Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Старорусский политехнический колледж (филиал)

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ЕН.04 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Специальность 09.02.03Программирование в компьютерных системах

Квалификация техник - программист

Рассмотрены и утверждены
Методическим советом колледжа
(протокол № 2 от 21.09.2020 г)

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по практическим занятиям , являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине Численные методы в программировании составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах;
2 Рабочей программой учебной дисциплины;
3 Аннотацией основной профессиональной образовательной программы по специальности СПО 09.02.03 Программирование в компьютерных системах базовой подготовки;
4 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 20 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины в объёме 40 часов.

Перед практическим занятием следует изучить соответствующий теоретический материал и разобраться в решении примеров, приведенных в практикуме. Это позволит выполнить большее количество упражнений на практическом занятии, получить консультацию по вопросам и примерам, вызвавшим затруднение.

Основные теоретические положения включают определения, основные теоремы, формулы, знание которых необходимо для решения упражнений по данной теме. Это позволяет использовать методические рекомендации, не прибегая к учебникам. Затем на примерах, в процессе решения типовых задач, иллюстрируются методы их решения. Иногда даются несколько способов решения одной и той же задачи для сравнения эффективности методов.

Задания содержат упражнения разного уровня сложности на отработку понятий и методов решения задач. Количество упражнений значительно превышает необходимый минимум для усвоения материала, что позволяет использовать личностно-ориентированную технологию обучения и применять различные формы организации занятий: фронтальную, индивидуальную, групповую.

После практических занятий проводятся проверочные работы, представленные в методических рекомендациях по оценке качества подготовки обучающихся. Они позволяют выявить уровень усвоения пройденного материала.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен:

уметь:

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи;
- давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность полученного результата.

знать:

- методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений;
- методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ

Перечень формируемых компетенций:

Общие компетенции (ОК)

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Профессиональные компетенции (ПК)

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Тематический план и содержание учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект) *(если предусмотрены)*	Объем часов	Уровень освоения
1	**2**	**3**	**4**
Введение	Роль вычислительной математики в жизни. Цели и задачи изучения вычислительной математики. Краткая характеристика и содержание программы изучения дисциплины, её связь с другими дисциплинами специальности.	**2**	
Раздел 1 Введение в теорию погрешностей		**26**	
Тема 1.1 Приближенные числа и действия над ними	**Содержание учебного материала**	6	
	Приближенные числа и их источники. Абсолютная и относительная погрешности, их границы. Запись приближенных чисел. Верные, сомнительные и значащие цифры. Округление приближенных чисел. Способы представления чисел в вычислительных машинах.		2

	Действия над приближенными числами. Оценка точности вычислений.		
	Практические занятия Приближенные числа – нахождение абсолютной и относительной погрешности; – нахождение верных и значащих цифр; – округление приближенных чисел. Действия над приближенными числами – выполнение действий над приближенными числами; – оценка погрешности вычислений.	6	
	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала	14	
Раздел 2 Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений		**26**	
Тема 2.1 Отделение корней	**Содержание учебного материала**	2	
	Постановка задачи. Графический и аналитический способы отделения		2

алгебраических и трансцендентных уравнений	корней алгебраических и трансцендентных уравнения.		
Тема 2.2 Методы уточнения корней алгебраических и трансцендентных уравнения	**Содержание учебного материала**	12	
	Метод проб. Метод хорд. Метод касательных. Метод итераций. Комбинированный метод хорд и касательных. Сравнение методов.		2
	Практические занятия Уточнение корней – уточнение корней уравнения методом проб; – уточнение корней уравнения методом итерации. Уточнение корней – уточнение корней уравнения методом хорд. – уточнение корней уравнения методом касательных.	8	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала Комбинированный метод хорд и касательных. Конспект темы.	4	
Раздел 3 Решение систем линейных		**12**	

алгебраических уравнений			
Тема 3.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений	**Содержание учебного материала**	4	
	Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Уточнение решения. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Сравнение методов.		2
	Практические занятия Приближенные методы решения систем линейных уравнений – решение систем линейных уравнений методом простой итерации; – решение систем линейных уравнений методом Зейделя.	6	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала. Решение упражнений по теме	2	
Раздел 4 Аппроксимация функций		**28**	
Тема 4.1 Приближение функций	**Содержание учебного материала**	2	
	Задача и способы аппроксимации функций. Точечная аппроксимация.		

Тема 4.2 Интерполирование функций	**Содержание учебного материала**	6	
	Линейная и квадратичная интерполяции. Многочлен Лагранжа. Многочлен Ньютона. Интерполирование сплайнами. Экстраполирование. Сравнение методов интерполяции.		2
	Практические занятия Интерполирование – вычисление значений функций по интерполяционным многочленам. Сплайн интерполяция – построение интерполяционных сплайнов.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала. Решение упражнений по теме	4	
Тема 4.3 Подбор эмпирических формул	**Содержание учебного материала**	4	
	Характер опытных данных. Эмпирические формулы. Метод наименьших квадратов		2
	Практические занятия Эмпирические формулы – применение метода наименьших квадратов.	4	

	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала. Решение упражнений по теме	4	
Раздел 5 **Численное дифференцирование и интегрирование**		**16**	
Тема 5.1 **Численное дифференцирование**	**Содержание учебного материала**	2	
	Постановка задачи численного дифференцирования. Численное дифференцирование на основе интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона. Графическое дифференцирование.		2
	Практические занятия Численное дифференцирование – вычисление производных на основе интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала	2	
Тема 5.1	**Содержание учебного материала**	4	

Численное интегрирование	Задача приближенного вычисления определенных интегралов. Метод прямоугольников. Метод трапеций. Метод Симпсона. Сравнение методов интегрирования.		2
	Практические занятия Приближенные методы решения определенных интегралов – вычисление определенного интеграла методом прямоугольников. – вычисление определенного интеграла методом трапеций. – вычисление определенного интеграла методом Симпсона.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала	2	
Раздел 6 **Численное решение дифференциальных уравнений**		**11**	
Тема 6.1 **Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений**	**Содержание теоретического материала**	4	
	Понятие численного решения дифференциального уравнения. Метод Эйлера. Метод Рунге – Кутта. Сравнение методов.		2
	Практические занятия **Приближенные методы решения дифференциальных уравнений**	4	

	– решение дифференциальных уравнений методом Эйлера.		
	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала. Решение упражнений по теме	3	
Раздел 7 **Методы оптимизации**		**14**	
Тема 7.1 **Численное решение задач оптимизации**	**Содержание учебного материала**	6	
	Методы минимизации функций одной и двух переменных: методы дихотомии, золотого сечения. Многомерные методы оптимизации: методы покоординатного спуска, наискорейшего спуска. Сравнение методов.		2
	Практические занятия Задачи на экстремум – нахождение экстремумов функций одной переменной приближенными методами – нахождение экстремумов функций двух переменных приближенными методами.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся	4	

	Проработка теоретического и практического материала Метод параболической аппроксимации. Конспект темы.		
Всего:		**135**	

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

РАЗДЕЛ 1 ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Тема 1.1 Приближенные числа и действия над ними

Практическое занятие 1 Приближенные числа (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о приближенных числах, погрешностях вычислений, правиле округления чисел.
- формирование умений по нахождению абсолютной и относительной погрешности, верных и значащих цифр, округлению чисел.

Студент должен

Знать:

- определения абсолютной и относительной погрешности;
- правило округления чисел;
- верные и значащие цифры.

Уметь:

- вычислять погрешности числа;
- определять верные и значащие цифры в записи числа,
- округлять числа.

Краткие теоретические сведения

Пусть A - точное значение какой-либо величины, которое, как правило, неизвестно, и a - её приближенное значение, найденное каким-либо способом.

Абсолютной погрешностью Δ приближенного значения a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным значением A и его приближенным значением a, то есть $\Delta = |A - a|$.

Предельная абсолютная погрешность Δ_a является верхней оценкой абсолютной погрешности приближенного значения a, т.е. $|\Delta| \le \Delta_a$. В дальнейшем значение Δ_a принимается в качестве абсолютной погрешности приближенного значения a. В этом случае истинное значение a находится в интервале $(a - \Delta_a, a + \Delta_a)$.

Относительной погрешностью δ приближенного значения a величины A называется отношение абсолютной погрешности Δ этого значения к модулю соответствующего точного значения A ($A \ne 0$): $\delta = \dfrac{\Delta}{|A|}$, так как чаще всего A неизвестно, то $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

Значащей цифрой числа считается любая цифра в его десятичной записи, отличная от нуля и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного разряда.

Под верной цифрой числа, понимается его значащая цифра, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит данная значащая цифра.

Правила округления:

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями.

При этом:

1 если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2 если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;

3 если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;

4 если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Рекомендации по выполнению заданий

Прежде чем выполнять задания по теме, необходимо изучить теоретический материал, разобраться в решении примеров и задач, приведенных ниже. Решение упражнений приводить подробно, вычисления записывать в определенном порядке, доводя до конца, в тетради для практических работ.

Содержание заданий

1 Округляя точное значение числа до трех значащих цифр, определить абсолютную α и относительную δ погрешности полученного приближенного значения.

а) 0,1545 б) 625,55

2 Округлите число 9,47 до десятых, найдите погрешность и относительную погрешность округления (относительную погрешность вычислите с двумя значащими цифрами после запятой)

3 Определить абсолютную погрешность приближенного значения 132,67 по его относительной погрешности δ =0,1%.

4 При измерении длины с точностью до 5 м получено 17,52 км, а при определении другой длины с точность до 0,5 см, получено 2 м. Какое измерение по своему качеству лучше?

5 Определить количество верных знаков в числе 38,2543, если известна его предельная абсолютная погрешность $\Delta a=0{,}27\ 10^{-2}$.

6 Округлите до первого справа верного знака приближенные значения данных чисел

а) 0,3281±0,05 б) 2, 0637±0,0025

7 Определить количество верных знаков в числе 1,8921, если известна его предельная относительная погрешность $\delta_a=0{,}1\ 10^{-2}$.

8 Приближенное значение числа принадлежит промежутку [-2,5; 8,5]. Запишите число в виде равенства x=a±Δa.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 2, 3 Действия над приближенными числами (4ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о правилах выполнения действий над приближенными числами, оценки точности вычислений.
- формирование умений по выполнения действий над приближенными числами с учетом погрешности

Студент должен

Знать:

- правила действий над числами с учетом погрешности вычислений;

Уметь:

- выполнять действия с учетом погрешности вычислений

– выполнять оценку погрешностей.

Краткие теоретические сведения

1 Правила действий с приближенными числами

1) **Сложение**

При сложении чисел различной абсолютной точности обычно поступают следующим образом:

1 выделяют число (или числа) наименьшей абсолютной точности (т.е. число, имеющее наибольшую абсолютную погрешность);
2 наиболее точные числа округлить т.о., чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в выделенном числе (т.е. оставить один запасной знак);
3 произвести сложение, учитывая все сохраненные знаки;
4 полученный результат округлить на один знак.

Если в вычислениях точность задана заранее, то вычисления ведут с запасным знаком, который в результате округляют.

2) **Вычитание** (аналогично)

3) **Умножение и деление**

При умножении и делении приближённых чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с меньшим количеством значащих цифр.

4) **Возведение в степень**

При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

5) **Извлечение корня**

При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.

6) **Промежуточные вычисления**

При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.

2 Оценка погрешности вычислений

Формулы для вычисления погрешностей арифметических действий представлены в таблице

x#y	**Δ(x#y)**	**δ(x#y)**
x+y	Δx+Δy	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta x+\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta y$
x-y	Δx+Δy	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta x+\frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta y$
xy	$\lvert x\rvert\Delta y+\lvert y\rvert\Delta x$	$\delta x+\delta y$
x/y	$\frac{\lvert x\rvert\Delta y+\lvert y\rvert\Delta x}{y^2}$	$\delta x+\delta y$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1. Сложить приближённые числа: 14,5 + 113,76 +12,783 +11,2161.

Решение. Округляем все числа по наименее точному числу (14,5), оставляя запасной знак, и производим сложение:

14,5 + 113,76 + 12,78 + 11,22 = 152,26.

Запасной знак округляем и получаем ответ: 152, 3.

Пример 2. Найти сумму 318,7864 + 211,1246 + 76,1613 + 106,1914 с точностью до 0,01.

Решение. Округляем все числа, оставляя запасной знак:

318,786 + 211,125 + 76,161 + 106,191 = 712,263 ≈ 712,26.

Пример 3 Найти разность 2529,37-2,1462

Решение. Округляем числа, оставляя запасной знак:

2529,37-2,1462≈2529,37-2,146=2527,22

Пример 4. Найти произведение двух приближённых чисел: $0{,}3862 \cdot 0{,}85$.

Решение. Округляем первое число, оставляя один запасной знак, так как второе число содержит две значащие цифры. Таким образом,

$$0{,}3862 \cdot 0{,}85 = 0{,}386 \cdot 0{,}85 = 0{,}3281 \approx 0{,}33.$$

Пример 5. Вычислить $2{,}667/3{,}143$

Решение. $2{,}667/3{,}143=0{,}848552\ldots\approx0{,}8486$

Пример 6. Вычислить $654{,}8/2{,}6$

Решение. $654{,}8/2{,}6=251{,}8\approx2{,}5*10^2$

Пример 7. Вычислить $x = \frac{2{,}48 \cdot 0{,}3665}{5{,}643}$.

Решение. Наименьшее количество значащих цифр, равное 3, содержит число 2,48; поэтому остальные числа округляем до трёх значащих цифр (0,367 и 5,64) . Следовательно,

$$x = \frac{2{,}48 \cdot 0{,}367}{5{,}64} = 0{,}16137 \approx 0{,}161.$$

Пример 8. Вычислить $3{,}27^3$.

Решение. Находим $3{,}27 \cdot 3{,}27 \cdot 3{,}27 = 34{,}965 \approx 35{,}0$. В результате оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит основание степени.

Пример 9. Вычислить $14{,}81^2$.

Решение. $14{,}81^2 \approx 219{,}3$

Пример 10 Вычислить $x = \sqrt{3{,}27}$.

Решение. Извлекая квадратный корень из числа 3,27, получим $\sqrt{3{,}27} = 1{,}81$. Здесь оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит подкоренное выражение.

Пример 11. Вычислить $x = \frac{\sqrt{3{,}27} \cdot 0{,}4456}{3{,}284}$.

Решение. Извлекая квадратный корень из числа 3,27, получим $\sqrt{3{,}27} = 1{,}81$. Здесь оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит подкоренное выражение. Округляем остальные числа до трёх значащих цифр. В результате находим

$$x = \frac{1{,}81 \cdot 0{,}446}{3{,}284} \approx 0{,}246.$$

Пример 12 Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее предельную абсолютную и относительную погрешности u= 0.259 + 45.12+ 1.0012.

*Решение***.** Предельные абсолютные погрешности слагаемых здесь равны соответственно 0.001; 0.01; 0.0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом:

1 выделим наименее точные слагаемые (в нашем примере это второе слагаемое) и оставим их без изменения;

2 остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

3 сложим данные числа, учитывая все сохраненные знаки;

4 полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых.

Имеем

$\Delta_u = 0.001 + 0.01 + 0.0001 = 0.0111;$

u = 0.259 + 45.12 + 1.0012 = 0.26 + 45.12 + 1.00 = 46.38 ± 0.01.

Пример 13 x = 62,425, y = 62,409. Найти разность и погрешность разности.

Решение: Имеем x-y = 62,425-62,409 = 0,016.

