В чем заключается правило Крамера для решения систем линейных уравнений?

3. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 2.1. Элементы линейной алгебры (векторы, операции над векторами)

Практическая работа № 4 (2 часа)

Выполнение действий над векторами

1. Цель работы: обобщить, систематизировать знания по указанной теме; сформировать умения выполнять векторное и смешанное произведение векторов

Студент должен:

знать:

- понятие вектора;
- понятие модуля вектора
- понятие коллинеарных векторов;
- понятие равных векторов;
- понятие компланарных векторов;
- понятие угла между векторами;
- понятие орта;
- разложение вектора по базису;
- правила выполнения действий над векторами;
- свойства действий над векторами.

уметь:

- производить действия над векторами;
- вычислять длину вектора, угол между векторами;
- определять коллинеарность и перпендикулярность векторов;
- вычислять скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.

2. Необходимое оборудование и материалы:

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

2. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий изложены в лекции «Векторы и действия с векторами».

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

Вектор – это направленный отрезок, соединяющий две точки в пространстве или в плоскости. Векторы обычно обозначаются либо маленькими буквами, либо начальной и конечной точками. Сверху обычно ставят чёрточку.

Например, вектор, направленный из точки A к точке B , можно обозначить $\mathbf{a}$.

Нулевой вектор $\mathbf{0}$ или 0 – это вектор, у которого начальная и конечная точки совпадают, т.е. $A = B$. Отсюда, $\mathbf{0} = -\mathbf{0}$.

Длина (модуль) вектора $\mathbf{a}$ – это длина отображающего его отрезка AB , обозначается $|\mathbf{a}|$. В частности, $|\mathbf{0}| = 0$.

Векторы называются *коллинеарными*, если их направленные отрезки лежат на параллельных прямых. Коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначаются $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Три и более векторов называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости.

Сложение векторов.

а) *параллельного переноса* одного из векторов таким образом, чтобы его начальная точка совпала с конечной точкой второго вектора;

б) *геометрического сложения*, т.е. построения результирующего вектора, идущего от начальной точки неподвижного вектора к конечной точке перенесённого вектора.

Вычитание векторов. Эта операция сводится к предыдущей путём замены вычитаемого вектора на противоположный: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Законы сложения.

I. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Переместительный закон).

II. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (Сочетательный закон).

III. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

IV. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Законы умножения вектора на число.

I. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

II. $m \mathbf{a} = \mathbf{a} m$, $|m \mathbf{a}| = |m| \cdot |\mathbf{a}|$.

III. $m(n \mathbf{a}) = (mn) \mathbf{a}$. (Сочетательный закон умножения на число).

IV. $(m + n) \mathbf{a} = m \mathbf{a} + n \mathbf{a}$, (Распределительный закон умножения на число).

Скалярное произведение векторов

Определение. Угол между ненулевыми векторами AB и CD – это угол, образованный векторами при их параллельном переносе до совмещения точек A и C .

Определение. Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

Если один из векторов нулевой, то их скалярное произведение в соответствии с определением равно нулю:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 0.$$

Если оба вектора ненулевые, то косинус угла между ними вычисляется по формуле:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, равное $|\mathbf{a}|^2$, называется *скалярным квадратом*. Длина вектора $\mathbf{a}$ и его скалярный квадрат связаны соотношением:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Скалярное произведение двух векторов:

- **положительно**, если угол между векторами **острый**;
- **отрицательно**, если угол между векторами **тупой**.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов **равно нулю** тогда и только тогда, когда угол между ними прямой, т.е. когда эти **векторы перпендикулярны** (ортогональны):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Свойства скалярного произведения.

Для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и любого числа m справедливы следующие соотношения:

$$I. (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad (\text{Переместительный закон})$$

$$II. (m\mathbf{a}, \mathbf{b}) = m(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

$$III. (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (\text{Распределительный закон})$$

Единичные ортогональные векторы.

В любой прямоугольной системе координат можно ввести *единичные попарно ортогональные векторы* $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, связанные с координатными осями: $\mathbf{i}$ – с осью X , $\mathbf{j}$ – с осью Y и $\mathbf{k}$ – с осью Z . В соответствии с этим определением:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0,$$

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1.$$

Любой вектор $\mathbf{a}$ может быть выражен через эти векторы единственным образом:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Другая форма записи: $\mathbf{a} = (x, y, z)$. Здесь x, y, z – *координаты* вектора $\mathbf{a}$ в этой системе координат.

В соответствии с последним соотношением и свойствами единичных ортогональных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ скалярное произведение двух векторов можно выразить иначе.

$$\text{Пусть } \mathbf{a} = (x, y, z); \mathbf{b} = (u, v, w). \text{ Тогда } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = xu + yv + zw.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Длина (модуль) вектора $\mathbf{a} = (x, y, z)$ равна:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x + u, y + v, z + w);$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x - u, y - v, z - w).$$

Определение векторного произведения

Определение. Три некомпланарных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую** тройку, если с конца третьего вектора с кратчайший поворот от первого век-

тора a ко второму вектору b виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой (см. рис. 16).

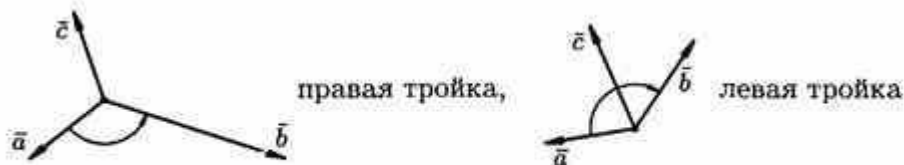


Рис. 16.

Определение. Векторным произведением вектора a на вектор b называется вектор c , который:

1. Перпендикулярен векторам a и b , т. е. $c \perp a$ и $c \perp b$;
2. Имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах a и b как на сторонах (см. рис. 17), т. е. $|c| = |a| \cdot |b| \sin \varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;

3. Векторы a , b и c образуют правую тройку.

