Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Старорусский политехнический колледж (филиал)

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ЧАСТЬ I

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 09.02.03Программирование в компьютерных системах

Квалификация техник - программист

Рассмотрены и утверждены
Методическим советом колледжа
(протокол № 1 от 30.08.2018 г)

Разработчик:

Елисеева Т.Е. , преподаватель математики высшей квалификационной категории

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по практическим занятиям (часть I), являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине Элементы высшей математики составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах;
2 Рабочей программой учебной дисциплины;
3 Аннотацией основной профессиональной образовательной программы по специальности СПО 09.02.03 Программирование в компьютерных системах базовой подготовки;
4 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 11 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины в объёме 22 часов.

Перед практическим занятием следует изучить соответствующий теоретический материал и разобраться в решении примеров, приведенных в практикуме. Это позволит выполнить большее количество упражнений на практическом занятии, получить консультацию по вопросам и примерам, вызвавшим затруднение.

Основные теоретические положения включают определения, основные теоремы, формулы, знание которых необходимо для решения упражнений по данной теме. Это позволяет использовать методические рекомендации, не прибегая к учебникам. Затем на примерах, в процессе решения типовых задач, иллюстрируются методы их решения. Иногда даются несколько способов решения одной и той же задачи для сравнения эффективности методов.

Задания содержат упражнения разного уровня сложности на отработку понятий и методов решения задач. Количество упражнений значительно превышает необходимый минимум для усвоения материала, что позволяет использовать личностно-ориентированную технологию обучения и применять различные формы организации занятий: фронтальную, индивидуальную, групповую.

После практических занятий проводятся проверочные работы, представленные в методических рекомендациях по оценке качества подготовки обучающихся. Они позволяют выявить уровень усвоения пройденного материала.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен:

уметь:

– выполнять действия над матрицами и решать системы уравнений;
– решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
– применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
– решать дифференциальные уравнения;
– пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

знать:

– основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
– основы дифференциального и интегрального исчисления;
– основы теории комплексных чисел.

Перечень формируемых компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Тематический план и содержание учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект) *(если предусмотрены)*	Объем часов	Уровень освоения
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1 Элементы линейной алгебры		**26**	
Тема 1.1 Матрицы и определители	**Содержание учебного материала**	4	
	Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами, свойства действий. Определители, миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей. Теорема Лапласа. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы.		2
	Практические занятия Матрицы и определители – выполнение действий над матрицами;	4	

	– вычисление определителей, алгебраических дополнений. Обратная матрица. Ранг матрицы – нахождение обратной матрицы; – вычисление ранга матрицы.		
	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала	2	
Тема 1.2 **Системы линейных уравнений и методы их решений**	**Содержание учебного материала**	4	
	Системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера – Капелли. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений метод обратной матрицы, метод Крамера, метод Гаусса.		2
	Практические занятия: Методы решения систем линейных уравнений – решение систем линейных уравнений методом Крамера; – решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы; – решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение задач линейной алгебры в пакете MathCad	6	

	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала Знакомство с пакетом MathCad. Основные приемы работы.	6	
Раздел 2 **Элементы векторной алгебры**		**8**	
Тема 2.1 **Основы алгебры векторов**	**Содержание учебного материала**	4	
	Вектор. Линейные операции с векторами, свойства векторных операций. Координаты вектора. Действия над векторами, заданными в координатной форме. Длина вектора. Скалярное произведение векторов и его свойства.		2
	Практические занятия Действия над векторами – выполнение действий над векторами в координатной форме; – вычисление длины вектора; – нахождение скалярного произведения, вычисление угла между векторами.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся:	2	

	Проработка теоретического и практического материала		
Раздел 3 **Элементы аналитической геометрии**		**19**	
Тема 3.1 **Прямая на плоскости**	**Содержание учебного материала**	4	
	Прямая на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Критерии параллельности и перпендикулярности двух прямых.		2
	Практические занятия Прямая линия на плоскости – составление уравнений прямой линии на плоскости; – нахождение угла между прямыми линиями и определение их взаимного расположения.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала	2	
Тема 3.2 **Кривые второго**	**Содержание учебного материала**	4	
	Кривые второго порядка. Канонические уравнения окружности, эллипса,		2