Граница абсолютной погрешности разности:

$\Delta(x-y) = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001 \langle 0{,}\underline{01}$, поэтому в числе $0{,}\underline{01}6$ только 2 верные цифры (следовательно, можно было округлить до сотых). Сравним погрешности результата и исходных данных:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}0005}{62{,}425} = 0{,}000008, \qquad \delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{0{,}0005}{62{,}409} = 0{,}000008,$$

$$\delta(x-y) = \frac{\Delta(x-y)}{x-y} = \frac{0{,}001}{0{,}016} = 0{,}07.$$

Таким образом, в данном случае относительная погрешность разности оказалась почти в 8000 раз больше относительной погрешности исходных данных.

Пример 14 x=43,1, y=5,72. Найти частное и погрешность результата.

Решение: Найдем частное $q = \left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{43{,}1}{5{,}72} = 7{,}534965$

Найдём число верных цифр результата, для этого вычислим

$\Delta q = \dfrac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2} = \dfrac{43{,}1 \cdot 0{,}05 + 5{,}72 \cdot 0{,}005}{5{,}72^2} = 0{,}0667 \langle 0{,}\underline{1} \Rightarrow$ частное имеет одну верную цифру. Округляя полученный результат с одной запасной цифрой, получим $q = \left(\dfrac{x}{y}\right) = 7{,}5$.

Пример 15 сложить несколько приближенных чисел

a=0,1732+17,45+0,000333+204,4+7,25+144,2+0,0112+0,634+0,0771

В каждом из приведенных чисел верны все значащие цифры (в широком смысле)

Решение:

1) числа с наименьшей точностью: 204,4 и 144,2 - верны с точностью до 0,1.

2) остальные числа округляем,

0,1732≈0,17

17,45≈17,45

000333≈0,00

7,25≈7,25

0,0112≈0,01

0,0771≈0,08

3) складываем полученные числа с точностью до 0,01

4)374,19≈374,2

		0,	1	7
	1	7,	4	5
		0,	0	0
2	0	4,	4	
		7,	2	5
1	4	4,	2	
		0,	0	1
		0,	6	3
		0,	0	8
3	7	4,	1	9

Оценим точность результата

Абсолютная погрешность = исходная погрешность + погрешность округления

1) сумма предельных погрешностей исходных данных

Δ_1=0,0001+0,01+0,000001+0,1+0,001+0,0001+0,001+0,0001=0,2213<0,222

0,05-2+0,005-7=0,135≈0,14 (цифры 2 и 7 - количество складываемых чисел)

2) погрешность округления равна 0,01

3) абсолютная величина суммы ошибок округления слагаемых

Δ_2=|0,0032+0,000333+0,0012+0,004-0,0029|=0,0058332 заключительной погрешности округления

Δa= 0,222+0,006+0,001=0,238<0,3<0,006

Ответ: a=374,2±0,3

Так, как абсолютная погрешность суммы вычисляется по формуле $\Delta a=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+...+\Delta x_n$, а относительная $\delta_a=\Delta a\text{-}|a|$, то

$\delta_{\min}\le\delta_a\le\delta_{\max}$

Предельная относительная погрешность суммы слагаемых одного знака заключена между наименьшей и наибольшей предельными относительными погрешностями слагаемых.

Пример 16 Оценить относительную погрешность суммы чисел в примере 15 и сравнить её с относительными погрешностями слагаемых.

$$\delta_a = \frac{0,2}{374,2} = 0,0006 = 0,06\%$$

Относительные погрешности слагаемых:

$$\delta_{a1} = \frac{0,05}{0,17} \approx 0,03 = 3\% \qquad \delta_{a6} = \frac{0,05}{144,2} \approx 0,0003 = 0,03\%$$

$$\delta_{a2} = \frac{0,05}{17,45} \approx 0,0003 = 0,03\% \qquad \delta_{a7} = \frac{0,05}{0,1} = 0,05 = 50\%$$

$$\delta_{a4} = \frac{0,05}{204,4} \approx 0,0003 = 0,03\% \qquad \delta_{a8} = \frac{0,05}{0,63} \approx 0,008 = 0,8\%$$

$$\delta_{a5} = \frac{0,05}{7,25} \approx 0,0007 = 0,07\% \qquad \delta_{a9} = \frac{0,05}{0,08} \approx 0,07 = 7\%$$

Следовательно, $\delta_{min} = 0{,}03\%$, $\delta_{max} = 50\%$, $\delta_a = 0{,}06\%$, тогда относительная погрешность суммы заключена между наименьшей и наибольшей относительными погрешностями слагаемых.

Пример 17. Найти произведение приближенных чисел x_1=12,4 и x_2=65,54 и число верных знаков, если все написанные цифры сомножителей верны в узком смысле.

Решение: так, как данные цифры имеют разное количество цифр после запятой, то эти цифры оставляем без изменения.

Находим произведение этих чисел: a=12,4×65,54=812,696; сохранить нужно три значащих цифры (по правилу), следовательно, получаем, a=813.

Подсчитаем погрешность:

$$\delta_{ab=}\delta_{x1}+\delta_{x2}=\frac{0{,}05}{12{,}4}+\frac{0{,}005}{65{,}54} = 0{,}0040322 + 0{,}0000762= 0{,}0041094 \approx 0{,}0041$$

Тогда $\Delta a = |a|\text{-}\delta_a$=0,0041-813≈3

Ответ: a=813±3

Пример 18 Вычислить частное $a=\frac{x}{y}$ приближенных чисел x=5,735 и y=1,23, все цифры верны в узком смысле. Определить относительную и абсолютную погрешности.

a=5,73 5:1,23≈4,66 (оставим 3 значащих цифры, т.к. наименьшее число верных значащих цифр равно 3.

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b = \frac{0{,}0005}{5{,}735}+\frac{0{,}005}{1{,}23} = 0{,}00009+0{,}0041\approx 0{,}0042\approx 0{,}4\%$$

$\Delta a=\delta_a \times a$=4,66×0,0042=0,02

Ответ: a=4,66±0,02

Если ответ записать с верными значащими цифрами, то необходимо произвести округлении, т.к. 0,02>0,005, тогда a=4,66≈4,7

$\Delta a=\Delta a+\Delta_{окр}$=0,02+0,04=0,06. Тогда a=4,7±0,06

Содержание заданий

Произвести действия с приближёнными числами:

1 645,27 + 102,324 + 715,645 + 10,2.

2 428,263 + 107,316 +264,2 + 748,35.

3 428,56 – 170.

4 745,428 – 112,34863.

5 283,425 + 15627,321 + 17216,35.

6 563 + 14879 +74596 + 23702.

Произвести вычисления:

7 $x = \frac{(0{,}17+0{,}2445)\cdot 0{,}56}{1{,}424}$.

8 $x = \frac{0{,}26\sqrt{32{,}3}}{16{,}64}$.

9 $x = \frac{\sqrt{29{,}56}(37{,}2-17{,}4)}{13{,}2}$.

10 $2{,}31^3$.

Найти результат, определить абсолютную и относительную погрешности результата

1. $u = a + b - 2c$; $a = 0{,}98861$; $b = 3{,}012$; $c = 2{,}281$.
2. $u = a - 3b + 2c$; $a = 1{,}21$; $b = 0{,}92$; $c = 5{,}10$.
3. $u = a\sqrt{b}$; $a = 2{,}364$; $b = 1{,}28$.
4. $u = \frac{\sqrt{a}}{b}$; $a = 4{,}0223$; $b = 0{,}982$.
5. $u = a + b\sqrt{c}$; $a = 2{,}875$; $b = 7{,}022$; $c = 2{,}9277$.
6. $u = \frac{a}{b+c}$; $a = 0{,}11$; $b = 0{,}90$; $c = 1{,}12$.
7. $u = \frac{a}{b+ac}$; $a = 4{,}271$; $b = 4{,}821$; $c = 0{,}827$.
8. $u = \frac{c}{a^3+b}$; $a = 1{,}322$; $b = 0{,}48$; $c = 7{,}18$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 2 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 2.2 Методы уточнения корней алгебраических и трансцендентных уравнения

Практическое занятие 4 Уточнение корней (2ч.)

Цель:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод проб).

Студент должен

Знать:

- методы отделения корней;
- метод проб.

Уметь:

- отделять корни алгебраических и трансцендентных уравнений;
- решать алгебраические и трансцендентные уравнения методом проб.

Краткие теоретические сведения

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

называется такое значение $x = x_0$ при котором уравнение (1) превращается в тождество:

$$f(x_0) = 0$$

Корень уравнения геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции $y = f(x)$ и оси OX (рис.1).

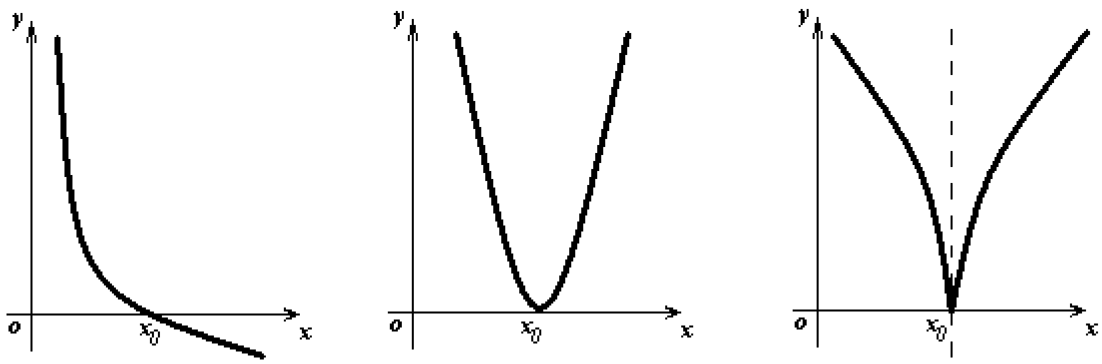


Рисунок 1

Отделить корень уравнения – значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

1 Графический метод отделения корней

Отделение корней уравнения (1) можно выполнить графически, построив график функции $y = f(x)$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находится точка пересечения его с осью OX. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение $f(x)=0$ в виде:

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (2)$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ строились по возможности проще. Корень уравнения (2) представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Таким способом можно найти, например, корни уравнения $x^3 + px + q = 0$; это будут точки пересечения кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = -px - q$.

2 Метод исследования отрезков

Теорема 1. Если на отрезке [a ; b] функция $y = f(x)$ непрерывна, $f'(x)$ сохраняет свой знак (является монотонной), а значения $f(x)$ на концах этого отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется один и только один корень уравнения.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Отделить корни уравнения $x^3 + x - 4 = 0$.

Решение.

I способ (графический метод):

Рассмотрим уравнение $x^3 + x - 4 = 0$. Придадим заданному уравнению вид $x^3 = -x + 4$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 4$. Эти графики пересекаются в точке, которая принадлежит интервалу (1; 2) (рис 1.2).

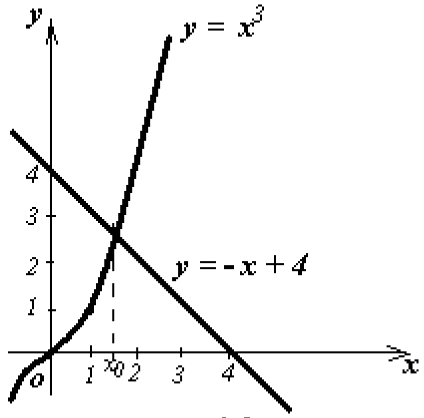


рис 1.2

II способ (исследование отрезков):

В данном случае $f(x) = x^3 + x - 4$, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Так как $f'(x) > 0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток на котором он находится. Методом проб находим отрезок [a ; b], для которого $f(a)\,f(b) < 0$. Для этого вычислим значения функции при некоторых значениях аргумента: $f(0) = -4 < 0$, $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 6 > 0$. Поскольку $f(0)\,f(1) > 0$, то на отрезке [0 ; 1] корней нет; так как $f(1)\,f(2) < 0$, то корень уравнения находится на отрезке [1 ; 2].

Содержание заданий

Отделить корни уравнения графически и методом исследования отрезков.

1 $x^3 - 12x + 1 = 0$. *(Ответ: (-4;-3), (0;1),(3;4))*

2 $x^3 + 2x - 7 = 0$. *(Ответ: (1;2))*

3 $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$. *(Ответ: (0;1), (2;3),(6;7))*

Решить проб с точностью до 0,01 следующие уравнения:

4 $x^4 + 3x - 20 = 0$. *(Ответ: 1,94)*

5 $x^3 - 2x - 5 = 0$. *(Ответ: 2,09)*

6 $x^4 - 3x + 1 = 0$. *(Ответ: 0,33; 1,30)*

7 $x^3 + 3x + 5 = 0$. *(Ответ: -1,15)*

8 $x^4 + 5x - 7 = 0$. *(Ответ: 1,11)*

9 $x^3 - 12x + 5 = 0$. *(Ответ: 0,42)*

10 $x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$. *(Ответ: 3,62)*

11 $2e^x - 2x + 3 = 0;$

12 $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0;$

13 $x\log_3(x+1) = 1;$

14 $\cos(x + 0{,}5) = x^3.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 5 Уточнение корней (2ч.)

Цель:

– закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
– закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод хорд).

Студент должен

Знать:

– методы отделения корней;
– метод хорд.

Уметь:

– решать алгебраические и трансцендентные уравнения методом хорд.

Краткие теоретические сведения

Метод хорд

Метод хорд приближенного решения уравнения (1) имеет следующую геометрическую иллюстрацию: вместо точки пересечения оси OX и графика функции $y = f(x)$, входящей в это уравнение, рассматривается точка пересечения данной оси и отрезка прямой, соединяющей концы дуги графика. Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения $f(x) = 0$, изолированный на отрезке [a ; b]. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$.

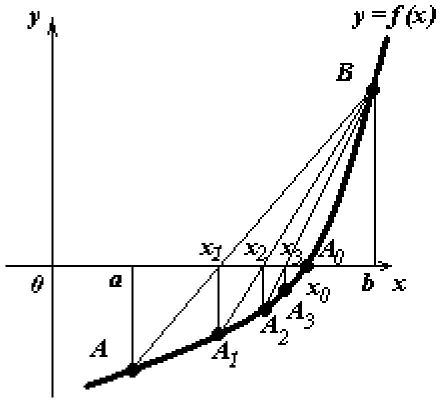


рис 1.3

Точки A $(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ соединим хордой. Найдем точку x_1:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \textbf{(3)}$$

Если $f(x_1) < 0$, то за новый, более узкий, интервал изоляции можно взять отрезок [x_1 ; b]. Соединив точки $A_1(x_1; f(x_1))$ и $B(b; f(b))$, получим в точке пересечения хорды с осью второе приближение x_2, которое вычислим по формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)} \qquad \textbf{(4)}$$

и т. д.

Последовательность чисел a, x_1, x_2 ....стремится к искомому корню x_0. Вычисления следует вести до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0,01

Решение. Положительный корень будет находиться в промежутке (1; 1,7), т.к. $f(1) = -5<0$, а $f(1,7) = 0,952 > 0$. Найдем первое приближенное значение корня по формуле (3):

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \text{ где } a = 1,\ b=1,7$$

Получим $x_1 = 1 - \dfrac{(1,7-1)f(1)}{f(1,7)-f(1)}$ =1,588

Так как $f(1,588) = -0,817 < 0$, то применяя вторично способ хорд к промежутку (1,588; 1,7) получим: $x_2 = 1,588 - \dfrac{(1,7-1,588)f(1,588)}{f(1,7)-f(1,588)}$ = 1,639; $f(1,639) = -0,051 < 0$.

Найдем третье приближенное значение на промежутке (1,639; 1,7)

получим: $x_3 = 1,639 - \dfrac{(1,7-1,639)f(1,639)}{f(1,7)-f(1,639)}$ = 1,642; $f(1,642) = -0,016 < 0$.