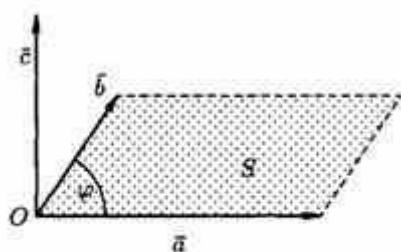


Рис. 17.

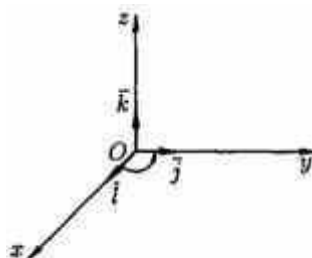


Рис. 18.

Векторное произведение обозначается $a \times b$ или $[a, b]$.

Свойства векторного произведения

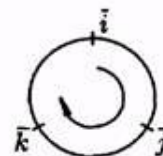
1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак $a \times b = -(b \times a)$.
2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\square(a \times b) = (\square a) \times b = a \times (\square b)$.
3. Два ненулевых вектора a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0$.
4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:
 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

Выражение векторного произведения через координаты

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов i, j и k :

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора $a = a_x i + a_y j + a_z k$ и $b = b_x i + b_y j + b_z k$.

Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\
 &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + \\
 &\quad + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \\
 &= \vec{0} + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + \vec{0} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + \vec{0} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}, \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (7.2)$$

так как правая часть равенства (7.1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (7.2) легко запоминается.

Некоторые приложения векторного произведения

Коллинеарность векторов

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha, \text{ т. е. } S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \text{ И, значит, } S = 1/2 |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Определения смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий [вектор](#). Такое произведение называется векторно-скалярным, или смешанным, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемени местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$.

Действительно, $(a \times b) \cdot c = \pm V$ и $a \cdot (b \times c) = (b \times c) \cdot a = \pm V$. Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов a, b, c и b, c, a — одной ориентации.

Следовательно, $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(a \times b) \cdot c$ в виде abc без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемени мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $abc = -acb$, $abc = -bac$, $abc = -cba$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов a, b и c равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Если $abc = 0$, то a, b и c — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $abc = \pm V$, то получили бы, что $abc \neq 0$. Это противоречит условию: $abc = 0$.

Обратно, пусть векторы a, b, c — компланарны. Тогда **вектор** $d = a \times b$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы a, b, c , и следовательно, $d \perp c$. Поэтому $d \cdot c = 0$, т. е. $abc = 0$.

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, $c = c_x i + c_y j + c_z k$.

Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \quad (8.1) \end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (8.1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов a, b и c основано на следующих соображениях. Если $abc > 0$, то a, b, c — правая тройка; если $abc < 0$, то a, b, c — левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы a, b и c **компланарны** тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю

$(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0})$:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c вычисляется как $V = |abc|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = 1/6 \cdot |abc|$.

Пример. Вершинами пирамиды служат точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 5; 2)$ и $D(3; 0; -2)$. Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы a, b и c :

$a = AB = (-1; -3; -2)$, $b = AC = (1; 3; -1)$, $c = AD = (2; -2; -5)$.

Находим, b и c :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} \equiv -1 \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = 1/6 \cdot 24 = 4$

Правила действий над векторами

Общий вид	Пример
$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$	$\vec{a} = (-3, 0, 2), \vec{b} = (4, -2, 5), \vec{c} = (2, 5, -3)$
Сумма двух векторов $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$	$\vec{a} + \vec{b} = (-3 + 4, 0 - 2, 2 + 5),$ $\vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 7)$
Разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$	$\vec{a} - \vec{b} = (-3 - 4, 0 + 2, 2 - 5),$ $\vec{a} - \vec{b} = (-7, 2, -3)$
Произведение вектора на число $p\vec{a} = (px_1, py_1, pz_1)$	$-\frac{1}{3}\vec{a} = \left(-\frac{1}{3} \cdot (-3), -\frac{1}{3} \cdot 0, -\frac{1}{3} \cdot 2\right),$ $-\frac{1}{3}\vec{a} = \left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)$
Скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 5,$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$
Векторное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 23\vec{j} + 6\vec{k}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (4; -23; 6)$
Смешанное произведение векторов $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $-3(-2)(-3) + 0 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 4 \cdot 0(-3) -$ $5 \cdot 5(-3) = -18 + 40 + 8 + 75 = 105$

$\vec{b} = x\vec{a}$ – необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание 2

Рассмотрите решение задач.

Задача 1. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, если $\vec{a} = (3; -2; 6), \vec{b} = (6; 3; -2)$

Решение. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 42\vec{j} + 21\vec{k}$$

$$S = \sqrt{(-14)^2 + 42^2 + 21^2} = 49 \text{ кв.ед.}$$

Задача 2. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (3; -3; 1), \vec{b} = (4; 0; -1), \vec{c} = (2; -1; -2)$

Решение. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}$

и $\vec{c}$:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$3(-2)0 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2(-3) = -25$$

$$V = |-25| = 25 \text{ куб.ед.}$$

Задача 3. Найти объем тетраэдра с вершинами $A(-1; 1; 1), B(2; -2; 1), C(3; 1; -1), D(1; 0; -2)$

Решение.

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипед}}$$

Найдем объем параллелепипеда, построенного на векторах. $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$. Координаты векторов:

$$\vec{AB} = (3; -3; 1), \vec{AC} = (4; 0; -1), \vec{AD} = (2; -1; -2) \quad (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -25$$

$$V_{\text{параллелепипед}} = 25 \text{ куб.ед.}$$

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \cdot 25 = 4 \frac{1}{6} \text{ куб.ед.}$$

Задача 4. Найти $\sin\langle a; b \rangle$ если $\vec{a} = (3; 0; -4), \vec{b} = (1; -2; 2)$

Решение.