порядка	гиперболы и параболы.		
	Практические занятия Кривые второго порядка – составление уравнений кривых второго порядка; – построение кривых по заданным уравнениям Решение задач векторной алгебры и аналитической геометрии в MathCad.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Парабола. Исследование формы параболы по каноническому уравнению. Конспект темы. Решение упражнений по теме.	3	
Раздел 4 **Основы теории комплексных чисел**		**10**	
Тема 4.1 **Комплексные числа**	**Содержание учебного материала**	4	
	Комплексные числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.		2

	Практические занятия Действия над комплексными числами – выполнение действий над комплексными числами в алгебраической форме; – выполнение действий над комплексными числами в тригонометрической форме; – выполнение действий над комплексными числами в показательной форме. Решение задач теории комплексных чисел в MathCad.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме. Конспект темы.	2	
	Всего:	**63**	

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие 1 Матрицы и определители (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о матрицах, определителях и операциях над ними.
- формирование умений по выполнению действий над матрицами, вычислению определителей, алгебраических дополнений.

Студент должен

Знать:

- определение матрицы, действий над матрицами;
- определение определителя, минора, алгебраического дополнения, правила их вычисления

Уметь:

- выполнять действия над матрицами;
- вычислять определители, миноры и алгебраические дополнения.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1 При умножении матрицы A на число λ все числа, составляющие матрицу А, умножаются на число λ.

2 Матрицы одинакового размера складываются (вычитаются поэлементно).

3 *Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов n матрицы А равно числу строк матрицы В.*

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов *i-ой* строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}\,,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\,.$$

4 ***Транспонирование матрицы*** - преобразование, при котором строки и столбцы матрицы меняются местами с сохранением порядка.

5 ***Целой положительной степенью*** A^m ($m>1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е.

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ раз}.$$

Определителем матрицы второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}=c_{11}c_{22}c_{33}+c_{12}c_{23}c_{31}+c_{21}c_{32}c_{13}-c_{13}c_{22}c_{31}-c_{12}c_{21}c_{33}-c_{23}c_{32}c_{11}.$$

Эту формулу легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется ***правилом треугольников*** или ***правилом Сарруса***.

+ —

Рисунок 1 - Схема правила треугольников

Для вычисления определителей более высоких порядков используют другие формулы.

Пусть дана квадратная матрица ***A n***-го порядка.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ ***элемента*** $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы ***n***-го порядка называется определитель матрицы *(n-1)*-го порядка, полученной из матрицы ***A*** вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

***Теорема Лапласа*:** Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Рекомендации по выполнению заданий

Прежде чем выполнять задания по теме, необходимо изучить теоретический материал, разобраться в решении примеров и задач, приведенных ниже. Решение упражнений приводить подробно, вычисления записывать в определенном порядке, доводя до конца, в тетради для практических работ.

Пример1 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \lambda=5$. Найти λA.

Решение: $5A=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 15 & 20\end{pmatrix}$.

Пример 2 $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$. Найти A+B.

Решение: $A+B=\begin{pmatrix}2+0 & 3+1 & 0+4\\ -1+2 & 5+(-4) & -4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 4\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Пример 3 Найти разность матриц $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -1 & 0 & -5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 6 & -1\end{pmatrix}$.

Решение: $A-B=\begin{pmatrix}1-0 & -3-1 & 2-2\\ -1-2 & 0-6 & -5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -3 & -6 & -6\end{pmatrix}$.

Пример 4 Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & -3\\ 4 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -4\\ 6 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & -3\\ 4 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & -4\\ 6 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot1+3\cdot6+4\cdot(-3) & 1\cdot5+2\cdot(-4)+3\cdot2+4\cdot(-1)\\ 2\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot6+(-3)\cdot(-3) & 2\cdot5+1\cdot(-4)+(-1)\cdot2+(-3)\cdot(-1)\\ 4\cdot3+(-2)\cdot1+3\cdot6+1\cdot(-3) & 4\cdot5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -1\\ 10 & 7\\ 25 & 33\end{pmatrix}.$$

Пример 5 $\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Протранспонировать матрицу A.