Найдем четвертое приближенное значение на отрезке (1,642; 1,7)

получим: $x_4 = 1,642 - \dfrac{(1,7-1,642)f(1,642)}{f(1,7)-f(1,642)}$ = 1,643; $f(1,643) = -0,004>0$.

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64

Содержание заданий

Решить хорд с точностью до 0,01 следующие уравнения:

1 $x^4 + 3x - 20 = 0$. *(Ответ: 1,94)*

2 $x^3 - 2x - 5 = 0$. *(Ответ: 2,09)*

3 $x^4 - 3x + 1 = 0$. *(Ответ: 0,33; 1,30)*

4 $x^3 + 3x + 5 = 0$. *(Ответ: -1,15)*

5 $x^4 + 5x - 7 = 0$. *(Ответ: 1,11)*

6 *x^3 - 12x + 5 = 0. (Ответ: 0,42)*

7 *x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0. (Ответ: 3,62)*

8 $3^x + 2 - x = 0;$

9 $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0;$

10 $(x-4)^2 \cdot \log_{0,5}(x-3) = -1;$

11 $5\sin x = x.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 6 Уточнение корней (2ч.)

Цель:

– закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
– закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод касательных).

Студент должен

*Знать***:**

– методы отделения корней;
– метод касательных.

Уметь:

– решать алгебраические и трансцендентные уравнения методом касательных.

Краткие теоретические сведения

Метод касательных (Ньютона)

Метод касательных отличается от метода хорд тем, что здесь рассматривается не секущая, соединяющая концы дуги графика, а касательная к графику. Точка пересечения касательной с осью OX дает приближенное значение корня.

Пусть действительный корень уравнения $f(x) = 0$ изолирован на отрезке [a ; b]. Выберем на отрезке [a ; b] такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак что и $f''(x_0)$, т.е. выполняется условие

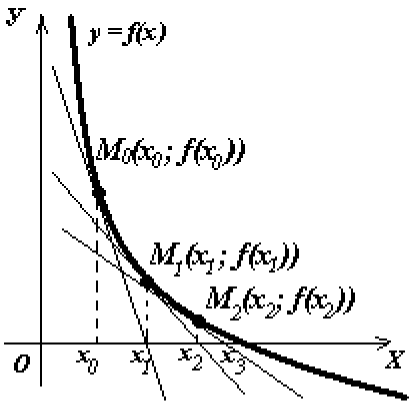


рис 1.4

$$f(x_0)f''(x_0)>0 \qquad \textbf{(5)}$$

Проведем в точке M_0 $(x_0;$ $f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX. Это приближенное значение корня найдется по формуле:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \textbf{(6)}$$

Применив этот метод вторично в точке M_1 $(x_1;$ $f(x_1))$, получим:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \textbf{(7)}$$

и т.д. Полученная таким образом последовательность x_0, x_1, x_2 .... имеет своим пределом искомый корень.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Методом касательных найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0,01

Решение. Здесь $f(x) = x^4 - 2x - 4$, $f'(x)=4x^3 - 2$, $f''(x)= 12x^2$. Так как $f(x)$ и $f''(x)$ при $x_0=1,7$ имеют один и тот же знак, а именно: $f(1,7) = 0,952 > 0$ и $f''(1,7)= 34,68> 0$, то применяя формулу $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ где $f'(1,7)=17,652$.

Тогда $x_1 = 1{,}7 - \dfrac{0{,}952}{17{,}652} = 1{,}646.$

Применяя второй раз способ касательных, получим: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, где $f(x_1) = f(1{,}646) = 0{,}048$, $f'(1{,}646) = 15{,}838$. $x_2 = 1{,}646 - \dfrac{0{,}048}{15{,}838} = 1{,}643.$

Аналогично получим третье приближение:

$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, $f(1{,}643) = 0{,}004$, $f'(1{,}643) = 15{,}740$, следовательно, $x_3 = 1{,}643 - \dfrac{0{,}004}{15{,}740} = 1{,}6427.$

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64

Содержание заданий

Решить методом касательных с точностью до 0,01 следующие уравнения:

1 $x^3 - 12x + 1 = 0.$

2 $x^3 + 2x - 7 = 0.$

3 $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0.$

4 $x^4 + 3x - 20 = 0.$ *(Ответ: 1,94)*

5 $x^3 - 2x - 5 = 0.$ *(Ответ: 2,09)*

6 $x^4 - 3x + 1 = 0.$ *(Ответ: 0,33; 1,30)*

7 $x^3 + 3x + 5 = 0.$ *(Ответ: -1,15)*

8 $x^4 + 5x - 7 = 0.$ *(Ответ: 1,11)*

9 $x^3 - 12x + 5 = 0.$ *(Ответ: 0,42)*

10 $x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0.$ *(Ответ: 3,62)*

11 $e^x + x + 1 = 0;$

12 $2x^4 - x^2 - 10 = 0;$

13 $0{,}5^x - 3 = (x+2)^2;$

14 $x^2 \cos 2x = -1.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 7 Уточнение корней (2ч.)

Цель:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод итерации).

Студент должен

*Знать***:**

- методы отделения корней;
- метод итерации

Уметь:

- решать алгебраические и трансцендентные уравнения методом итераций.

Краткие теоретические сведения

Метод итераций

Если каким - нибудь способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения, то уточнение приближения можно осуществить методом итераций (методом последовательных приближений).

Пусть задано уравнение $f(x) = 0$, представим его в виде $x = \varphi(x)$, где $|\varphi'(x)| \le r < 1$ всюду на отрезке [a ; b], содержащем единственный корень ξ. Исходя из некоторого начального значения $x_0 \in [a; b]$ можно построить последовательность: $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$ .... $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ...

Пределом последовательности x_1, x_2, x_3, ... x_n .... является единственный корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [a ; b].

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Способом итераций найти приближенное значение корня уравнения $2 - lgx - x = 0$ с точностью до 0.001

Решение. Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения.

Представим уравнение в виде:

$$lgx = -x + 2$$

Построим графики функций $y = lgx$ и $y = -x + 2$. Точка M пересечения графиков имеет абсциссу в промежутке [1;2]. Пусть $x_0 = 1$. Запишем исходное уравнение в виде $x = 2 - lgx$.

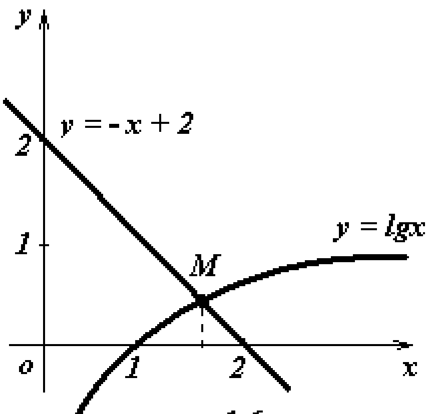


рис 1.6

$$\varphi(x) = 2 - lgx, \quad \varphi'(x) = -\frac{\lg x}{x}$$

$|\varphi'(x)| \le 1$ в промежутке [1 ; 2], следовательно, способ итераций применим.

Найдем приближения:

$$x_1 = 2 - \lg x_0 = 2 - \lg 1 = 2$$

$$x_2 = 2 - \lg x_1 = 2 - \lg 2 = 2 - 0{,}3010 = 1{,}6990$$

$$x_3 = 2 - \lg x_2 = 2 - \lg 1{,}6990 = 2 - 0{,}2302 = 1{,}7698$$

$$x_4 = 2 - \lg x_3 = 2 - \lg 1{,}7698 = 2 - 0{,}2480 = 1{,}7520$$

$$x_5 = 2 - \lg x_4 = 2 - \lg 1{,}7520 = 2 - 0{,}2435 = 1{,}7565$$

$$x_6 = 2 - \lg x_5 = 2 - \lg 1{,}7565 = 2 - 0{,}2445 = 1{,}7555$$

$$x_7 = 2 - \lg x_6 = 2 - \lg 1{,}7555 = 2 - 0{,}2444 = 1{,}7556$$

Таким образом, искомый корень с точностью до *0,001* равен *1,755*

Содержание заданий

Решить методом итераций с точностью до 0,01 следующие уравнения.

1 $x^3 - 12x + 1 = 0.$

2 $x^3 + 2x - 7 = 0$. *(Ответ: (1;2))*

3 $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$. *(Ответ: (0;1), (2;3),(6;7))*

4 $x^4 + 3x - 20 = 0$. *(Ответ: 1,94)*

5 $x^3 - 2x - 5 = 0$. *(Ответ: 2,09)*

6 $x^4 - 3x + 1 = 0$. *(Ответ: 0,33; 1,30)*

7 $x^3 + 3x + 5 = 0$. *(Ответ: -1,15)*

8 $x^4 + 5x - 7 = 0$. *(Ответ: 1,11)*

9 $x^3 - 12x + 5 = 0$. *(Ответ: 0,42)*

10 $x^4 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$. *(Ответ: 3,62)*

11 $3^{x-1} + 4 - x = 0;$

12 $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0;$

13 $(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2) = -1;$

14 $5\sin x = x.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 3 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Тема 3.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие 8,9 Приближенные методы решения систем линейных уравнений (4ч.)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных уравнений приближенными методами (метод простой итерации, метод Зейделя).

Студент должен:

*Знать***:**

- приближенные методы решения систем линейных уравнений;

Уметь:

- решать системы линейных уравнений методом простой итерации;
- решать системы линейных уравнений методом Зейделя.

Краткие теоретические сведения

1. Метод простой итерации

Как отмечалось ранее, итерационные методы используются для решения уравнений и систем любой природы. Рассмотрим, как это делается применительно к системам линейных алгебраических уравнений.

Приведём систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

к равносильной ей системе вида **x=Ax**:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ .... \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

В сокращенной форме: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}$.

О системе (2.10) говорят, что она «приведена к нормальному виду».

Правая часть системы определяет отображение $F : y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i$ **(2.11)**, переводящее точку $\overline{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точку $\overline{y}(y_1, y_2, ..., y_n)$. Используя отображения (2.11) и выбрав начальную точку $\overline{x}^0 \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение F является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы а, следовательно, и решением исходной системы.

<u>Замечание:</u> Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (2) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее: $\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$, **(3)**, т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (1), взятых по столбцам, должен быть меньше 1.

Практическая схема решения с.л.у. методом простой итерации

С.л.у. необходимо привести к нормальному виду (1).

Для обеспечения сходимости итерационной последовательности необходимо, чтобы коэффициенты α_{ij} при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (2.10), у которой все $|\alpha_{ij}| < 1$.

Для проверки точности решения используем условие (3).

Метод Зейделя

При решении системы (1) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через $x_1, x_2, ..., x_n$, а элементы очередного (вычисляемого) приближения через $y_1, y_2, ..., y_n$.

Вычислительные формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \qquad i = 1,2,...,n$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения y_i учитываются уже полученные значения $y_1, y_2, ..., y_{i-1}$. Выпишем соответствующие вычислительные формулы:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_{21} y_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{2j} x_j + \beta_2,$$

....

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i$$

....

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} y_i + \alpha_{nn} x_n + \beta_n$$

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю схожесть, чем метод простой итерации.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41, \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44, \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56. \end{cases}$$

методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$.

Решение: Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами. В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 2-го уравнений:

$$\begin{cases} \underline{8{,}04}x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44, \\ 6{,}26x_1 - \underline{12{,}2}x_2 - 3{,}24x_3 = 69{,}97, \\ 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - \underline{11{,}61}x_3 = 14{,}41. \end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}649x_2 - 0{,}034x_3 - 0{,}801, \\ x_2 = 0{,}573x_1 - 0{,}266x_3 - 5{,}735, \\ x_3 = 0{,}202x_1 - 0{,}363x_2 - 1{,}241. \end{cases}$$

Проверку условия сходимости и точности решения осуществим с помощью программы.

1. Решим систему методом Гаусса-Зейделя

$$\begin{pmatrix} 0{,}401 & 0{,}301 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}122 \\ -0{,}029 & -0{,}500 & -0{,}018 & 0{,}000 & -0{,}253 \\ 0{,}000 & -0{,}050 & -1{,}400 & -0{,}039 & -0{,}988 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & -0{,}007 & -2{,}300 & -2{,}082 \end{pmatrix}$$

Запишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{0{,}401}(0{,}122 - 0{,}301x_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{-0{,}500}(-0{,}253 + 0{,}018x_3 + 0{,}029x_1) \\ x_3 = \dfrac{1}{-1{,}400}(-0{,}988 + 0{,}050x_2 + 0{,}039x_4) \\ x_4 = \dfrac{1}{-2{,}300}(-2{,}082 + 0{,}007 \cdot x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}304 - 0{,}751x_2 \\ x_2 = 0{,}506 - 0{,}036x_3 - 0{,}058x_1 \\ x_3 = 0{,}706 - 0{,}036x_2 - 0{,}028x_4 \\ x_4 = 0{,}905 - 0{,}003x_3 \end{cases}$$

В качестве начальных приближений возьмем нули, т.е. примем

$x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0.$

Найдем значения неизвестных на первой итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}304 - 0{,}751x_2^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 0{,}506 - 0{,}036x_3^{(0)} - 0{,}058x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} = 0{,}706 - 0{,}036x_2^{(1)} - 0{,}028x_4^{(0)} \\ x_4^{(1)} = 0{,}905 - 0{,}003x_3^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0{,}304 - 0{,}751 \cdot 0 = 0{,}304 \\ x_2^{(1)} = 0{,}506 - 0{,}036 \cdot 0 - 0{,}058 \cdot 0{,}304 = 0{,}488 \\ x_3^{(1)} = 0{,}706 - 0{,}036 \cdot 0{,}488 - 0{,}028 \cdot 0 = 0{,}688 \\ x_4^{(1)} = 0{,}905 - 0{,}003 \cdot 0{,}688 = 0{,}903 \end{cases}$$

Далее произведем вторую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}304 - 0{,}751x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 0{,}506 - 0{,}036x_3^{(1)} - 0{,}058x_1^{(2)} \\ x_3^{(2)} = 0{,}706 - 0{,}036x_2^{(2)} - 0{,}028x_4^{(1)} \\ x_4^{(2)} = 0{,}905 - 0{,}003x_3^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}304 - 0{,}751 \cdot 0{,}488 = -0{,}062 \\ x_2^{(2)} = 0{,}506 - 0{,}036 \cdot 0{,}688 - 0{,}058 \cdot (-0{,}062) = 0{,}485 \\ x_3^{(2)} = 0{,}706 - 0{,}036 \cdot 0{,}485 - 0{,}028 \cdot 0{,}903 = 0{,}663 \\ x_4^{(2)} = 0{,}905 - 0{,}003 \cdot 0{,}663 = 0{,}903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|-0{,}062 - 0{,}304\right| = 0{,}366 \\ \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|0{,}488 - 0{,}485\right| = 0{,}003 \\ \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = \left|0{,}663 - 0{,}688\right| = 0{,}025 \\ \left|x_4^{(2)} - x_4^{(1)}\right| = \left|0{,}903 - 0{,}903\right| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0{,}366;\ \ 0{,}003;\ \ 0{,}025;\ \ 0\} = 0.366 > 0.001$$

Точность не достигнута.

Произведем третью итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}304 - 0{,}751 x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 0{,}506 - 0{,}036 x_3^{(2)} - 0{,}058 x_1^{(3)} \\ x_3^{(3)} = 0{,}706 - 0{,}036 x_2^{(3)} - 0{,}028 x_4^{(2)} \\ x_4^{(3)} = 0{,}905 - 0{,}003 x_3^{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}304 - 0{,}751 \cdot 0{,}485 = -0{,}060 \\ x_2^{(3)} = 0{,}506 - 0{,}036 \cdot 0{,}663 - 0{,}058 \cdot (-0{,}060) = 0{,}486 \\ x_3^{(3)} = 0{,}706 - 0{,}036 \cdot 0{,}486 - 0{,}028 \cdot (0{,}903) = 0{,}663 \\ x_4^{(3)} = 0{,}905 - 0{,}003 \cdot 0{,}663 = 0{,}903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} \left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = \left|-0{,}060 - 0{,}062\right| = 0{,}002 \\ \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = \left|0{,}486 - 0{,}485\right| = 0{,}001 \\ \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = \left|0{,}663 - 0{,}663\right| = 0 \\ \left|x_4^{(3)} - x_4^{(2)}\right| = \left|0{,}903 - 0{,}903\right| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0{,}002;\ \ 0{,}001;\ \ 0;\ \ 0\} = 0{,}002 > 0.001$$

Точность не достигнута.