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 10\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$S = \sqrt{64 + 100 + 36} = \sqrt{200} \text{ кв.ед.} = 10\sqrt{2} \text{ кв.ед.}$$

$$S_{\text{параллелограмма}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\langle a; b \rangle$$

$$\sin\langle a; b \rangle = \frac{S_{\text{парал}}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}; \quad \sin\langle a; b \rangle = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала
2. Выполнение практической работы.

6. Задания:

Задание 1.

Ответьте на контрольные вопросы.

1. Какие три ненулевых вектора называются компланарными?
2. Назовите координаты векторов: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}, \vec{c} = 5\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{d} = \vec{k}, \vec{e} = \vec{0}$.
3. Какие два вектора называются коллинеарными? Каково условие коллинеарности двух векторов?
4. Каково условие перпендикулярности двух векторов?
6. Как определяется сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
7. Как определяется произведение вектора на число?
8. Что такое скалярное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
9. Что такое векторное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
10. Какая тройка называется правой?
11. Чему равна площадь параллелограмма, построенного на двух векторах?
12. Что такое смешанное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
13. Как найти объем параллелепипеда, построенного на трех, некопланарных векторах?

Задание 2.

Выполните задания практической работы.

Вариант 1

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{k}$.
2. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; -3; 8), \vec{b} = (5; 3; -4)$
3. Даны три точки: $A(2, 1, -1), B(1, -4, 2), C(3, 1, 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC .
4. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2 - 1 - 3; 5), \vec{b} = (-3; 0; 1), \vec{n} = (2; -7; -2)$
5. Найти $\sin \angle(a; b)$, если $\vec{a} = (-3; 1; -4), \vec{b} = (1; 3; 2)$.
6. Задание. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$: $A_1(1, -1, 1), A_2(-2, 0, 3), A_3(2, 1, -1), A_4(2, -2, -4)$. Требуется найти: 1) длину ребра $A_1 A_2$; 2) площадь грани $A_1 A_2 A_3$. Сделайте чертёж

Вариант 2

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$.
2. Даны четыре точки: $A(0, -1, 2), B(-1, 1, 3), C(0, 1, 3), D(-4, 3, 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.
3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, если $\vec{a} = (3; -2; -6), \vec{b} = (2; 3; -1)$
4. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (3; -3; 5), \vec{b} = (4; 1; -1), \vec{n} = (1; -1; -3)$
5. Найти $\sin \angle(a; b)$, если $\vec{a} = (0; 0; 4), \vec{b} = (1; 6; 2)$.
6. Задание. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$: $A_1(-1, 2, 4), A_2(-1, -2, -4), A_3(3, 0, -1), A_4(7, -3, 1)$. Требуется найти: 1) длину ребра $A_1 A_2$; 2) площадь грани $A_1 A_2 A_3$. Сделайте чертёж.

Вариант 3

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 4\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j}$.
2. Даны четыре точки: $A(0, -3, 2), B(-7, 1, 2), C(0, 5, 3), D(-1, 3, 2)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.
3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, если $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (2; 3; -1)$
4. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2; -3; 2), \vec{b} = (5; 6; -1), \vec{n} = (1; -1; -2)$
5. Найти $\sin \angle(a; b)$, если $\vec{a} = (-3; 0; 2), \vec{b} = (-1; -3; 2)$.
6. Задание. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$: $A_1(1, 2, 0), A_2(1, -1, 2), A_3(0, 1, -1), A_4(-3, 0, 1)$. Требуется найти: 1) длину ребра $A_1 A_2$; 2) площадь грани $A_1 A_2 A_3$. Сделайте чертёж.

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Какие три ненулевых вектора называются компланарными?
2. Назовите координаты векторов: $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}, \vec{c} = 5\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{d} = \vec{k}, \vec{e} = \vec{0}$.

3. Какие два вектора называются коллинеарными? Каково условие коллинеарности двух векторов?
4. Каково условие перпендикулярности двух векторов?
6. Как определяется сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
7. Как определяется произведение вектора на число?
8. Что такое скалярное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
9. Что такое векторное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
10. Какая тройка называется правой?
11. Чему равна площадь параллелограмма, построенного на двух векторах?
12. Что такое смешанное произведение двух векторов? Перечислите его основные свойства.
13. Как найти объем параллелепипеда, построенного на трех, некомпланарных векторах?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>
2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>
4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>
5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 2.2. Уравнение прямой на плоскости

Практическая работа № 5 (2 часа)

Составление уравнений прямых

1. Цель работы: Повторение вида уравнений прямых, формулы уравнений. Решение задач на составление уравнений прямых по заданным начальным условиям, нахождение угла между двумя прямыми.

Студент должен

знать:

- некоторые виды уравнения прямой;
- условия параллельности и перпендикулярности прямых;

уметь:

- составлять уравнение прямой по заданным начальным условиям;
- находить координаты точки пересечения двух прямых, определять параллельность прямых.

- находить угол между двумя прямыми.