Решение: $\underset{3\times2}{A}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ -6 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 6 Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 7\end{pmatrix}$.

Решение: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 14 - 4 = -18$.

Пример 7 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 =$$
$$= 4 + 4 + 9 - 24 + 6 + 1 = 0.$$

Пример 8 Найти все алгебраические дополнения матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-6) = 6$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 3 - 1 \cdot 5) = 11;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6) - 0 \cdot 5 = 12;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -((-3) \cdot 3 - 4 \cdot (-6)) = -15;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = -17;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-6) - (-3) \cdot 5) = -9;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - (-3) \cdot (-2)) = -9;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-3) \cdot (-2) = -6.$$

Пример 9 Вычислить определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, выполнив разложение по элементам какого-либо столбца или строки.

Решение:

1 способ: Разложим определитель по элементам 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 27;$$

2 способ:

Произведём следующие действия:

1) к элементам 2-ой строки прибавим удвоенные элементы 1-ой строки;
2) из элементов 4-ой строки вычтем утроенные элементы 1-ой строки;
3) применим теорему Лапласа, выполнив разложение по элементам первого столбца;
4) вычтем из элементов 1-ой строки матрицы третьего порядка удвоенные элементы 2-ой строки и прибавим к элементам 3-ей строки элементы 2-ой строки.

Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -13 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} = 27.$$

Содержание заданий

Выполните действия над матрицами

1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}};$

2 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

4 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} - 4\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

5 $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

6 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{T}.$

Вычислите определители второго порядка

7 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix};$

8 $\begin{vmatrix} a^{0.5} & -1 \\ a & a^{0.5} \end{vmatrix};$

9 $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix};$

10 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix};$

11 $\begin{vmatrix} -6 & -10 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};$

12 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & \grave{a} \end{vmatrix};$

13 $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix};$

14 $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}.$

Вычислите определители, используя правило треугольников, и все алгебраические дополнения матриц.

15 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix};$

16 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix};$

17 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix};$

18 $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};$

19 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix};$

20 $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$

Вычислите определители, используя разложение его по элементам какой-либо строки (столбца)

21 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **22** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 17 & -7 \end{vmatrix}$; **23** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$;

24 $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$; **25** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; **26** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

27 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; **28** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; **29** $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \end{vmatrix}$;

30 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; **31** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **32** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 2 Обратная матрица. Ранг матрицы (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об обратной матрице, ранге матрицы.
- формирование умений по вычислению обратной матрицы, ранга матрицы

Студент должен

*Знать***:**

- определение обратной матрицы, метод ее вычисления;
- понятие ранга матрицы, способы его вычисления.

Уметь:

– вычислять обратную матрицу

– ранг матрицы, используя элементарные преобразования.

Средства обучения: доска, мел.

Краткие теоретические сведения

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E .$$

Обратная матрица A^{-1} существует и единственная тогда и только тогда когда исходная матрица невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$).

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Пусть дана матрица A.

1 Находим $|A|$. Если $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}.

2 Находим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A и составляем из них присоединённую матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3 Вычисляем A^{-1} по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \ (|A| \neq 0)$.

4 Проверяем правильность вычисления обратной матрицей A^{-1} по определению:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \text{ (не обязательно).}$$

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

1 Ранг матрицы $\underset{m\times n}{A}$ не превосходит меньшего из её линейных размеров, т.е.

$$r(A) \le min(m;n).$$

2 $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A=0$.

3 Для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда A – невырожденная т.е. $|A| \ne 0$.

Элементарными преобразованиями называют:

1 Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2 Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3 Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4 Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) другой строки (столбца), умноженной на любое число, не равное нулю.

5 Транспонирование матрицы.

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{2r} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{rr} & a_{rk} \end{vmatrix}.$$

Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти матрицу, обратную данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: 1 Вычислим определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$.