Произведем четвертую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0{,}304 - 0{,}751 x_2^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 0{,}506 - 0{,}036 x_3^{(3)} - 0{,}058 x_1^{(4)} \\ x_3^{(4)} = 0{,}706 - 0{,}036 x_2^{(4)} - 0{,}028 x_4^{(3)} \\ x_4^{(4)} = 0{,}905 - 0{,}003 x_3^{(4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0{,}304 - 0{,}751 \cdot 0{,}486 = -0{,}060 \\ x_2^{(4)} = 0{,}506 - 0{,}036 \cdot 0{,}663 - 0{,}058 \cdot (-0{,}060) = 0{,}486 \\ x_3^{(4)} = 0{,}706 - 0{,}036 \cdot 0{,}486 - 0{,}028 \cdot (0{,}903) = 0{,}663 \\ x_4^{(43)} = 0{,}905 - 0{,}003 \cdot 0{,}663 = 0{,}903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} \left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| = \left|- 0{,}060 - 0{,}060\right| = 0 \\ \left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| = \left|0{,}486 - 0{,}486\right| = 0 \\ \left|x_3^{(4)} - x_3^{(3)}\right| = \left|0{,}663 - 0{,}663\right| = 0 \\ \left|x_4^{(4)} - x_4^{(3)}\right| = \left|0{,}903 - 0{,}903\right| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0;\ 0;\ 0;\ 0\} = 0 < 0.001$$

Точность достигнута.

Решение системы с точностью 0,001:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -0{,}060 \\ x_2^{(4)} = 0{,}486 \\ x_3^{(4)} = 0{,}663 \\ x_4^{(43)} = 0{,}903 \end{cases}$$

Содержание заданий

Решить систему линейных уравнений методом простой итерации с точностью до 0,001.

1. $\begin{cases} 0{,}34x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08; \\ 0{,}71x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}18x_3 = 0{,}17; \\ 1{,}17x_1 - 2{,}35x_2 + 0{,}75x_3 = 1{,}28. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3{,}75x_1 - 0{,}28x_2 + 0{,}17x_3 = 0{,}75; \\ 2{,}11x_1 - 0{,}11x_2 - 0{,}12x_3 = 1{,}11; \\ 0{,}22x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}81x_3 = 0{,}05. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0{,}21x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}75x_3 = 0{,}11; \\ 0{,}13x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}11x_3 = 2{,}00; \\ 3{,}01x_1 - 0{,}33x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 0{,}13x_1 - 0{,}14x_2 - 2{,}00x_3 = 0{,}15; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}77x_3 = 0{,}11; \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 = 0{,}12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 - 0{,}15x_3 = 1{,}00; \\ 1{,}11x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}75x_3 = 0{,}13; \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}17. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0{,}92x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}62x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}24x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 = 0{,}62; \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 - 0{,}67x_3 = 0{,}88. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 1{,}24x_1 - 0{,}87x_2 - 3{,}17x_3 = 0{,}46; \\ 2{,}11x_1 - 0{,}45x_2 + 1{,}44x_3 = 1{,}50; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 = 0{,}35. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0{,}64x_1 - 0{,}83x_2 + 4{,}20x_3 = 2{,}23; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 = 1{,}71; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}54. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 0{,}32x_1 - 0{,}42x_2 + 0{,}85x_3 = 1{,}32; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}43x_2 - 0{,}58x_3 = -0{,}44; \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 = 0{,}64. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 = 0{,}58; \\ 1{,}25x_1 + 0{,}66x_2 - 0{,}78x_3 = 0{,}66; \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}92. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}62x_1 - 0{,}44x_2 - 0{,}86x_3 = 0{,}68; \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 = 1{,}24; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 - 0{,}62x_3 = 0{,}87. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 = 3{,}14; \\ 0{,}75x_1 - 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17; \\ 3{,}44x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 = 1{,}83. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 0{,}16x_1 + 1{,}72x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44; \\ 1{,}53x_1 - 2{,}32x_2 - 1{,}83x_3 = 2{,}83; \\ 0{,}75x_1 + 0{,}86x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2{,}47x_1 + 0{,}65x_2 - 1{,}88x_3 = 1{,}24; \\ 1{,}34x_1 + 1{,}17x_2 + 2{,}54x_3 = 2{,}35; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}73x_2 - 1{,}08x_3 = 3{,}15. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4{,}24x_1 + 2{,}73x_2 - 1{,}55x_3 = 1{,}87; \\ 2{,}34x_1 + 1{,}27x_2 + 3{,}15x_3 = 2{,}16; \\ 3{,}05x_1 - 2{,}05x_2 - 0{,}63x_3 = 1{,}25. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 1{,}24x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}95x_3 = 1{,}43; \\ 2{,}15x_1 - 1{,}18x_2 + 0{,}57x_3 = 2{,}43; \\ 1{,}72x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}57x_3 = 3{,}88. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 0{,}63x_2 + 1{,}41x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}64x_1 - 0{,}83x_2 - 2{,}45x_3 = 1{,}84; \\ 0{,}58x_1 + 1{,}55x_2 + 3{,}18x_3 = 0{,}74. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 1{,}24x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}95x_3 = 1{,}43; \\ 2{,}15x_1 - 1{,}18x_2 + 0{,}57x_3 = 2{,}43; \\ 1{,}72x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}57x_3 = 3{,}88. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 0{,}62x_1 + 0{,}56x_2 - 0{,}43x_3 = 1{,}16; \\ 1{,}32x_1 - 0{,}88x_2 + 1{,}76x_3 = 2{,}07; \\ 0{,}73x_1 + 1{,}42x_2 - 0{,}34x_3 = 2{,}18. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1{,}06x_1 + 0{,}34x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}17; \\ 2{,}54x_1 - 1{,}16x_2 + 0{,}55x_3 = 2{,}23; \\ 1{,}34x_1 - 0{,}47x_2 - 0{,}83x_3 = 3{,}26. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3{,}15x_1 - 1{,}72x_2 - 1{,}23x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}72x_1 + 0{,}67x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}43; \\ 2{,}57x_1 - 1{,}34x_2 - 0{,}68x_3 = 1{,}03. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 1{,}73x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}82x_3 = 0{,}36; \\ 0{,}27x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}64x_3 = 1{,}23; \\ 0{,}56x_1 - 0{,}48x_2 + 1{,}95x_3 = -0{,}76. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 0{,}95x_1 + 0{,}72x_2 - 1{,}14x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}63x_1 + 0{,}24x_2 + 0{,}38x_3 = 0{,}74; \\ 1{,}23x_1 - 1{,}08x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}97. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2{,}18x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}93x_3 = 1{,}06; \\ 1{,}42x_1 + 0{,}18x_2 + 1{,}12x_3 = 2{,}07; \\ 0{,}92x_1 - 1{,}14x_2 - 2{,}53x_3 = -0{,}45. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2,23x_1 - 0,73x_2 + 1,27x_3 = 2,43; \\ 2,15x_1 + 3,17x_2 - 1,43x_3 = -0,73; \\ 0,83x_1 + 0,72x_2 + 2,12x_3 = 1,42. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72; \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24; \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 1,16x_1 - 0,28x_2 + 2,16x_3 = 1,16; \\ 0,65x_1 + 0,76x_2 - 1,18x_3 = 0,28; \\ 0,53x_1 + 1,07x_2 - 0,63x_3 = 1,27. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2,16x_1 - 2,83x_2 + 1,15x_3 = 2,32; \\ 1,71x_1 + 2,17x_2 - 0,83x_3 = 1,25; \\ 0,35x_1 - 0,72x_2 + 1,03x_3 = 0,82. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 1,02x_1 + 0,72x_2 - 0,65x_3 = 1,27; \\ 0,74x_1 - 1,24x_2 - 1,73x_3 = 0,77; \\ 1,78x_1 + 2,32x_2 + 0,74x_3 = 1,16. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 1,53x_1 - 1,63x_2 - 0,76x_3 = 2,18; \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95; \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47. \end{cases}$

Методом Зейделя решить с точностью до 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду, удобному для итераций.

1. $\begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1; \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7; \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7; \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1; \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2; \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1; \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8; \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 + 2,8x_3 = 6,7; \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,8x_3 = 0,8; \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7; \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1; \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7; \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5; \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24; \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5; \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7; \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8; \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4; \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9; \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4; \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5; \\ 4,5x_1 - 2,8x_2 + 6,7x_3 = 2,6; \\ 5,1x_1 + 3,7x_2 - 1,4x_3 = -0,14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5; \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5; \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3{,}8x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 5{,}2; \\ 6{,}4x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 3{,}8; \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 3{,}5x_3 = -0{,}6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5{,}4x_1 - 6{,}2x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}52; \\ 3{,}4x_1 + 2{,}3x_2 + 0{,}8x_3 = -0{,}8; \\ 2{,}4x_1 - 1{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 1{,}8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}8x_3 = 1{,}8; \\ 3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}3; \\ 4{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 2{,}8x_3 = 3{,}4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 4{,}8; \\ -2{,}1x_1 + 3{,}9x_2 - 5{,}8x_3 = 3{,}3; \\ 1{,}8x_1 + 1{,}1x_2 - 2{,}1x_3 = 5{,}8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}2x_2 + 3{,}0x_3 = 1{,}8; \\ 2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}8; \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 3{,}1x_3 = 5{,}1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2{,}8x_1 + 3{,}82x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}5; \\ 2{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 3{,}3x_3 = 7{,}1; \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 4{,}8x_3 = 6{,}3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3{,}3x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}2x_3 = 5{,}8; \\ 2{,}7x_1 + 2{,}3x_2 - 2{,}9x_3 = 6{,}1; \\ 4{,}1x_1 + 4{,}8x_2 - 5{,}0x_3 = 7{,}0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7{,}1x_1 + 6{,}8x_2 + 6{,}1x_3 = 7{,}0; \\ 5{,}0x_1 + 4{,}8x_2 + 5{,}3x_3 = 6{,}1; \\ 8{,}2x_1 + 7{,}8x_2 + 7{,}1x_3 = 5{,}8. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3{,}7x_1 + 3{,}1x_2 + 4{,}0x_3 = 5{,}0; \\ 4{,}1x_1 + 4{,}5x_2 - 4{,}8x_3 = 4{,}9; \\ -2{,}1x_1 - 3{,}7x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}7. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4{,}1x_1 + 5{,}2x_2 - 5{,}8x_3 = 7{,}0; \\ 3{,}8x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}0x_3 = 5{,}3; \\ 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 - 6{,}3x_3 = 5{,}8. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4; \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5; \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6{,}3x_1 + 5{,}2x_2 - 0{,}6x_3 = 1{,}5; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = 2{,}7; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}5x_3 = -2{,}3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2{,}3x_2 - 3{,}7x_3 = 4{,}5; \\ 2{,}8x_1 + 3{,}4x_2 + 5{,}8x_3 = -3{,}2; \\ 1{,}2x_1 + 7{,}3x_2 - 2{,}3x_3 = 5{,}6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4; \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5; \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 2{,}5x_2 - 2{,}9x_3 = 4{,}5; \\ 0{,}8x_1 + 3{,}5x_2 - 1{,}4x_3 = 3{,}2; \\ 1{,}5x_1 - 2{,}3x_2 + 8{,}6x_3 = -5{,}5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5{,}4x_1 - 2{,}4x_2 + 3{,}8x_3 = 5{,}5; \\ 2{,}5x_1 + 6{,}8x_2 - 1{,}1x_3 = 4{,}3; \\ 2{,}7x_1 - 0{,}6x_2 + 1{,}5x_3 = -3{,}5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 3{,}7x_2 - 8{,}3x_3 = 2{,}3; \\ 1{,}8x_1 + 4{,}3x_2 + 1{,}2x_3 = -1{,}2; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 5{,}2x_3 = 3{,}5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5; \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \end{cases}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 4 АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Тема 4.2 Интерполирование функций

Практическое занятие 10,11 Интерполирование (4ч.)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения составлять интерполяционные формулы Лагранжа, Ньютона.
- закрепить умения интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке.
- Овладение вычислительными методами и практическими методами оценки погрешности вычислений.

Студент должен:

Знать:

- понятие линейная и квадратичная интерполяции;
- интерполяционный многочлен Лагранжа;
- интерполяционный многочлен Ньютона;
-

Уметь:

- составлять полином Лагранжа;
- составлять полином Ньютона;
- вычисление значений функций по интерполяционным многочленам;
- интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке.

Краткие теоретические сведения

1. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть дана таблица значений

x	x_1	x_2	x_3	…………	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…………	y_n

Требуется составить полином (функцию) $y = f(x)$ степени $m \le n - 1$, который принимал бы заданные значения y_i при соответствующих значениях x_i : $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$. Иными словами график функции должен проходить через заданные точки $M(x_i; y_i)$

Данная задача выполнима при использовании интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \frac{y_1\varphi(x)}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3).......(x_1-x_n)} + \frac{y_2\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3).......(x_2-x_n)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{y_n\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2).......(x_n-x_{n-1})} \quad \textbf{(1)}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)} \quad \textbf{(2)}$$

где $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)........(x-x_n)$ - вспомогательная функция n-й степени, в которой x_i – заданные табличные значения аргумента.

2. Интерполяционная формула Ньютона

Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots$ – значения некоторой функции $y = f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргументам $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots$ (т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta x = const$).

Введем обозначения:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, ... , $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ - разности первого порядка данной функции;

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$, ... – разности второго порядка

....

$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1$, ... – разности $(n+1)$ - го порядка

Производя последовательные подстановки, получим:

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$, $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$, ... $\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot y_{n-k}$

Подобным же образом получаем:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$, ...

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k y_0 = (1+\Delta)^n \cdot y_0 = y_0 + n\Delta y_n + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \Delta^n y_0 \qquad \textbf{(3)}$$

Запишем таблицу разностей:

x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
		Δy_3				
x_4	y_4					

..

Если в формуле (3) положить, что n – не только целое и положительное число, а может быть любым $n = t$, то получим интерполяционную формулу Ньютона

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \Delta^r y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Мы получили такую функцию от t, которая обращается при $t = 0$ в y_0, при $t = 1$ в y_1, при $t = 2$ в y_2 и т. д. Поскольку последующее значение аргумента x при постоянном шаге h определяется формулой $x_n = x_0 + nh$, то $n = \frac{x_n - x_0}{h}$.

Тогда, полагая $x = x_0 + th$, $t = \frac{x - x_0}{h}$ приведем формулу (3) к виду

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathbf{(3^*)}$$

3. Интерполяция сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений.

Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей, с последующим построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

Однако такое интерполирование наталкивается на существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов бывает разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции - интерполяции ***сплайнами***.

Суть этого подхода заключается в следующем:

Функция S_m (x) называется *интерполяционным сплайном порядка m* для функции f(x), заданной таблицей:

x	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

если:

1 на каждом отрезке $[x_i\ ;\ x_{i+1}]$ (i=0,…,n-1) S(x) является многочленом порядка m;

2 S(x) и её производная до (m-1)-го порядка включительно непрерывны на $[x_0\ ; x_n]$;

3 $S(x_i)=y_i$ (i=0,…,n) - непосредственно условие интерполяции.