2. Необходимое оборудование и материалы:

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

2. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий изложены в лекции «Уравнение прямой на плоскости и в пространстве»

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

Прямая в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \text{при } x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2.$$

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельной направляющему вектору прямой (a, b, c) :

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно данному вектору $\vec{a} = (m; n; p)$:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

Пусть (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) – направляющие векторы двух прямых, тогда имеем **условие параллельности прямых:**

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

условие перпендикулярности прямых:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$

угол α между прямыми:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

угол α между прямой и плоскостью:

$$\cos \alpha = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уравнения плоскости

Условие	Уравнение плоскости
$M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a} = (x_1; y_1; z_1),$ $\vec{p} = (x_2; y_2; z_2), \vec{a}, \ell \parallel$ $\vec{p} \perp \ell$	$(M_0 M \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$ $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$

	- уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 , параллельно двум данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки M_1, M_2, M_3
$M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{n} = (A, B, C), \vec{n} \perp \ell$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 , перпендикулярно данному вектору $\vec{n}$

Уравнения прямой в пространстве

$M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{a} = (m; n; p),$	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 , параллельно данному вектору $\vec{a}$
$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки M_1 и M_2

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала.
3. Разбор решений задач.
2. Выполнение упражнений по вариантам.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал.
2. Разберите следующие примеры:

Пример 1. Найти каноническое уравнение прямой, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату $x = 0$, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \text{т.е. } A(0, 2, 1).$$

Направляющий

вектор

прямой:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Тогда каноническое уравнение прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y - 2}{17} = \frac{z - 1}{13}.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Решение.

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем $z = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0;$$

$$x = -1; y = 3;$$

Получаем: $A(-1; 3; 0)$.

Направляющий вектор прямой:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\text{Итого:} \quad \frac{x+1}{-35} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z}{-7}; \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1};$$

3. Выполните задания.

Выполните задания по вариантам:

Вариант 1	Вариант 2
1. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 , параллельно данному вектору $\vec{a}$:	
а) $M_0(-1;3;3)$, $\vec{a} = (-4,2,1)$,	а) $M_0(3;7;1)$, $\vec{a} = (0,2;-3)$,
б) $M_0(-2;0;-1)$, $\vec{a} = (1,0,-5)$,	б) $M_0(6;-5;3)$, $\vec{a} = (1,0;-2)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 , перпендикулярно данному вектору $\vec{n}$	
а) $M_0(-1;-5;5)$, $\vec{n} = (-3,2;1)$,	а) $M_0(-2;-8;0)$, $\vec{n} = (8,1;-3)$,
б) $M_0(3;-2;2)$, $\vec{n} = (1,-3;5)$,	б) $M_0(4;3;-5)$, $\vec{n} = (1,-2;5)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки M_1 и M_2	
а) $M_1(2;2;5)$, $M_2(6;-1;-3)$,	в) $M_1(-4;5;0)$, $M_2(-7;-2;15)$
б) $M_1(-4;0;-8)$, $M_2(5;6;-1)$	г) $M_1(7;-4;2)$, $M_2(-2;1;0)$

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Сколькой видов уравнений вы знаете?

2. Перечислите виды уравнений.

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и

доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 3. Линейное программирование

Тема 3.3. Решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом

Практическая работа № 6 (2 часа)

Тема: Решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом.

1. Цель работы: научиться решать системы линейных неравенств графическим способом, находить координаты вершин области решений систем линейных неравенств с двумя переменными.

Студент должен:

знать:

- уравнение прямой на плоскости;
- алгоритм решения систем линейных неравенств с двумя переменными.

уметь:

- решать системы линейных неравенств с двумя переменными;
- находить координаты вершин области решений систем линейных неравенств с двумя переменными.

2. Необходимое оборудование и материалы:

Дадаев А.А. Математика: Учебник. — 2-е издание. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 — 552 с. — (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

- уравнение прямой на плоскости;
- область решений системы неравенств;
- алгоритм решения систем линейных неравенств с двумя переменными;
- понятие линейного программирования;
- понятие ограничений данной задачи;
- понятие допустимое решение задачи;
- понятие оптимального решения задачи линейного программирования.

Линейное программирование — это раздел математики, изучающий методы нахождения минимального (или максимального) значения линейной функции нескольких переменных, удовлетворяющих конечному числу линейных уравнений или неравенств.

Уравнения и неравенства называют *ограничениями* данной задачи, а любое решение этих уравнений (или неравенств), т. е. решение системы уравнений (или системы неравенств), — *допустимым*. Допустимое решение, удовлетворяющее поставленной задаче линейного программирования, т. е. дающее экстремум линейной функции, называется *оптимальным*.

Практические задачи линейного программирования, как правило, содержат большое число переменных и ограничений, и решение таких задач обычным способом — работа весьма трудная. Поэтому при их решении широко используются электронно-вычислительные машины.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала Дадаян А.А. Математика, стр.108 §4.9.

2. Разбор примеров.

2. Выполнение упражнений.

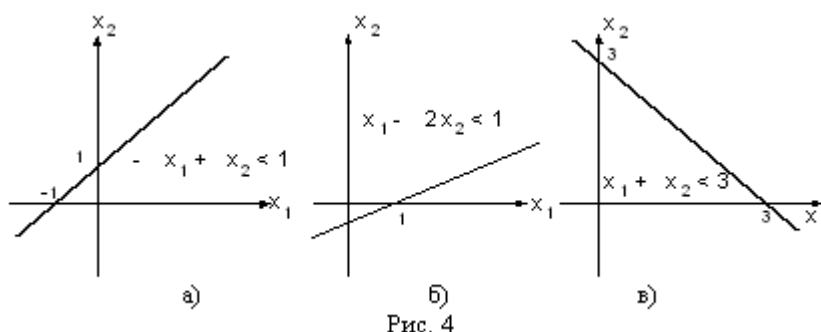
6. Задания:

1. Повторите теоретический материал стр.108 §4.9 Дадаян А.А. Математика.

2. Рассмотрите задачи.

Задача 1. Найти область, определяемую ограничениями

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad 1)$$



Решение:

1. Рассмотрим прямую $-x_1 + x_2 = 1$. При $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а при $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

Таким образом, эта прямая проходит через точки $(0,1)$ и $(-1,0)$. Беря $x_1 = x_2 = 0$, получим, что $-0+0 < 1$ и поэтому интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 4.а.