2 Найдем все алгебраические дополнения матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-3) = 3; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

3 Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Пример 2 Найти матрицу, обратную данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: 1 Найдем определитель матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot (-3) = 6 + 4 + 1 = 11.$$

2 Найдем все алгебраические дополнения матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

3 Найдем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{5}{11}\\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}.$$

Пример 3 Определить ранг матрицы

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: Исключим из матрицы нулевой столбец, и вычтем из третьей строки первую, умноженную на два.

Получим

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид. Поэтому ранг полученной ступенчатой матрицы, а, следовательно, и данной, равен числу ее не нулевых строк, т. е. равен 2: $r\ (A) = 2$.

Пример 4 Определить ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение: Произведем следующее действия:

1 Поменяем местами первую и вторую строки;

2 Из элементов второй строки вычтем утроенные элементы первой строки и из элементов третьей строки элементы первой;

3 К элементам третьей строки прибавим элементы второй строки:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица ступенчатая, следовательно, ее ранг, как и ранг данной матрицы равен 2: $r\ (A) = 2$.

Содержание заданий

Найдите матрицы, обратные данным

1 $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; **2** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **3** $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$;

4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **5** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **6** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

7 $\begin{pmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; **8** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **9** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдите матрицу X из уравнения

10 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$;

11 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

12 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

13 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -16 \\ 2 & 17 & 22 \end{pmatrix}$.

Определите ранг матрицы

14 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **15** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; **16** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$;

17 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; **18** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; **19** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

20 $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; **21** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; **22** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$;

$$\mathbf{23}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & 12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \quad \mathbf{24}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{25}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие 3, 4 Методы решения систем линейных уравнений (4ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о системах линейных уравнений, методах их решения.
- формирование умений по решению систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса.

Студент должен

*Знать***:**

- способы решения систем линейных уравнений.

Уметь:

- решать системы линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса.

Средства обучения: доска, мел.

Краткие теоретические сведения

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В матричной форме система имеет вид:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь A - матрица системы, X - матрица – столбец неизвестных, B - матрица – столбец свободных членов.

Если в системе линейных уравнений $\Delta = \det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по ***формулам Крамера***:

$$x_i = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; (j = 1, \ldots, n),$$

где Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Если система записана в матричной форме $AX=B$, то её решение находится ***методом обратной матрицы*** по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Методом Гаусса можно решить любую систему уравнений общего вида. Для этого составляют расширенную матрицу системы (***A*/*B*)**, приписывая к матрице ***A*** столбец свободных членов ***B***, и с помощью элементарных преобразований приводят систему к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения неизвестных: начиная с последних переменных, находят все остальные.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение: Запишем систему уравнений в матричной форме.

$$A \cdot X = B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Для этого вычислим определитель матрицы A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0$ - следовательно матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения матрицы A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $\qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$ $\qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$ $\qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $\qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$ $\qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$ $\qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 11\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Пример 3 Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+4x_3=1,\\ x_1-2x_2+4x_3=3,\\ 3x_1-x_2+5x_3=2.\end{cases}$$

Решение: Найдем определитель системы:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=-20-3-48+18+8+20=-25.$$

Так как $|\grave{A}|\neq 0$, то по теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители матриц Δ_1, Δ_2, Δ_3, полученных из матрицы ***A***, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -4 & 3\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=-10-9-32+12+4+60=25;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}=30+6+12-27-16-5=0;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=--8-1-36+6+6+8=-25.$$

Теперь по формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{25}{-25}=-1; \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{-25}=0; \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-25}{-25}=1,$$

т. е. решение системы (-1; 0; 1).

Пример 4 Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=-9,\\ x_1-x_2+3x_3=2,\\ 3x_1-6x_2-x_3=25.\end{cases}$$

Решение: Подвергнем преобразованию расширенную матрицу данной системы. Вычтем из элементов второй строки соответствующие элементы первой строки, а из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на 3, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Используя полученную матрицу, выписываем преобразованную систему.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 + 2x_3 = 11, \\ \qquad\quad -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Система уравнений приняла треугольный вид. Из последнего уравнения имеем $x_3 = -1$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x_2 = -3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x_1 = 2$.