Остановимся на построении наиболее популярных в практике аппроксимации функций *кубических сплайнов*.

По определению кубический сплайн S(x) можно представить в виде

$$S(x)=\begin{cases}P_1(x), & x\in[x_0;x_1];\\ P_2(x), & x\in[x_1;x_2];\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x), & x\in[x_{n-1};x_n].\end{cases}$$

Где каждый из $P_i(x)$ - многочлен третьей степени:

$$P_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+C_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3, i=\overline{1,n} \ .$$

Коэффициенты a_i найдем из условия: $y_i=S(x_i)=P_i(x_i)=a_i$, т.е.

$$a_i=y_i \qquad \textbf{(3.19)}$$

Условие непрерывности S(x) в каждом узле приводит к равенствам:

$$P_i(x_i)=P_{i+1}(x_i), \quad i=\overline{1,n-1}$$

В развернутом виде с учетом формулы (3.18) эти равенства примут вид:

$$a_i=a_{i+1}+b_{i+1}(x_i-x_{i+1})+C_{i+1}(x_i-x_{i+1})^2+d_{i+1}(x_i-x_{i+1})^3$$

Введем обозначения: $h_i=x_i-x_{i-1}$

Понижая в равенстве (3.20) индекс на единицу (меняем i на i-1) и, учитывая (3.19), получим:

$$h_ib_i-h_i^2c_i+h_i^3d_i=y_i-y_{i-1}$$

Условие непрерывности первой производной кубического сплайна сводится к требованию $P_i'(x_i)=P_{i+1}'(x_i), \quad i=\overline{1,n-1}$

Тогда дифференцируя формулу (3.18) и используя, введите обозначения, получим:

$$b_{i-1}-b_i+2h_ic_i-3h_i^2d_i=0 \qquad (i=\overline{2,n})$$

Из условия непрерывности второй производной: $P_i''(x_i)=P_{i+1}''(x_i)$ получим:

$$C_{i-1}-C_i+3h_id_i=0 \ \ (i=\overline{2,n})$$

Составим систему из последних трёх равенств и, решив её, найдем коэффициенты b_i, C_i, d_i.

Однако, для однозначной ее разрешимости добавим условия непрерывности на концах отрезка: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, $P_1''(x_0) = 0,\ P_n''(x_n) = 0$ т.е.

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - 3h_1 d_1 = 0; \\ a_n = 0; \\ h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1}; \\ b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0; \\ C_{i-1} - C_i + 3h_i d_i = 0. \end{cases}$$

Последовательно, исключая переменные получим

$$h_{i+1}C_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})C_i + h_i C_{i-1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные C_i).

$$d_i = \frac{C_i - C_{i-1}}{3h_i} \qquad \textbf{(6)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные d_i).

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + h_i C_i - h_i^2 d_i \qquad \textbf{(7)}$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные b_i).

Построив кубический сплайн, найдем оценку погрешности интерполяции:

$$|f(x) - S(x)| \le \max_{[a;b]} \left| f^{(4)}(x) \right|,$$

где $[a;b]$ - промежуток интерполяции.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице значений

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Решение. Вспомогательная функция $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x:

$\varphi'(x)$ = (x - 2)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 2)(x - 4)+

+(x - 1)(x - 2)(x - 3);

$\varphi'(1)=-6$, $\varphi'(2)=2$, $\varphi'(3)=-2$, $\varphi'(4)=6$.

Тогда по формуле (1)

$$f(x)=\frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4)+\frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4)+$$
$$+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=x+1$$

Таким образом, в данном случае в качестве интерполяционного полинома найдена линейная функция $f(x) = x + 1$.

Пример 2 Из таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

найти значение *y* при *x* = 3,1, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

Решение. Составим таблицу разностей:

x	y	Δy	Δ² y	Δ³ y
1	**3**			
		4		
2	**7**		2	
		6		0
3	**13**		2	
		8		0
4	**21**		2	
		10		0
5	**31**		2	
		12		0
6	**43**		2	
		14		
7	**57**			

Здесь $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$, $h = 1$. Тогда $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{3{,}1 - 3}{1} = 0{,}1$

Интерполяционная формула Ньютона (4) для этого случая: $y = y_0 + \dfrac{t}{1!}\Delta y_0 + \dfrac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

Следовательно $y = 13 + 0{,}1 \cdot 8 + \dfrac{0{,}1(0{,}1-1)}{2} \cdot 2 = 13{,}71$,

т.е. при $x = 3{,}1$ $y = 13{,}71$

Интерполяционная функция Ньютона (3^*) $y = 3 + (x-1)\cdot 4 + \dfrac{(x-1)(x-2)}{2}2 = x^2 + x + 1$

Пример 3 Построить кубический сплайн для функции y=f(x), заданной таблицей:

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

с дополнительным условием: $S''(-1) = S''(2) = 0$. Найти с помощью S(x) значения функции при x=0,3. (Заметим, что в основу таблицы положена функция y $=2^x$).

Решение: $C_0 = 0$ (т.к. не используется в функциях) и $C_3 = 0$ (т.к. из условия (4): $C_n = 0$).

Шаг таблицы $h_i = 1$.

из (5) получаем:

$$\begin{cases} 1\cdot C_2 + 2(1+1)C_1 + 1\cdot C_0 = 3\left(\dfrac{y_2-y_1}{1} - \dfrac{y_1-y_0}{1}\right), \ \textit{при} \ \ i=1, \\ 1\cdot C_3 + 2(1+1)C_2 + 1\cdot C_1 = 3\left(\dfrac{y_3-y_2}{1} - \dfrac{y_2-y_1}{1}\right), \ \textit{при} \ \ i=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = 3\left(\dfrac{2-1}{1} - \dfrac{1-\frac{1}{2}}{1}\right) = 3\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}, \\ D + 4C_2 + C_1 = 3\left(\dfrac{4-2}{1} - \dfrac{2-1}{1}\right) = 3(2-1) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 + 4C_1 = \dfrac{3}{2}, \\ 4C_2 + C_1 = 3. \end{cases}$$

$$15C_1 = 6 - 3 = 3,$$

$$C_1 = \frac{1}{5}, \ C_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}.$$

Из (6) имеем:

$$d_1 = \frac{C_1 - C_0}{3h} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{3\cdot 1} = \frac{1}{15} \ ,$$

$$d_2 = \frac{C_2 - C_1}{3h} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6},$$

$$d_3 = \frac{C_3 - C_2}{3h} = \frac{0 - \frac{7}{10}}{3} = -\frac{7}{30}.$$

Из (7) имеем:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + hC_1 - h^2 d_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} + 1\cdot\frac{1}{5} - 1^2\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{19}{30},$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h} + hC_2 - h^2 d_2 = \frac{2-1}{1} + 1\cdot\frac{7}{10} - 1\cdot\frac{1}{6} = 1 + \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{23}{15},$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h} + hC_3 - h^2 d_3 = \frac{4-2}{1} + 1\cdot 0 - 1\cdot\left(-\frac{7}{30}\right) = 2 + \frac{7}{30} = \frac{67}{30}.$$

Получаем:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + C_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_0; x_1],$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}(x - 0) + \frac{1}{5}(x - 0)^2 + \frac{1}{15}(x - 0)^3, \textit{т.е.}$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1;0].$$

$$P_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + C_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, x \in [x_1; x_2],$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x - 1) + \frac{7}{10}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3, x \in [x_1; x_2]$$

$$P_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + C_3(x - x_3)^2 + d_3(x - x_3)^3, x \in [x_2; x_3],$$

$$P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x - 2) - \frac{7}{30}(x - 2)^3, x \in [1;2]$$

Следовательно, сплайн S(x) построен:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1;0]; \\ P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x - 1) + \frac{7}{10}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3, x \in [0;1]; \\ P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x - 2) - \frac{7}{30}(x - 2)^3, x \in [1;2]. \end{cases}$$

Найдем его значение при x=0,3:

Заметим, что $0{,}3 \in [0;1]$, поэтому используем многочлен $P_2(x)$:

$$P(0.3) = 2 + \frac{23}{15}(0{,}3 - 1) + \frac{7}{10}(0{,}3 - 1)^2 + \frac{1}{6}(0{,}3 - 1)^3 = 1{,}2125.$$

Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера: $f(x) = 2^x$; $f(0.3) = 2^{0,3} = 1{,}2311$.

Содержание заданий

1 Используя интерполяционную формулу Лагранжа, найти уравнение параболы проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1). *(Ответ: $y = \frac{1}{32}(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640)$)*

2 Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Используя интерполяционную формулу Лагранжа, составить уравнение функции, принимающей указанные значения при заданных значениях аргумента.

(Ответ: $y = -\frac{1}{3}(-2x^3 - 15x^2 + 25x - 9)$*)*

3 Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, принимающую значения заданные таблицей.

x	4 1	5 3	6 4	7 6
y	8 -7	9 5	10 8	11 14

(Ответ: $y = \frac{1}{5}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$*)*

12 Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, график которой проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

(Ответ: $y = 2x - 1$*)*

13 Даны десятичные логарифмы чисел: $lg\ 2{,}0 = 0{,}30103$, $lg\ 2{,}1 = 0{,}32222$, $lg2{,}2=0{,}34242$, $lg2{,}3=0{,}36173$, $lg\ 2{,}4 = 0{,}38021$, $lg\ 2{,}5 = 0{,}39794$.

Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $lg\ 2{,}03$.

(Ответ: $lg\ 2{,}03 = 0{,}30750$*)*

14 Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(4) = 45$.*(Ответ:* $y=4x^2-7x+9$*)*

15 Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x)= 2^x$ и ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$ и $f(2{,}5)$.

Ответ: $y = 8 + 4(x-3) + (x-3)(x-2) + \frac{1}{6}(x-3)(x-2)(x-1) + \frac{1}{48}(x-3)(x-2)(-1)x$,

$f(-0{,}5)= 0{,}700$, $f(2{,}5)= 5{,}658$.*)*

16 Составить интерполяционную формулу Ньютона по данным таблицы

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

(Ответ: $y = x^3 + x^2 + x + 1$)

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Тема 4.3 Подбор эмпирических формул

Практическое занятие 12, 13 Эмпирические формулы (4ч.)

Цель:

– закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
– закрепить умения аппроксимировать функцию методом наименьших квадратов;

Студент должен:

Знать:

– метод наименьших квадратов.

Уметь:

– аппроксимировать функцию методом наименьших квадратов

Краткие теоретические сведения

Метод наименьших квадратов (МНК) – один из наиболее часто используемых методов при обработке эмпирических данных, построении и анализе физических, биологических, технических, экономических и социальных моделей.

С помощью МНК решают задачу выбора параметров функции (заранее заданного вида) для приближённого описания зависимости величины y от величины x.

Исходные данные могут носить самый разнообразный характер и относиться к различным отраслям науки или техники, например:

- зависимость продолжительности службы электрических ламп (y) от поданного на них напряжения (x);
- зависимость пробивного напряжения конденсаторов (y) от температуры окружающей среды (x);
- зависимость предела прочности стали (y) от содержания углерода (x);
- зависимость показателей безработицы (y) и инфляции (x);
- зависимость роста преступности (y),% и роста безработицы (x),%
- зависимость цен товара (y) от спроса (x) на этот товар;
- зависимость частного потребления (y) от располагаемого дохода (x)
- зависимость температура воздуха (y) от высоты над уровнем моря (x) и другие зависимости.

Пусть необходимо установить функциональную зависимость между двумя эмпирическими данными *x* и *y*, значения которых занесены в следующую таблицу:

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

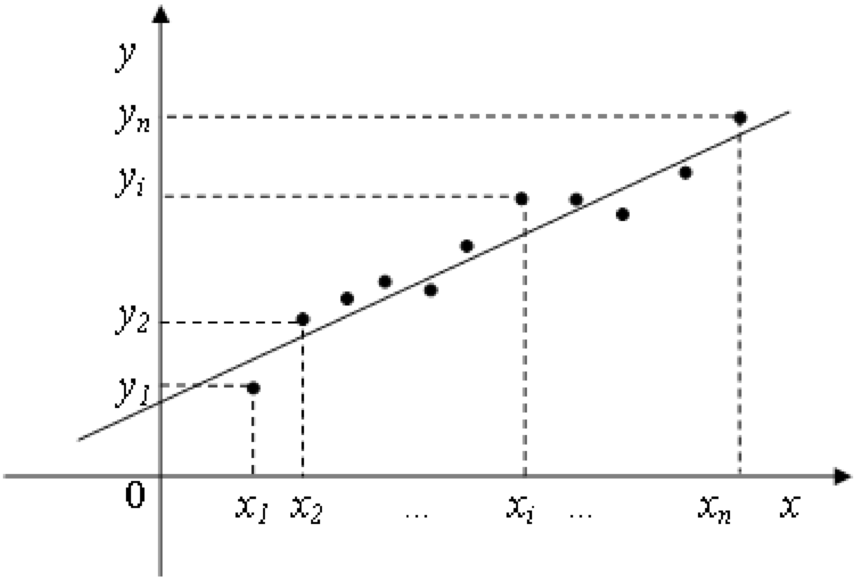
Точки $(x_i; y_i)$ координатной плоскости принято называть *экспериментальными*.

Установим вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек.

Если точки расположены так, как показано на рис.1, то разумно предположить, что между *x* и *y* существует линейная зависимость, выражающаяся формулой:

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Рассмотрим случай такой зависимости.



Уравнение (1) можно представить в виде

$$y - (kx + b) = 0.$$

Так как точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$ не обязательно лежат на одной прямой, то, подставляя вместо x и y значения координат этих точек в выражение $y - (kx + b)$, получаем равенства:

$$y_1 - (kx_1 + b) = \delta_1,\ \ y_2 - (kx_2 + b) = \delta_2,\ \ldots,\ y_n - (kx_n + b) = \delta_n,$$

где δ_1, δ_2, …, δ_n – некоторые числа, которые называют *погрешностями* (*отклонениями*, *невязками*).

Понятно, что чем меньше эти погрешности по абсолютной величине, тем лучше прямая, задаваемая уравнением $y = kx + b$, описывает зависимость между экспериментально полученными значениями x и y.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в подборе коэффициентов k и b таким образом, чтобы сумма квадратов погрешностей была как можно меньшей:

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))^2 \to \min \qquad (2)$$

Отметим, что в равенстве (2) находится сумма именно квадратов погрешностей, так как в случае суммирования самих погрешностей δ_i сумма может оказаться малой за счет разных знаков погрешностей.

Так как в равенстве (2) x_i и y_i – заданные числа, а k и b – неизвестные, то сумму S можно рассмотреть как функцию двух переменных k и b: $S = S(k,b)$. Исследуем ее на экстремум:

Необходимое условие существования экстремума функции двух переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))\,x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))(-1) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b)).$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя переменными k и b:

$$\begin{cases} -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b))\,x_i = 0, \\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - (kx_i + b)) = 0. \end{cases}$$

Преобразуя первое уравнение системы, получим

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Преобразуя второе уравнение системы, получим

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = 0.$$

Откуда имеем систему:

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) называется *нормальной системой*.

Из этой системы находим k и b, которые затем подставляем в уравнение (1) и получаем искомое уравнение прямой.