2. Рассмотрим прямую $x_1 - 2x_2 = 1$. При $x_1 = 0$, $x_2 = -1/2$, а при $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Таким образом, эта прямая проходит через точки $(0, -1/2)$ и $(1,0)$, так как $0 - 2 \cdot 0 < 1$ и поэтому интересующая нас полуплоскость лежит выше прямой, изображенной на рис. 4.б.

3. Наконец, рассмотрим прямую $x_1 + x_2 = 3$.

Она проходит через точки $(0,3)$ и $(3,0)$ и так как $0+0 < 3$, то интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 4.в.

Сводя все вместе и добавляя условия $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, получим рисунок 5, где выделена область, в которой выполняются одновременно все ограничения (1). Обратите внимание на то, что получившаяся область имеет вид выпуклого многоугольника.

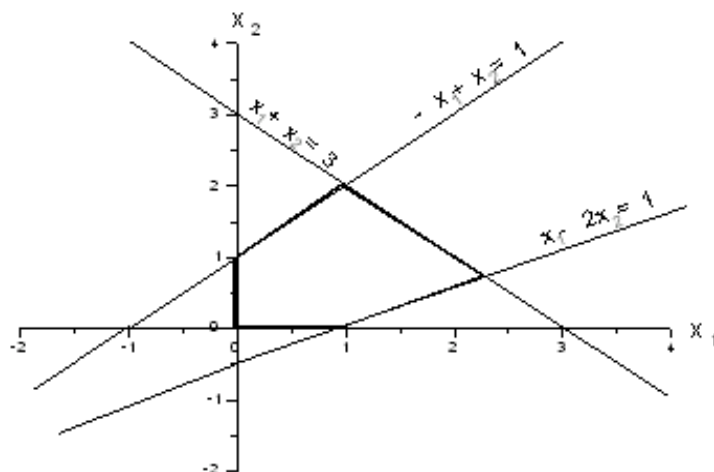


Рис. 5

Задача 2. Найти максимальное значение целевой функции $f(x) = x_1 + 2x_2$

$$x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2)

Решение.

Допустимую область мы уже строили □ она изображена на рис. 5.

Повторим еще раз этот рисунок, оставив только допустимую область и нарисовав дополнительно прямые $x_1 + 2x_2 = L$ (см. рис. 6).

Пусть, например, $L=2$. Тогда прямая $x_1 + 2x_2 = 2$ проходит через точки $(2,0)$ и $(0,1)$ и изображена на рис.6. Будем теперь увеличивать L . Тогда прямая начнет двигаться параллельно самой себе в направлении, указанном стрелкой.

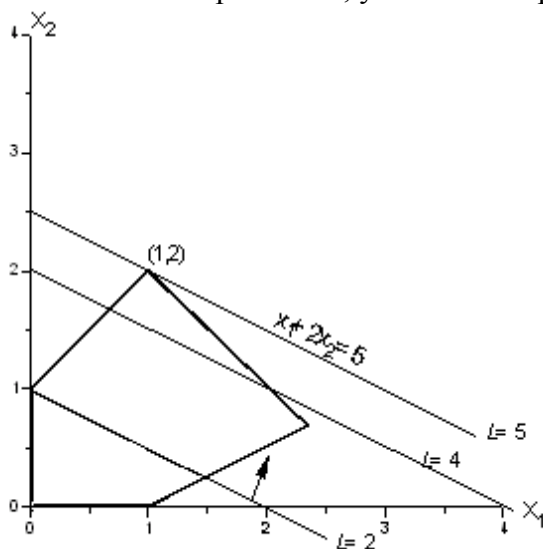


Рис.10

Рис. 6

Легко догадаться, что максимальное значение L получится тогда, когда прямая пройдет через вершину многоугольника, указанную на рисунке, и дальнейшее увеличение L приведет к тому, что прямая выйдет за пределы многоугольника и её пересечение с допустимой областью будет пустым.

Выделенная вершина лежит на пересечении прямых

$$-x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

и поэтому имеет координаты $x_1 = 1, x_2 = 2$. Это и есть решение нашей задачи, т.е. $x_1 = 1, x_2 = 2$ есть оптимальный план задачи (2).

При этом значение целевой функции $L = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, что и дает её максимальное значение.

Оптимальный план, как правило, соответствует какой-то вершине многоугольника, изображающего допустимую область. И лишь в том случае, когда прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ совпадет со стороной многоугольной области, решение не будет единственным. Но и в этом случае вершины, соответствующие границам этой стороны, дают оптимальные планы нашей задачи линейного программирования.

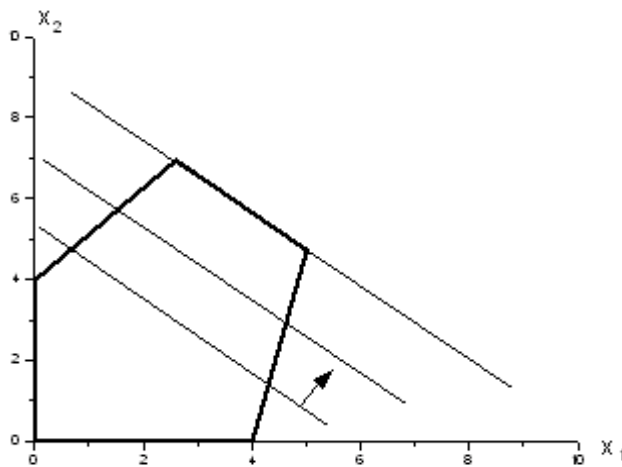


Рис. 11

Рис. 7

Пример 3. Пусть на некотором предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность — 100 изделий первого типа или 300 изделий второго. ОТК в состоянии проверить не более 150 изделий любого типа. Изделие первого типа вдвое дороже, чем изделие второго типа. Найти такой план выпуска продукции, который обеспечивал бы предприятию наибольшую прибыль.