Тот факт, что функция $S = S(k,b)$ в найденной точке (k,b) имеет именно минимум, устанавливается с помощью частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = -2\sum_{i=1}^{n}(-x_i)\,x_i = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -2\cdot\sum_{i=1}^{n}(-1) = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k\,\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(-x_i) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

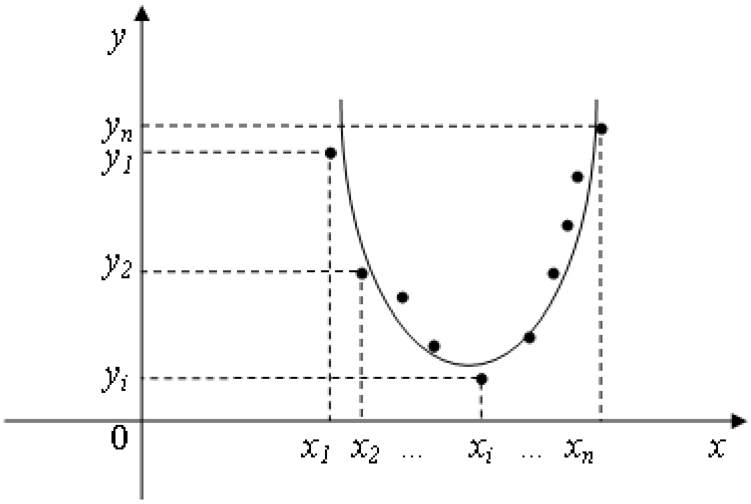
Вычислим $\Delta = \dfrac{\partial^2 S}{\partial k^2}\cdot\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial k\,\partial b}\right)^2.$

$$\Delta = 4n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

Очевидно, $\Delta > 0,$ следовательно, в найденной точке (k,b) функция $S = S(k,b)$ имеет экстремум; а так как $\dfrac{\partial^2 S}{\partial k^2} > 0,$ то, согласно достаточному условию экстремума функции двух переменных, в точке (k,b) функция имеет минимум.

Полученная функция $y = kx + b$ называется *линейной регрессией*, а коэффициенты k и b – *коэффициентами регрессии* (величины y на x).

Зависимость между экспериментально полученными величинами может быть близка к квадратичной (рис.2). В этом случае задача состоит в нахождении коэффициентов a_2, a_1, a_0 для составления уравнения вида $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$.



Можно доказать, что для определения коэффициентов a_2, a_1, a_0 следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

В экспериментальной практике в качестве приближающих функций, помимо линейной $y = kx + b$ и квадратичной $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, в зависимости от характера точечного графика часто используются следующие приближающие функции:

$$y = ax^m,\ \ y = ae^{mx},\ \ y = \frac{1}{ax+b},\ \ y = \frac{a}{x} + b,\ \ y = \frac{x}{ax+b},\ y = a\ln x + b.$$

Очевидно, что когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Пример Д.И. Менделеев в труде «Основы химии» приводит данные растворимости y натриевой селитры $NaNO_3$ на 100 г воды в зависимости от температуры t^0:

t_i^0	0	4	10	15	21	29	35	51	68
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Соответствующая зависимость может быть представлена линейной функцией $y = kt + b$.

Требуется найти аппроксимирующую (приближаемую) функцию в предположении, что она является линейной.

Найдем коэффициенты k и b.

Для этого составим и решим нормальную систему уравнений

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} t_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

n – число эмпирических точек, n = 9.

Выполним предварительные расчеты и для удобства занесем их в таблицу (столбцы t_i, y_i, t_i^2, $t_i y_i$)

№	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$	$y_{рас.i} = kt_i + b_i$	δ_i	δ_i^2
1	0	66,7	0	0	67,55	-0,85	0,7225
2	4	71,0	16	284	71,03	-0,03	0,0009
3	10	76,3	100	763	76,25	0,05	0,0025
4	15	80,6	225	1209	80,6	0	0
5	21	85,7	441	1799,7	85,82	-0,12	0,0144
6	29	92,9	841	2694,1	92,78	0,12	0,0144
7	35	99,4	1225	3479	98	1,4	1,96

8	51	113,6	2601	5793,6	111,92	1,68	2,8224
9	68	125,1	4624	8506,8	126,71	-1,61	2,5921
$\sum$	**233**	**811,3**	**10073**	**24529,2**			**8,19**

Таким образом, нормальная система принимает вид

$$\begin{cases} k \cdot 10073 + b \cdot 233 = 24529{,}2 \\ k \cdot 233 + b \cdot 9 = 811{,}3. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$k \approx 0{,}87$$

$$b \approx 67{,}55$$

Следовательно, уравнение искомой прямой

$$y = 0{,}87t + 67{,}55$$

Вычислим теперь для исходных значений t_i расчетные значения $y_{рас.i} = kt_i + b_i$ и занесем полученные результаты в таблицу (столбец $y_{рас.i} = kt_i + b_i$)

Найдем $\delta_i = y_i - (kx_i + b)$ и занесем результаты в таблицу (столбец δ_i).

Вычислим сумму квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \approx 8{,}19.$$

Содержание заданий

Аппроксимировать эту функцию линейной функцией $y = ax + b$ методом наименьших квадратов. Построить график аппроксимирующей функции и экспериментальные точки. Все промежуточные вычисления проводить с точностью до трех знаков после запятой (если округление дает ноль, то учесть первую значащую цифру), а ответы округлить до двух знаков после запятой.

	Таблица										
1	***x***	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
	y	–2	–2	1	4	5	8	8	10	14	16
2	***x***	0	1	2	3	4	6	7	8	10	12
	y	0	2	4	10	12	19	20	22	30	37
3	***x***	0	1	2	3	5	6	7	10	12	14
	y	2,5	2,5	1,5	–1	–4	–6	–9	–12	–16	–20
4	***x***	–2	–1	0	2	4	5	6	7	10	11
	y	3	–2	–6	–12	–16	–19	–22	–30	–34	5
5	***x***	–5	–4	–2	0	1	2	4	6	8	9
	y	–24	–18	–9	1	7	13	21	32	41	46
6	***x***	–5	–4	–2	0	1	2	4	6	8	9
	y	–24	–18	–9	1	7	13	21	32	41	46
7	***x***	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
	y	27	23	16	12	7	–3	–9	–13	–17	–24
8	***x***	–2	–1	0	1	2	4	6	7	8	10
	y	26	17	8	–2	–10	–27	–46	–46	–48	–51
9	***x***	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	y	6	19	30	46	52	62	66	83	86	98
10	***x***	1	5	8	10	13	15	16	20	25	30
	y	0	7	10	10	15	16	18	20	24	32

По данной таблице найдите многочлен второй степени $P_2(x)$, являющийся наилучшим приближением к соответствующей табличной функции по методу наименьших квадратов. Начертите графики таблицы и найденного многочлена.

	Таблица						
11	***x***	0.10	0.30	0.40	0.60	0.70	0.80
	y	0.25	0.50	0.65	0.55	0.42	0.30
12	***x***	-2.00	-1.80	-1.70	-1.60	-1.40	-1.30
	y	5.10	4.00	3.20	3.90	4.80	6.10
13	***x***	1.30	1.40	1.60	1.70	2.00	2.10
	y	2.40	1.80	1.20	1.40	2.30	2.90
14	***x***	0.40	0.70	0.90	1.10	1.40	1.60
	y	0.15	0.83	1.65	1.52	0.90	0.31
15	***x***	2.00	2.50	2.70	2.90	3.20	3.40
	y	-0.11	-0.81	-1.05	-0.90	-0.23	-0.05
16	***x***	-0.50	-0.30	-0.20	0.10	0.40	0.80
	y	2.30	1.20	1.05	0.90	1.20	2.10
17	***x***	1.10	2.00	2.50	2.90	3.50	4.00
	y	0.32	0.05	-0.10	-0.12	0.12	0.27
18	***x***	0.30	0.50	0.80	0.90	1.20	1.40
	y	1.10	0.60	0.40	0.38	0.65	0.90
19	***x***	-0.40	-0.10	0.10	0.20	0.50	0.70
	y	1.30	3.50	4.20	4.00	2.80	1.60
20	***x***	1.20	1.40	1.50	1.60	1.80	2.10
	y	0.90	3.30	4.10	3.90	2.80	1.10

РАЗДЕЛ 5 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Тема 5.1 Численное дифференцирование

Практическое занятие 14 Численное дифференцирование (2ч.)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения вычислять производные на основе интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона

Студент должен:

*Знать***:**

- формулы интерполяционные формулы.

Уметь:

- вычислять производные на основе интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона.

Краткие теоретические сведения

К численному (приближенному) дифференцированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять производные от функций, заданных таблично, или, когда непосредственное дифференцирование затруднительно.

Для вывода формул численного дифференцирования заменяют функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают $f'(x) = P'(x)$ при $x \in [a;b]$.

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков.

Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой:

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x),$$

т. е. *погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции*. То же справедливо и для производных высших порядков.

Вообще говоря, численное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, близость друг другу ординат двух кривых $y = f(x)$ и $y = P(x)$ на отрезке $[a;b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т. е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

Численное дифференцирование на основе первой интерполяционной формулы Ньютона

Пусть функция $y = f(x)$, задана в равноотстоящих точках x_i, $i = \overline{0,n}$ отрезка $[a;b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Для нахождения производных $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т. д. функцию приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для узлов x_i, $i = \overline{0,k}$, $k \le n$:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

$$q = \frac{x - x_0}{h},\ x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0,1,2,\ldots.$$

Преобразуем этот полином:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24} + \ldots$$

Так как $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq} \cdot \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{dy}{dq}$, то

$$y'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots)$$

Аналогично: $y''(x) = \dfrac{d(y')}{dx} = \dfrac{d(y')}{dq} \cdot \dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{d(y')}{dq}$,

тогда $$y''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots).$$

Таким же способом можно вычислить и производные функции любого порядка.

Замечание 1. При нахождении производных $y'(x)$, $y''(x)$, … в фиксированной точке x в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Замечание 2. Формулы численного дифференцирования значительно упрощаются, если исходным значением x оказывается один из узлов таблицы. Так как в этом случае каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x = x_0$, $q = 0$. Тогда:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots).$$

Замечание 3. При вычислениях на компьютере производные выражают не через конечные разности, а непосредственно через значения функции.

Оценка погрешностей. Если $P_n(x)$ — интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^n y_0$ и $R_n(x) = y(x) - P_n(x)$ — соответствующая погрешность, то погрешность в определении производной $R'_n(x) = y'(x) - P'_n(x)$.

Как это было получено выше, $R_n(x) = h^{n+1}\dfrac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}y^{n+1}(\xi)$,

где ξ — некоторое промежуточное число между значениями $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Поэтому, предполагая, что $y(x) \in C^{n+2}[a,b]$, получим:

$$R_n'(x) = \frac{dR_n(x)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^n}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dq}\left[q(q-1)\ldots(q-n) \right] + q(q-1)\ldots(q-n) \frac{d}{dq}\left[y^{(n+1)}(\xi) \right] \right\}.$$

Для оценки погрешности в узле таблицы при $x = x_0$, $q = 0$, имея в виду, что $\frac{d}{dq}\left[q(q-1)\ldots(q-n) \right]_{q=0} = (-1)^n n!$, получим выражение:

$$R_n'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(\xi).$$

Так как $y^{(n+1)}(\xi)$ во многих случаях трудно оценить, то при достаточно малом h приближенно полагают $y^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$.

Тогда $$R_n'(x_0) \approx (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

Аналогично находится погрешность $R_n''(x_0)$ для второй производной.

Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — равноотстоящие узлы, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = \overline{0, n-1}$ и для функции $y = y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Построим интерполяционный полином Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i}. \quad \text{где } q = \frac{x - x_0}{h},$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}$, получаем:

$$y'(x) \approx L_n'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-1)!} \cdot \frac{d}{dq}\left[\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{q-i} \right].$$

Аналогично могут быть найдены производные высших порядков.

Для оценки погрешности $r_n(x) = R_n'(x) = y'(x) - L_n'(x)$ воспользуемся известной формулой погрешности полинома Лагранжа:

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\omega(x),$$

где ξ — промежуточное значение между точками $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Предполагая, что $y(x) \in C^2[a,b]$, выводим:

$$r_n(x) = R_n'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left\{y^{(n+1)}(\xi)\cdot\omega'(x) + \omega(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right]\right\}.$$

Предполагая, что $\frac{d}{dx}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right]$ — ограничена, и, учитывая формулу (1), получим погрешность производной в узлах (заметим, что здесь $q = 0$, вернее $\omega(x_i)$):

$$r_n(x_i) = R_n'(x_i) = \frac{(-1)^{n-i}i!(n-i)!h^n}{(n+1)!}\cdot y^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ — промежуточное значение между $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Содержание заданий

Задание 1. Найти значение производной функции *y=f(x)*, заданной на отрезке [a, b] с помощью многочлена Лагранжа (*n=4*) в точке *x=m*. Сравнить полученный результат с точным значением производной в точке, используя непосредственное дифференцирование функции.

Задание 2. Найти значение производной функции *y=f(x)*, заданной на отрезке [a, b] с помощью многочлена Ньютона (*n=5*) в точке *x=a*. Оценить погрешность.

1 $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, *a*=1,5, *b*=2, *m*=1,55.

2 $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, *a*=1,5, *b*=2, *m*=1,55.

3 $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, *a*=2, *b*=2,5, *m*=2,06.

4 $f(x) = \lg x$, *a*=2, *b*=2,5, *m*=2,04.

5 $f(x)=\ln\frac{x}{2}$, a=3, b=3,5, m=3,03.

6 $f(x)=\ln\frac{x}{2}$, a=4,5, b=10, m=5,03.

7 $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$, a=3,4, b=4,3, m=3,6.

8 $f(x)=3^{\frac{x}{2}}$, a=5,4, b=6, m=5,6.

9 $f(x)=\lg x$, a=3, b=6, m=3,04.

10 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, a=0, b=*1*, m=0,06.

Тема 5.2 Численное интегрирование

Практическое занятие 15, 16 Приближенные методы решения определенных интегралов (4ч.)

Цель:

– закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
– закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона));

Студент должен:

Знать:

– формулы Ньютона-Котеса.

Уметь:

– приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона - Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона)).

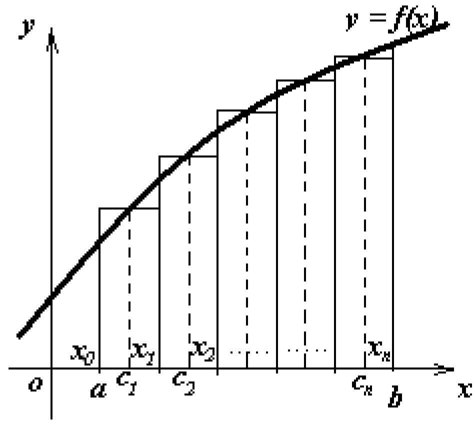
Краткие теоретические сведения

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x)*. Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы Ньютона-Котеса, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее часто используемые формулы – формула прямоугольников, формула трапеции и формула парабол (Симпсона), основанные на геометрическом смысле определенного интеграла.

1 Метод прямоугольников

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции.



Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$. В середине $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции *y = f(x)*. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью $S_i = h \cdot \tilde{y}_i$.

Тогда сумма площадей всех n прямоугольников (при достаточно большом n) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots S_n = h\cdot\left(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + \ldots\ldots \tilde{y}_n\right) = h\cdot\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i = h\cdot\sum_{i=1}^{n} f(C_i)$$

т.е. $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right|$ - **формула прямоугольников** **(1)**

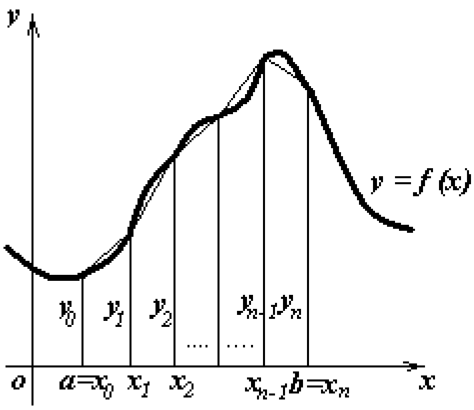
Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{24n^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{где } M_2 = \max_{[a;\, b]}\left|f''(x)\right| \qquad \textbf{(3)}$$

2 Метод трапеций

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.



Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x)*. Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на n равных частей длины $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$, $y_i = f(x_i)$.

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций S_i, высота каждой из которых равна h, то:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots S_n = h\cdot\frac{y_0+y_1}{2} + h\cdot\frac{y_1+y_2}{2} + \ldots\ldots + h\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2} =$$

$$= h\cdot\left(\frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{i-1} + 2y_i + \ldots\ldots 2y_{n-1} + y_n}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right)$$

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right| \qquad \textbf{(4)}$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots\dots+y_{n-1}\right) \pm \left|R_n(f)\right|$$ **- формула трапеций. (5)**

3 Метод парабол (Метод Симпсона)

Если заменить график функции на каждом отрезке $[x_{i-1};\, x_i]$не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

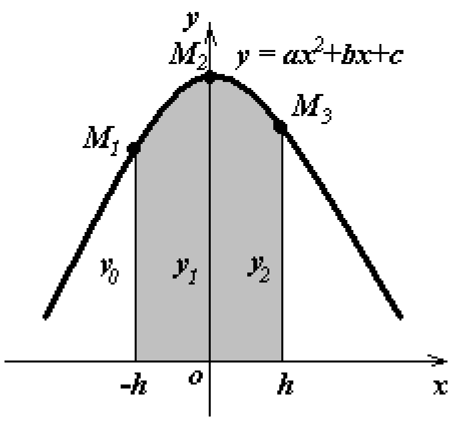


рис 3.3

Предварительно найдем вспомогательную площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и отрезком $[-h;\ h]$.

Пусть парабола проходит через точки $M_1(-h;\ y_0)$,

$M_2(0;\ y_1)$ и $M_3(h;\ y_2)$.

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \\ y_1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

тогда полученная площадь:

$$S = \int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx = a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\Big|_{-h}^{h}$$

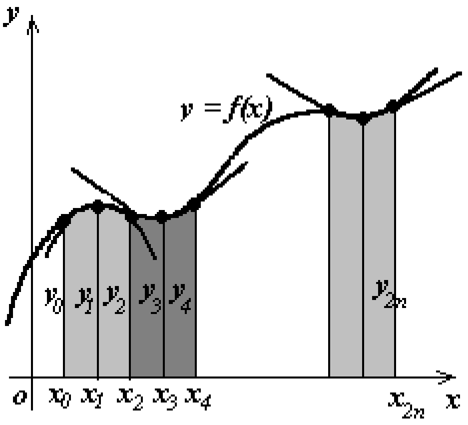
$$= a\frac{h^3}{3}+b\frac{h^2}{2}+ch-\left(a\frac{(-h)^3}{3}+b\frac{(-h)^2}{2}+c(-h)\right)=\frac{2}{3}ah^3+2ch \qquad \textbf{(7)}$$

Выразим полученное значение через y_0, y_1 и y_2. Используя формулы (6) получим $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя полученные значения в (7) получим:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \textbf{(8)}$$

Вывод формулы парабол (Симпсона).

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.



1 Разобьем отрезок [a ; b] на $2n$ равных частей. Получим отрезки длиной

$$h = \frac{b-a}{2n} \qquad \textbf{(9)}$$

2 В точках деления вычислим значения функции

$y = f(x)$: y_0, y_1, y_2, ……, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.

3 Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными $2h$.

На отрезке $[x_0;\ x_2]$ парабола проходит через точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.

Используя формулу (8) получим $S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Аналогично на отрезке $[x_2;\ x_4]$: $S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ и т. д.

до

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Следовательно:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + \ldots. + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots.. + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

=

$$=\frac{h}{3}\left[\left(y_0+y_{2n}\right)+4\left(y_1+y_3+....+y_{2n-1}\right)+2\left(y_2+y_4+...+y_{2n}\right)\right]$$

Учитывая погрешность вычислений $|R_n|$ и $h=\frac{b-a}{2n}$, получим формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6n}\left[\left(y_0+y_{2n}\right)+4\left(y_1+y_3+....+y_{2n-1}\right)+2\left(y_2+y_4+...+y_{2n}\right)\right]\pm|R_n|$$

(10)

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

$$\left|R_n(f)\right|\le\frac{(b-a)^5\cdot M_4}{180\cdot(2n)^4}\quad \text{где } M_2=\max_{[a;\,b]}\left|f^{IV}(x)\right| \qquad \textbf{(11)}$$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3dx$ при n = 4, используя метод прямоугольников.

Решение. $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\pm\left|R_n(f)\right|\Rightarrow$

$$\int_0^2 x^3dx\approx\frac{2-0}{4}\cdot\sum_{i=1}^{4}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\pm\left|R_n(f)\right|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+\left|R_n(f)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x4}{2}\right)\right)\pm\left|R_n(f)\right|$$

т.к. $x_i=x_0+i\cdot h$ и $h=\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{l|l}
x_0=0 & f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=f\left(\frac{0+1/2}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64} \\
x_1=x_0+1\cdot h=0+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} & \\
x_2=x_0+2\cdot h=0+2\cdot\frac{1}{2}=1 & f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\frac{1/2+1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}
\end{array}$$

$$x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = f\left(\frac{1+{}^3\!/_2}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

$$x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \qquad f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = f\left(\frac{{}^3\!/_2+2}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$$

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{24n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}|f''(x)|$$

$$f''(x) = 6x, \; M_2 = \max_{[0;\,2]}|6x| = 12, \; |R_4(f)| \le \frac{(2-0)^3\cdot 12}{24\cdot 16} = \frac{96}{384} \approx 0{,}25$$

Следовательно: $\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right) \pm 0{,}25 \approx 3{,}875 \pm 0{,}25$

Пример 2 Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла $\int_0^2 x^3dx$ составляет 0,125, определить число разбиений *n*.

Решение. Используя формулу **(2)** получим $0{,}125 \le \frac{2^3\cdot 12}{24\cdot n^2}$

Умножим правую и левую части неравенства на дробь $\frac{n^2}{0{,}125}$, тогда $n^2 \le \frac{96}{24\cdot 0{,}125} = \frac{96}{3} = 32$.

т.е $n \le \sqrt{32}$ или $n \le 5$

Пример 3 Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод трапеций.

Решение. По формуле трапеций:

$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right) \pm |R_n(f)|$, т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$, $h = \frac{1}{2}$, то

$x_0 = 0$, $\quad x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0 + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\quad x_2 = x_0 + 2\cdot h = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $\quad x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$.

Тогда $y_0 = f(0) = 0^3 = 0$, $y_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $y_2 = f(1) = 1^3 = 1$, $y_3 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$, $y_4 = f(2) = 2^3 = 8$.

Найдем погрешность:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]} |f''(x)|$$

$$f''(x) = 6x, \; M_2 = \max_{[0;\,2]} |6x| = 12, \; |R_4(f)| \le \frac{(2-0)^3 \cdot 12}{12 \cdot 16} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Следовательно

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0+8}{2} + \frac{1}{8} + 1 + \frac{27}{8}\right) \pm 0{,}5 = 4{,}25 \pm 0{,}5$$

Пример 4 Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3 dx$, используя метод парабол при *n=4.*

Решение. Количество разбиений *2n = 8,* $h = \frac{2-0}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$, *f (x)=* x^3

Составим таблицу:

x	y_0, y_8	$y_{четное}$	$y_{нечетное}$
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 0^3 = 0$		
$x_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$			$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
$x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$			$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$x_4 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$		$y_4 = f(1) = 1^3 = 1$	
$x_5 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$			$y_5 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

$x_6 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$		$y_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	
$x_7 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$			$y_7 = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
$x_8 = 2$	$y_8 = f(2) = 2^3 = 8$		

Рассмотрим погрешность метода:

$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} = 0$ (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2-0}{6 \cdot 4}\left[(0+8) + 4\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{343}{64}\right) + 2\left(\frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{27}{8}\right)\right] \pm 0 = \frac{48}{12} = 4$$

Содержание заданий

Задание 1.Вычислить интеграл от заданной функции f(x) на отрезке [a;b] при делении отрезка на 10 равных частей тремя способами:

1) по формуле прямоугольников;
2) по формуле трапеций;
3) по формуле Симпсона;

Сравнить точность полученных результатов.

Задание 2. С помощью программ на компьютере вычислить значение интеграла заданной функции на отрезке [a;b]:

1) по формуле прямоугольников;
2) по формуле трапеций;
3) по формуле Симпсона.

1. $\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 2. $\int_{2}^{3,2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 3. $\int_{0,5}^{1,6} \frac{x^2+0,5}{\sqrt{x^2+1}} dx$

4. $\int\limits_{2,2}^{3,4}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$

5. $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{x-0,5}{\sqrt{x^2-1}}dx$

6. $\int\limits_{2,2}^{3,8}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}dx$

7. $\int\limits_{0,2}^{2,4}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}dx$

8. $\int\limits_{1}^{2,6}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$

9. $\int\limits_{0,8}^{1,6}\frac{0,5x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

10. $\int\limits_{-0,4}^{1,6}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

11. $\int\limits_{-0,8}^{1,4}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}$

12. $\int\limits_{2,6}^{3,4}\frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1,5}}dx$

13. $\int\limits_{0,8}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}$

14. $\int\limits_{2,4}^{3,2}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2}}$

15. $\int\limits_{0,2}^{2}\frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}}dx$

16. $\int\limits_{0,7}^{1,5}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

17. $\int\limits_{0,2}^{2,5}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}dx$

18. $\int\limits_{1,4}^{2,6}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2,5}}$

19. $\int\limits_{2,2}^{3,4}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

20. $\int\limits_{0,4}^{1,6}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

21. $\int\limits_{-2,5}^{-1,3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1,8}}$

22. $\int\limits_{-0,4}^{1,8}\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

23. $\int\limits_{0,6}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2}}$

24. $\int\limits_{1,6}^{2,8}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1,2}}$

25. $\int\limits_{0,2}^{1,11}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5}dx$

26. $\int\limits_{0,6}^{1,8}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1,7}}$

27. $\int\limits_{0,4}^{1,8}\frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}}dx$

28. $\int\limits_{2,2}^{2,8}\frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2+1}}$

29. $\int\limits_{0,8}^{1,5}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2,4}}$

30. $\int\limits_{0,4}^{1,7}\frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Контрольные вопросы

1 Почему формула Ньютона-Котеса может оказаться непригодной для реального вычисления определенного интеграла?
2 Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3 Чем объясняется название формулы прямоугольников?
4 Чем объясняется название формулы трапеций?
5 В чем выражается преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?
6 Каким образом при использовании формулы парабол можно рассчитать требуемое число отрезков разбиения для достижения заданной точности интегрирования ε?

РАЗДЕЛ 6 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тема 6.1 Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Практическое занятие 17 Приближенные методы решения дифференциальных уравнений (2ч)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера, методом Рунге-Кутта.

Студент должен:

Знать:

- понятие дифференциального уравнения;
- алгоритм метода Эйлера.

Уметь:

- находить решение дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера.

Краткие теоретические сведения

Метод Эйлера

Пусть требуется решить **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y) \qquad \textbf{(1)}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении дифференциального уравнения (1) задача ставится следующим образом: в точках x_0 , x_0 , x_1 , x_2 ,...., x_n найти приближения y_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$для значений точного решения $y(x_к)$

Разность $\Delta x_к = x_{к-1} - x_к$ называется **шагом сетки**. Во многих случаях величину $\Delta x_к$ принимают постоянной. Пусть $\Delta x_к = h$, тогда

$$x_k = x_0 + kh \text{ где } \left(k = \overline{1, n}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x;y)\text{, где } \Delta y = y(x+h) - y(x), \Delta x = (x+h) - x = h \qquad \textbf{(3)}$$

Приближенное значение $y_к$ в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k) \text{ - } \textbf{формула Эйлера} \qquad \textbf{(4)}$$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Методом Эйлера найти значения решения уравнения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка [$1; 1,5$], приняв $h = 0,1$

Решение. По формуле (2) находим точки $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $x_4 = 1,4$, $x_5 = 1,5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, вычисляем по формуле (4). Результаты вычислений занесем в таблицу.

k	x_k	y_k	$2x_k$	$f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$	$hf(x_k, y_k) = 0,1(2x_k - y_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	*1,0*	*1,0000*	*2,0*	*1,0000*	*0,1000*	*1,1000*
1	*1,1*	*1,1000*	*2,2*	*1,1000*	*0,1100*	*1,2100*
2	*1,2*	*1,2100*	*2,4*	*1,1900*	*0,1190*	*1,3290*
3	*1,3*	*1,3290*	*2,6*	*1,2710*	*0,1271*	*1,4561*
4	*1,4*	*1,4561*	*2,8*	*1,3439*	*0,1344*	*1,5905*
5	*1,5*	*1,5905*	*3,0*	*1,4095*	*0,1410*	*1,7315*

Содержание заданий

1 Найти, используя метод Эйлера, значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением

а) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$,

б) $y' = x + y$

в) $y' = 1 + x + y^2$

г) $y' = x^2 + y^2$

д) $y' = y^2 + \dfrac{x}{y}$

е) $y' = \dfrac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$

при начальном условии $y(0)=1$, принимая $h = 0,1$, ограничиваясь отысканием первых четырех значений y.

2 Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке [a;b] при заданном начальном условии $y(a) = y_0$ и шаге интегрирования h методом Эйлера:

а) с применением «ручных» вычислений с шагом 2h.

б) с помощью программы для компьютера с шагом h.

в) Свести результаты вычислений в одну таблицу и сопоставить точность полученных значений функции. Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

№	***f(x)***	***a***	***b***	***y_0***	***h***
1	$\left(x^2+y^2\right)-2xyy'=0$	3	5	1	0.2
2	$y'=\dfrac{y}{x}-1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy'+\left(x-2y\right)=0$	0	2	0	0.2
4	$(x-y)y-x^2y'=0$	1	3	1	0.2
5	$xy'-y=y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy'=1-x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy'+x=1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y-xy'=1+x^2y'$	0.2	2.2	1	0.2
9	$xy+(x+1)y'=0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy'+y^2=2$	3	5	1	0.2
11	$(xy-x^2)y'=y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y-xy'=x+yy'$	1	3	0	0.2
13	$y+2=(2x+y-4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x-1)y'+y^2=0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy'+2y=2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Контрольные вопросы

1 Что является решением дифференциального уравнения?

2 На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?

3 В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?

Практическое занятие 18 Приближенные методы решения дифференциальных уравнений (2ч)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта.

Студент должен:

Знать:

- понятие дифференциального уравнения;
- алгоритм метода Рунге-Кутта.

Уметь:

- находить решение дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта.

Краткие теоретические сведения

Метод Рунге – Кутта (Один из наиболее употребляемых методов повышенной точности).

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге – Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x;\, y) \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \dfrac{h}{2};\, y + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(x + h;\, y + k_3) \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Если положить $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, то можно доказать, что

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \qquad \textbf{(6)}$$

Получаем следующую схему вычислений:

x	***y***	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\Delta y}$
x_0 $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + \frac{h}{2}$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{k_1}{2}$ $y_0 + \frac{k_2}{2}$ $y_0 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_1 $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + \frac{h}{2}$ $x_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$ $y_1 + \frac{k_1}{2}$ $y_1 + \frac{k_2}{2}$ $y_1 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
x_2 $x_2 + \frac{h}{2}$ $x_2 + \frac{h}{2}$ $x_2 + h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$ $y_2 + \frac{k_1}{2}$ $y_2 + \frac{k_2}{2}$ $y_2 + k_3$	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
....	....	....	....

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Составь таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y' = y - \frac{2x}{y}$, при начальном условии $y(0) = 1,\ 0 \le x \le 1$ при $h = 0{,}2$.