Решение. Пусть количество изделий первого типа, которое должно выпустить предприятие, будет x , а количество изделий второго типа — y . Так как вместо одного изделия первого типа предприятие может выпустить три изделия второго, а всего в переводе на изделия второго типа — 300, то можно составить неравенство: $3x + y \leq 300$.

Но ОТК в состоянии проверить не более 150 изделий, поэтому $x + y \leq 150$.

Изделие первого типа дороже изделия второго в два раза, поэтому прибыль составит $2x + y$ в стоимости изделия второго типа.

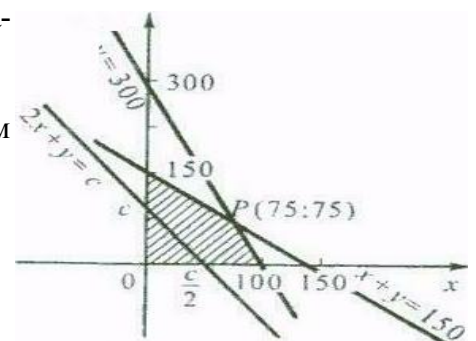
Таким образом, с математической точки зрения задача сводится к следующей. Дана система неравенств

где x и y неотрицательные целые числа.

Найти такое решение этой системы, при котором функция

$f = 2x + y$ примет наибольшее значение.

Строим область решений.



Очевидно, функция f примет наибольшее значение в том случае, когда прямая $2x+y=c$ будет проходить через точку

P пересечения прямых $3x+y=300$ и $x+y=150$.

Решая систему из этих уравнений, получим: $P(75; 75)$. Следовательно, предприятие получит наибольшую прибыль, если выпустит 75 изделий первого типа и 75 изделий второго.

Можно сформулировать следующие положения:

1. допустимая область $\square$ это выпуклый многоугольник;
2. оптимум достигается в вершине допустимой области (если допустимая область ограничена и не пуста);
3. ограниченность целевой функции в допустимой области является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи.

3. Выполните задания Дадаян А.А. Математика

стр 113 № 4.25 (1 столбик)

№ 4.26

№ 4.27

стр.115 №4.37, 4.39, 4.40, 4.41.

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется линейным?
2. Какое неравенство называется линейным?
3. Что называется решением линейного уравнения и линейного неравенства?
4. Какие уравнения, неравенства называются равносильными?
5. Как геометрически интерпретировать линейное уравнение с двумя переменными?
6. Что изучает линейное программирование?
7. Что понимается под ограничениями данной задачи?
8. Какое решение называется допустимым?
9. Что понимается под оптимальным решением задачи линейного программирования?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 4. Основы математического анализа
Тема 4.1. Теория пределов
Практическая работа № 7 (2 часа)
Вычисление пределов функций

1. Цель работы: научиться вычислять предел числовой последовательности и предел функции.

Студент должен:

знать:

- теоремы о пределах;
- первый замечательный предел;
- второй замечательный предел;
- алгоритм вычисления предела при неопределенности $\frac{0}{0}$;
- алгоритм вычисления предела при неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

уметь:

- вычислять предел числовой последовательности;
- уметь вычислять предел функции.

2. Необходимое оборудование и материалы: Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий изложены в лекции по теме «Предел и его свойства».

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

Предел функции (предельное значение функции) — одно из основных понятий математического и функционального анализа. **Предел** - это значение, к которому функция в определенном смысле приближается при приближении аргумента к определенной точке.

1. Ограниченность функции.

Функция $f(x)$ называется **ограниченной на данном отрезке** (a,b) , если существует некоторые числа m и M такие, что

$$m \leq f(x) \leq M \text{ при } x \in (a, b).$$

Число $m_0 = \inf\{f(x)\} = \max(m)$ при $x \in (a, b)$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\{f(x)\} = \min(M)$ при $x \in (a, b)$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b) . Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b) .

2. Предел функции в точке.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a . Запись

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \dots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два *замечательных предела*:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Свойства предела

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a , причем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,
то

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$,
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}$,
если $B \neq 0$ и если $g(x) \neq 0$ в δ -окрестности точки a .
3. $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- 5.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал см. лекцию «Предел и его свойства».
2. Выполните задания по вариантам:

1 вариант

Найдите пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 10}{x^2 + 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 21}$;
г) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$; д) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{2}} \frac{x + \sqrt[3]{2}}{x^3 + 2}$.

2 вариант

Найдите пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 5x^2 - 2x + 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x - 12}$; в) $\lim_{\sqrt{x} \rightarrow 2} \frac{2x - x\sqrt{x}}{4 - x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$.

3. Поменяться вариантами и решить задания.
4. Сравнить ответы.

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Что называется пределом функции в бесконечности?
2. Приведите пример предела функции в точке.
3. В чем состоит геометрический смысл предела функции в точке? В бесконечности?
4. Перечислите основные теоремы о пределах. Как они используются?
5. Как избавиться от неопределенности $\frac{0}{0}$?
6. Как избавиться от неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$?
7. Запишите первый замечательный предел.
8. Запишите второй замечательный предел.

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>
2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>
4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>
5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.2. Производная и дифференциал

Практическая работа № 8 (2 часа)

Вычисление производной сложной, обратной функции

1. Цель работы: обобщить, систематизировать знания о производной, правилах нахождения производной, научиться находить производные высших порядков функций.

Студент должен:

знать:

- определение производной;
- формулы и правила дифференцирования;
- производные элементарных функций.

уметь:

- находить производную сложной функции;
- находить производные высших порядков функции.

2. Необходимое оборудование и материалы:

Дадаян А.А. Математика: Учебник. — 2-е издание. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 — 552 с. — (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X . Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел *конечный*, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 ; при этом она оказывается обязательно и непрерывной в этой точке.

Если же рассматриваемый предел равен ∞ (или $-\infty$), то при условии, что функция в точке x_0 непрерывна, будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *бесконечную производную*.

Производная обозначается символами y' , $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием* функции. *Геометрический смысл производной* состоит в том, что производная есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в данной точке x_0 ; *физический смысл* - в том, что производная от пути по времени есть мгновенная скорость движущейся точки при прямолинейном движении $s = s(t)$ в момент t_0 .

Правила дифференцирования

Если c - постоянное число, и $u = u(x)$, $v = v(x)$ - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(c)' = 0$, $(cu)' = cu'$;

2) $(u+v)' = u' + v'$;

3) $(uv)' = u'v + v'u$;

4) $(u/v)' = (u'v - v'u)/v^2$;

5) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ - *сложная функция*, или *суперпозиция*, составленная из дифференцируемых функций φ и f , то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

6) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x =$

$g(y)$, причем $\frac{dy}{dx} = x'_y \neq 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Таблица производных

На основе определения производной и правил дифференцирования можно составить список табличных производных основных элементарных функций.

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ (α принадлежит R^1)

2. $(a^u)' = a^u \ln a u'$.

3. $(e^u)' = e^u u'$.

4. $(\log_a u)' = u'/(u \ln a)$.

5. $(\ln u)' = u'/u$.

6. $(\sin u)' = \cos u u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u u'$.

8. $(\operatorname{tg} u)' = 1/\cos^2 u u'$.

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -u' / \sin^2 u$.

10. $(\arcsin u)' = u' / \sqrt{1-u^2}$.

11. $(\arccos u)' = -u' / \sqrt{1-u^2}$.

12. $(\operatorname{arctg} u)' = u'/(1+u^2)$.

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -u'/(1+u^2)$.

14. $(u^v)' = u^v (vu'/u + v' \ln u)$, $u > 0$.

Например, если $y = x^{\sin x}$, то $y' = x^{\sin x} (\sin x/x + \cos x \ln x)$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , т.е. имеет в этой точке конечную

производную y' , то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$; отсюда $\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$.

Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx , называется *дифференциалом функции* и обозначается dy : $dy = y' \Delta x$. Если положить в этой формуле $y=x$, то по-

лучим $dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, поэтому $dy = y' dx$, т. е. символ для обозначения производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как дробь.

Приращение функции Δy есть приращение ординаты кривой, а дифференциал dy есть приращение ординаты касательной.

Производные высшего порядка

Пусть мы нашли для функции $y=f(x)$ ее производную $y' = f'(x)$. Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции $f(x)$, или *второй*

производной, и обозначается $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Аналогично определяются и обозначаются:

производная третьего порядка - $y''', f'''(x), \frac{d^3 y}{dx^3}$,

производная четвертого порядка - $y^{IV}, f^{IV}(x), \frac{d^4 y}{dx^4}$

и вообще производная n -го порядка - $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}$.

Пример 3.15. Вычислить производную функции $y=(3x^3-2x+1)\sin x$.

Решение. По правилу 3, $y'=(3x^3-2x+1)'\sin x + (3x^3-2x+1)(\sin x)' =$
 $= (9x^2-2)\sin x + (3x^3-2x+1)\cos x$.

Примеры вычисления производных

Пример 3.16. Найти y' , $y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$.

Решение. Используя правила дифференцирования суммы и частного, получим: $y'=(\operatorname{tg} x$

$$+ \frac{e^x}{1+x})' = (\operatorname{tg} x)' + (\frac{e^x}{1+x})' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x) - (1+x)'e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

Пример 3.17. Найти производную сложной функции $y=u^2 + 3\sqrt{u} - 1$, $u=x^4+1$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, получим: $y'_x = y'_u u'_x$

$$= (u^2 + 3\sqrt{u} - 1)'_u (x^4+1)'_x = (2u + \frac{3}{2\sqrt{u}}) \cdot 4x^3.$$

Так как $u=x^4+1$, то

$$y'_x = (2x^4 + 2 + \frac{3}{2\sqrt{x^4+1}}) \cdot 4x^3.$$

Пример 3.18. Найти производную функции $y=e^{x^2}$.

Решение. Представим функцию $y=e^{x^2}$ в виде суперпозиции двух функций: $y=e^u$ и $u=x^2$. Имеем: $y'_x = y'_u u'_x = (e^u)'_u (x^2)'_x = e^u \cdot 2x$. Подставляя x^2 вместо u , получим $y=2x e^{x^2}$.

Пример 3.19. Найти производную функции $y=\ln \sin x$.

Решение. Обозначим $u = \sin x$, тогда производная сложной функции $y = \ln u$ вычисляется

$$\text{по формуле } y' = (\ln u)'_u (\sin x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал стр.272 §9.2- §9.7 Дадаян А.А. Математика.
2. Выполните задания Дадаян А.А. Математика
стр 281 № 9.11 (1 столбик)
№ 9.12
№ 9.14
стр. 287 № 9.17, 9.22, 9.24, 9.26, 9.28, 9.30, 9.32.
стр. 288 № 9.35.

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Как обозначается производная?
2. Сформулируйте определение производной.
3. Назовите формулы и правила дифференцирования.
4. Что такое производная высшего порядка?
5. Сформулируйте геометрический и механический смысл производной.

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>
2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>
3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>
4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>
5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел. 4. Основы математического анализа

Тема 4.3. Исследование функций и построение графиков

Практическая работа № 9 (4 часа)

Исследование функции, построение графика функции

1. Цель работы: обобщить, систематизировать знания об исследовании функции, научиться использовать вторую производную при исследовании и построении графика функции.

Студент должен:

знать:

- план исследования функции и его составляющие;
- признак промежутков выпуклости и точек перегиба.

уметь:

- исследовать функцию по плану и строить график.