Решение. Используя формулы (5) найдем числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x;\, y) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}\right) = 0{,}2 \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2};\, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}1) = 0{,}2 \cdot \left(1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}\right) = 0{,}1836 \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2};\, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\, 1{,}0918) = 0{,}1817 \\ k_4 = h \cdot f(x + h;\, y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\, 1{,}1817) = 0{,}1686 \end{cases}$$

Отсюда $\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$

Таким образом $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ при $x = 0{,}2$. По этой же схеме находим y_2 и т.д. процесс вычисления ведем по схеме:

x	***y***	***k***	***Δy***
$x_0 = 0$ $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + \frac{h}{2} = 0{,}1$ $x_0 + h = 0{,}2$	$y_0 = 1$ $y_0 + \frac{k_1}{2} = 1{,}1$ $y_0 + \frac{k_2}{2}\ 1{,}0918$ $y_0 + k_3 = 1{,}1817$	$k_1 = 0{,}2$ $k_2 = 0{,}1838$ $k_3 = 0{,}1817$ $k_4 = 0{,}1686$	$\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 0{,}1832$
$x_1 = 0{,}2$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}3$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0{,}3$ $x_1 + h = 0{,}4$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}1832$ $y_1 + \frac{k_1}{2} = 1{,}2677$ $y_1 + \frac{k_2}{2} = 1{,}2626$ $y_1 + k_3 = 1{,}3407$	$k_1 = 0{,}1690$ $k_2 = 0{,}1589$ $k_3 = 0{,}1575$ $k_4 = 0{,}1488$	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 1{,}1584$
x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	k_1	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
....	....	....	....

Содержание заданий

1 По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $y' = y - x^2$ на промежутке [1; 2], при начальном условии *y(1) = 0*, принимая *h = 0,1*. В первых пяти точках.

2 По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $4y' = y^2 + 4x^2$ на промежутке [0; 1], при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Вычисление вести с тремя верными знаками.

3 По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $y' = \frac{x}{y} + 0{,}5y$ на промежутке [0; 1], при начальном условии *y(0) = 1*, принимая *h = 0,1*. Вычисление вести с двумя верными знаками.

4 Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке [a;b] при заданном начальном условии $y(a) = y_0$ методом Рунге-Кутта и шаге интегрирования h:

а) с применением «ручных» вычислений с шагом 2h.

б) с помощью программы для компьютера с шагом h.

№	*f(x)*	*a*	*b*	y_0	*h*
1	$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$	3	5	1	0.2
2	$y' = \frac{y}{x} - 1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy' + (x - 2y) = 0$	0	2	0	0.2
4	$(x - y)y - x^2 y' = 0$	1	3	1	0.2
5	$xy' - y = y^3$	0	2	0	0.2
6	$xyy' = 1 - x^2$	1	3	1	0.2
7	$yy' + x = 1$	0.5	2.5	0	0.2
8	$y - xy' = 1 + x^2 y'$	0.2	2.2	1	0.2

9	$xy+(x+1)y'=0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy'+y^2=2$	3	5	1	0.2
11	$(xy-x^2)y'=y^2$	0.2	2.4	1	0.2
12	$y-xy'=x+yy'$	1	3	0	0.2
13	$y+2=(2x+y-4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x-1)y'+y^2=0$	1.5	3,5	0	0.2
15	$xy'+2y=2xyy'$	2.1	4.1	0	0.2

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Контрольные вопросы

1 Что является решением дифференциального уравнения?

2 На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?

3 В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?

4 В чем основная идея метода Рунге-Кутта?

5 В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутта?

РАЗДЕЛ 7 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Тема 7.1 Численное решение задач оптимизации

Практическое занятие 19, 20 Задачи на экстремум (2ч)

Цель:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- получить умения нахождение экстремумов функций одной переменной и двух переменных приближенными методами.

Студент должен:

Знать:

- методы минимизации функций одной и двух переменных;
- многомерные методы оптимизации;

Уметь:

- находить экстремумы функций одной переменной приближенными методами;
- находить экстремумы функций двух переменных приближенными методами.

Краткие теоретические сведения

Численные методы поиска экстремумов функций одной переменной

Как было уже сказано, в общем случае функция $f(x)$ $(x \in X)$ может иметь несколько экстремумов (минимумов или максимумов). Задача поиска экстремумов сводится к их локализации и уточнению значений x и $f(x)$ в точке экстремума. Все рассмотренные ниже численные методы предполагают, что локализация экстремумов каким-либо образом произведена (например, графически или аналитически) и задача численных методов будет состоять в уточнении полученных результатов с заданной точностью ε. В дальнейшем для функций одной переменной под экстремумом будем подразумевать минимум $f(x)$. Будем считать, что $x \in$[a,b], где a и b границы интервала поиска. В пределах отрезка [a,b] функция $f(x)$ необязательно непрерывная, могут существовать разрывы первого рода. Достаточно чтобы функция $f(x)$ на отрезке [a, b] была унимодальной, то есть, содержащей на указанном отрезке один минимум.

Метод равномерного поиска.

Этот метод основан на том, что переменной x присваиваются значения $x_i = x_0 + ih$ с шагом h =const (шагом поиска), где i=0,1,2,… и вычисляются значения $f(x)$ в соседних точках. Если $f(x_{i+1}) \le f(x_i)$, то переменной x дается новое приращение. Как только становится $f(x_{i+1}) > f(x_i)$, поиск останавливается и предпоследняя точка считается ответом.

Выбор x_0 (начального значения переменной x) определяется пользователем. Шаг поиска - фактическая погрешность определения результата. При поиске решения на отрезке, обычно в качестве начального приближения берут один из его концов, а при изменении переменной x предусматривается проверка на выход ее за границу отрезка.

Метод поразрядного приближения

является разновидностью метода равномерного поиска и реализуется следующим образом:

1 Задаем начальное приближение $x = x_0$ слева от минимума функции $f(x)$ и вычисляем $f(x_0)$, задаем начальный шаг поиска h (выбирается

вычислителем), точность ε определения результата поиска (для переменной x), берем i=0.

2 Задаем $x_{i+1} = x_i + h$ и вычисляем $f(x_{i+1})$.

3 Проверяем условие $f(x_{i+1}) \le f(x_i)$, если оно выполняется, то идем к пункту 2, увеличивая i на 1.

4 Проверяем условие |h| ≥ ε. Если оно выполняется, полагаем h = -h/10, увеличиваем i на 1 и идем к пункту 2, т.е. обеспечиваем поиск минимума в другом направлении с шагом h/10.

5 Выводим на печать полученное значение для переменной x и функции $f(x)$.

Метод деления отрезка пополам (или метод дихотомии).

Поиск минимума $f(x)$ на отрезке [a, b] на каждом шаге начинается с выбора двух точек $x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}$ и $x_2 = \frac{a+b+\delta}{2}$, где δ >0-постоянная, являющаяся параметром метода. Величина δ выбирается вычислителем и может определяться целесообразным количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x. Точки x_1 и x_2 расположены симметрично на [a, b] относительно его середины и при малых δ делят его почти пополам. Уточняем положение экстремума с заданной точностью ε.

Метод реализуется следующим алгоритмом:

1 Проверяем условие |b-a|<ε. Если условие выполняется, идем к пункту 6.

2 Делим интервал поиска [a, b] точками $x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}$ и $x_2 = \frac{a+b+\delta}{2}$.

3 Для значений x_1 и x_2 вычисляем $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

4 Проверяем условие $f(x_2) < f(x_1)$. Если оно выполняется, полагаем $a = x_1$ и идем к пункту 1.

5 Полагаем $b = x_2$ и идем к пункту 1.

6 Выводим на печать $x = \frac{a+b}{2}$ и $f(x)$.

Метод квадратичной интерполяции

Этот метод основан на замене $f(x)$ в промежутке $x_0 \pm h$ квадратичной параболой, экстремум которой вычисляется аналитически. После приближенного нахождения экстремума x^* (максимума или минимума) можно задать $x_0 = x^*$ и повторить поиск. Таким образом, с помощью итерационной процедуры значение x^* уточняется до получения его с заданной точностью ε.

Алгоритм метода следующий:

1 Задаем начальное приближение x_0 для x^* и вычисляем два смежных значения аргумента $f(x)$ $x_1 = x_0 - h$ и $x_2 = x_0 + h$, где h-полуинтервал поиска.

2 Вычисляем три значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

3 Находим коэффициенты параболы a, b, c (считая, что $f(x)$ на указанном отрезке представляет собой параболу $ax^2 + bx + c$) и по найденным коэффициентам вычисляем положение экстремума $x^* = -\dfrac{b}{2a}$.

4 Проверяем условие $|x^*-x_0|<\varepsilon$. Если условие не выполняется, задаем $x_0=x^*$ и идем к пункту 1. Если выполняется, считаем x^* найденным с заданной точностью ε, идем к пункту 5.

5 Выводим на печать x^* и $f(x^*)$.

Метод золотого сечения

Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.

Золотое сечение отрезка [a, b] производится двумя точками $x_1 = a + (1-k)(b-a)$ и $x_2 = a + k(b-a)$, где $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$.

Точки x_1 и x_2 расположены симметрично относительно середины отрезка и выполняется

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a} \quad \text{и} \quad \frac{b-a}{x_2-a}=\frac{x_2-a}{b-x_2}.$$

Упражнение 6. Точка x_1 в свою очередь производит золотое сечение отрезка [a, x_2]. Аналогично точка x_2 производит золотое сечение отрезка [x_1, b]. Доказать это.

Опираясь на это свойство золотого сечения, предложен следующий метод минимизации унимодальной функции $f(x)$ на отрезке [a, b]. Его суть - деление интервала поиска минимума по правилу золотого сечения, вычисление значения $f(x)$ в точках деления, сравнение значений и отбрасывание той части интервала, на которой заведомо отсутствует минимум. Точка x_1 производит золотое сечение [a, x_2], точка x_2 - золотое сечение отрезка [x_1, b]. Поэтому на оставшемся интервале нужно определить одну точку, производящую золотое сечение. Процесс деления продолжают до тех пор, пока длина интервала неопределенности не станет меньше заданной точности ε. На каждом шаге длина нового интервала неопределенности равна 0,618 длины старого интервала и на каждом шаге вычисляется лишь одно значение $f(x)$, а не два, как в методе деления отрезка пополам.

Сравнение методов одномерной оптимизации показывает, что в большинстве случаев для гладких $f(x)$ метод квадратичной интерполяции дает заметный выигрыш во времени. При сложных $f(x)$ метод золотого сечения может давать существенный выигрыш во времени. Метод квадратичной интерполяции удобен тем, что обнаруживает как максимумы, так и минимумы $f(x)$, причем даже за пределами первоначально заданного интервала поиска.

Численные методы поиска экстремумов функций многих переменных

Наибольшие трудности поиска минимума функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ возникают, когда размерность n вектора **x** велика. Поэтому важнейшей является проблема уменьшения размерности вектора минимизируемой функции на этапе построения математической модели решаемой задачи. В модели следует сохранить только те переменные x_i, которые сильнее других влияют на изменение рассматриваемой функции.

Метод координатного спуска

Идея всех методов спуска состоит в том, чтобы исходя из начального приближения - точки

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in$ D^n (D^n - область определения функции) перейти в следующую точку

$x^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1) \in$ D так, чтобы значение $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ уменьшилось, т.е. $f(x^0) > f(x^1)$.

Рассматриваем функцию $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ при фиксированных значениях $x_2^0, ..., x_n^0$ как функцию одной переменной x_1. Находим одним из описанных выше методов $\min\limits_{x \in D} f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$. Значение x_1 доставляющий минимум обозначаем x_1^1.

$f(x_1^1, x_2^0, ..., x_n^0) \leq f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

После нахождения точки минимума по координате x_1 переходим к нахождению минимума по координате x_2 от новой точки и так далее по всем оставшимся координатам.

Для гладких функций погрешность вычислений в данном методе складывается из погрешностей при вычислении минимума по каждой переменной, хотя для некоторых функций специального вида погрешность может быть и очень велика.

Центральным звеном рассматриваемого алгоритма является поиск минимума функции одной переменной. Методы применимые к этому случаю рассмотрены выше.

Градиентный метод

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на D^n, а $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X \equiv D^n$

В основе градиентного метода минимизации (максимизации) функций многих переменных лежит следующее замечательное свойство градиента: при $f'(x) \neq 0$ направление наибыстрейшего возрастания функции $f(x)$ в точке x совпадает с направлением градиента $f'(x)$, а направление наибыстрейшего убывания - с направлением антиградиента $(-f'(x))$.

Это метод, как и все итерационные методы, предполагает выбор начального приближения - некоторой точки x_0. Общих правил выбора точки x_0 в градиентном методе, как, впрочем, и в других методах, к сожалению, нет. В тех случаях, когда из геометрических, физических или каких-либо других соображений может быть получена априорная информация об области расположения точки (или точек минимума), то начальное приближение стараются выбрать поближе к этой области.

Пусть x_0 выбрано. Тогда градиентный метод заключается в построении последовательности $\{x_k\}$ по правилу $x_{k+1} = x_k - h_k f'(x_k)$, $h_k > 0$, $k = 0,1,2,...$.

h_k - длина шага или просто шаг градиентного метода.

Если $f'(x_k) \neq 0$, то шаг h_k можно выбрать так, чтобы $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Если $f'(x_k) = 0$, то x_k - точка минимума функции $f(x)$. В этом случае итерационный процесс прекращается.

Существуют различные способы выбора величины h_k в градиентном методе. В зависимости от способа выбора h_k можно получить различные варианты градиентного метода.

На луче, направленном по антиградиенту, введем функцию одной переменной $g_k(h) = f(x_k - hf'(x_k))$, $h \geq 0$ и определим h_k из условий $g_k(h_k) = \min g_k(h)$.

Этот метод принято называть методом наискорейшего спуска. На практике итерации продолжают до тех пор, пока не будет выполнен некоторый критерий окончания счета

$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$, или $|f(x_{k+1})-f(x_k)|<\delta$, или $|f'(x_k)|<\gamma$, где $\varepsilon,\delta,\gamma$ - заданные числа.

Теоретические исследования и численные эксперименты подтверждают, что метод наискорейшего спуска и другие варианты градиентного метода медленно сходятся в тех случаях, когда поверхности уровня функции $f(x)$ сильно вытянуты и функция имеет так называемый овражный характер. Для ускорения сходимости к решению в таких случаях предлагается исследовать овражный метод.

Содержание заданий

Используя приближенные методы найти минимум следующих функций

1. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.
2. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.
3. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
4. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
5. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
6. $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.
7. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
8. $z = y^2 - 6xy + x^3 - 39x + 18y + 20$.
9. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.
10. $z = 6y - x - y^2 + y\sqrt{x}$.
11. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
12. $z = xy^2(1 - x - y)$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ

Основная литература:

1 Зенков, А. В. Численные методы [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А. В. Зенков. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 122 с. Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

2 Численные методы и программирование: Учебное пособие / Колдаев В.Д.; Под ред. Гагариной Л.Г. - М.:ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 336 с

Интернет –ресурсы:

3 Белых С.В. Карманный справочник по математике [Электронный ресурс]. - Ростов н/Д: Феникс, 2013. - Изд. 2-е. - 224 с. - Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

4 Единое окно доступа к информационным ресурсам. Раздел «Вычислительная математика, численные методы и математическое программирование». Режим доступа: http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr:2.2.74.12.57

5 Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru/collection/matematika

6 Портал Allmath.ru — Вся математика в одном месте – Режим доступа: http://www.allmath.ru

7 Портал Math.ru: библиотека, медиатека, олимпиады, задачи, научные школы,учительская, история математики – Режим доступа: http://www.math.ru

8 Прикладная математика: справочник математических формул, примеры и задачи с решениями – Режим доступа: http://www.pm298.ru

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изме-нения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				