2. Необходимое оборудование и материалы:

Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Дадаян А.А. Математика, стр.289 §9.9- §9.14.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал стр.289 §9.9 - §9.14 Дадаян А.А. Математика.
2. Выполните задания Дадаян А.А. Математика стр. 302 № 9.61 (а, в, ж, и).

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется четной, нечетной?
2. Какая функция называется периодической?
3. Сформулируйте признак возрастания, убывания функции.
4. Сформулируйте признак экстремума функции.
5. Сформулируйте признак выпуклости функции.
6. Сформулируйте признак точки перегиба.

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт,

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.4. Неопределённый интеграл

Практическая работа № 10 (2 часа)

Вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования. Вычисление неопределённых интегралов методом подстановки и по частям

1. Цель работы: научиться вычислять неопределённые интегралы разными способами. Студент должен:

знать:

- понятие первообразной функции;
- понятие неопределённого интеграла;
- основные свойства неопределённого интеграла
- таблицу основных интегралов.

уметь:

- интегрировать функцию методом непосредственного интегрирования;
- интегрировать функцию методом подстановки;
- интегрировать функцию по частям.

2. Необходимое оборудование и материалы:

1. Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>
2. Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий: Дадаян А.А. Математика, стр.322 § 10.6 - 10.15.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала.
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал стр.322 § 10.6 - 10.15 Дадаян А.А. Математика.
2. Выполните задания по вариантам и поменяйтесь вариантами, сделайте самопровер-

ку:

Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

1 вариант

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx.$

2. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$

3. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx.$ Указание: в подынтегральной функции раскрыть скобки.

$$4. \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

$$5. \int \frac{x^4}{1+x^2} dx. \quad \text{Указание: в числителе произвести преобразование } x^4 = (x^2 + x^4) - (x^2 + 1) + 1.$$

1. Вычислить интегралы методом подстановки:

$$a) \int \sin(3x+5)dx; \text{ б) } \int \operatorname{tg} x dx; \text{ в) } \int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx.$$

2. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

$$г) \int x \operatorname{arctg} x dx; \text{ д) } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

2 вариант

Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

$$1. \int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$2. \int (2^x + 3^x) dx.$$

$$3. \int (\sin x + 5 \cos x) dx.$$

$$4. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

$$5. \int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

1. Вычислить интегралы методом подстановки:

$$a) \int e^{2x} dx; \text{ б) } \int e^{-x^2} x dx; \text{ в) } \int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx.$$

2. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

$$г) \int \arcsin x dx; \text{ д) } \int \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} dx.$$

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?

2. Дайте определение определенного интеграла.

3. Дайте определение криволинейной трапеции.

4. По какой формуле вычисляется объем тела?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и

доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.5. Определённый интеграл

Практическая работа № 11 (2 часа)

Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла

1. Цель работы: научиться вычислять площади и объёмы фигур с помощью определённого интеграла.

Студент должен:

знать:

- понятие криволинейной трапеции;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- таблицу основных интегралов.

уметь:

- интегрировать функцию;
- применять интеграл для нахождения площадей и объёмов фигур.

2. Необходимое оборудование и материалы:

1. Математический анализ [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М.: ФЛИНТА, 2015. – 361 с. – Режим доступа- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785976520677.html>

2. Дадаян А.А. Математика: Учебник. – 2-е издание. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М 2008 – 552 с. – (Серия «Профессиональное образование»).

3. Характер работы: частично-поисковый.

4. Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических заданий:

Дадаян А.А. Математика, стр.342 §10.15.

5. Порядок выполнения работы:

1. Повторение содержания теоретического материала.
2. Выполнение упражнений.

6. Задания:

1. Повторите теоретический материал стр.342 §10.15 Дадаян А.А. Математика.
2. Выполните задания Дадаян А.А. Математика стр. 347 № 10.75(а, б, в), № 10.77(а).

7. Требования к результатам работы: перечень заданий, решение, ответы.

8. Форма контроля: защита выполненной письменной работы.

9. Контрольные вопросы:

1. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?
2. Дайте определение определенного интеграла.
3. Дайте определение криволинейной трапеции.
4. По какой формуле вычисляется объем тела?

10. Список рекомендуемой литературы:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Информационное обеспечение обучения

Основные источники:

1. Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 472 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452694>

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 276 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456457>

3. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 2 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 241 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456458>

4. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 3 : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 417 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456459>

5. Математика. Практикум : учебное пособие для среднего профессионального образования / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 285 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/433902>

Дополнительные источники:

1. Вечтомов, Е. М. Математика: логика, теория множеств и комбинаторика : учебное пособие для среднего профессионального образования / Е. М. Вечтомов, Д. В. Широков. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 243 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/454951>

2. Далингер, В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/449055>

3. Красс, М. С. Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для среднего профессионального образования / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под редакцией М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 541 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/427072>

4. Красс, М. С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для среднего профессионального образования / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 471 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/427071>

5. Кучер, Т. П. Математика. Тесты : учебное пособие для среднего профессионального образования / Т. П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 541 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/452010>

6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 340 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/456672>

7. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Любецкий. —

3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 537 с. — (Профессиональное образование). Режим доступа: <http://www.biblio-online.ru/bcode/455968>

Периодические издания:

Учебно-методический журнал «Математика» издательский дом «Первое сентября».

Интернет-ресурсы:

1 <http://www.mathematica.ru>

2 <http://window.edu.ru>

Перечень методических указаний, разработанных преподавателем:

1. Методические рекомендации по практическим занятиям
2. Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной рабо-

ТЫ

Лист внесения изменений к методическим рекомендациям по практическим занятиям

№	Номер и дата распорядительного документа о внесении изменений	Дата внесения изменений	Ф.И.О. лица, ответственного за изменение	Подпись	Номер и дата распорядительного документа о принятии изменений