Итак, решение системы (2; -3; -1).

Содержание заданий

Решить системы уравнений методом обратной матрицы

1 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -11. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Крамера

7 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

9 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

11 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Гаусса

13 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

14 $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

17 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$

18 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 5 Решение задач линейной алгебры в пакете MathCad (2ч.)

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач линейной алгебры. Приобретение навыков решения систем линейных уравнений и выполнения действий над матрицами средствами пакета.

Студент должен

*Знать***:**

- определение матрицы, действий над матрицами;
- определение определителя, минора, алгебраического дополнения, правила их вычисления
- определение обратной матрицы, метод ее вычисления;
- понятие ранга матрицы, способы его вычисления.
- методы решения систем линейных уравнений.

Уметь:

- выполнять действия над матрицами;
- вычислять определители, миноры и алгебраические дополнения;
- вычислять обратную матрицу;
- вычислять ранг матрицы, используя элементарные преобразования;
- решать системы линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы, методом Гаусса.

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Краткие теоретические сведения

1 Начало работы

Запуск приложения *MathCAD* осуществляется командой

ПУСК→ Программы→ MathSoft→ MathCAD (рисунок 2).

Рисунок 2- Запуск приложения

2 Начало работы с матрицами

Чтобы начать работу с матрицами на панели математических инструментов Math (Математика) (рисунок 3), необходимо активизировать панель операций с матрицами и векторами Matrix (Матрицы) (рисунок 4)

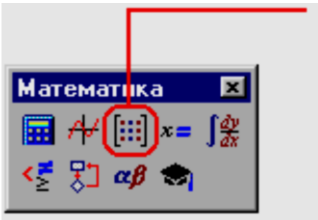


Рисунок 3- Панель Математика

Рисунок 4 – Панель Матрицы

3 Рассмотрим более подробно **панель Matrix** (Матрицы) (рисунок 5)

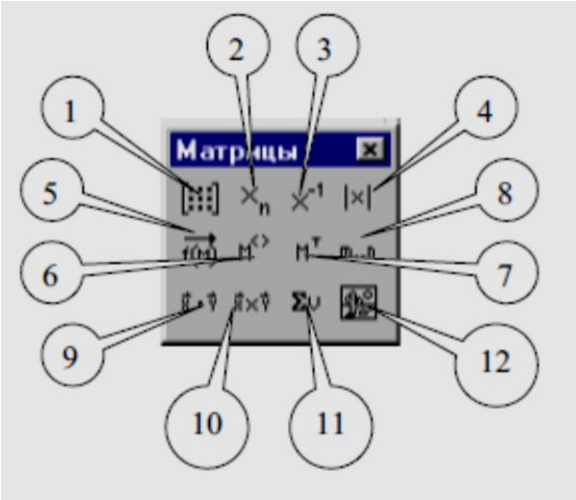


Рисунок 5 - Панель Матрицы

1 Создать матрицу или вектор.

2 Вставка нижнего индекса матрицы.

3 Инверсия матрицы (обратная матрица).

4 Вычисление определителя матрицы

5 Задать вектор.

6 Столбец матрицы.

7 Транспонирование матрицы.

8 Задать диапазон дискретной величины.

9 Скалярное произведение векторов.

10 Векторное произведение векторов.

11 Сумма элементов вектора.

12 Вставка изображения.

4 Создание матрицы

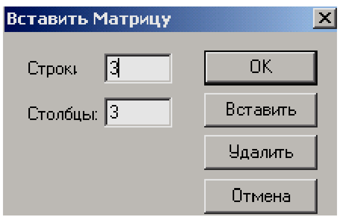
В том месте рабочего окна, в котором хотите создать матрицу введите обозначение матрицы (например, А), и оператор присваивания **:=** .

Активизировать кнопку 1  под названием Insert Matrix (Создать матрицу или вектор).

В появившемся диалоговом окне (рисунок 6) ввести количество строк (*Rows*) и количество столбцов (*Columns*) для создаваемой матрицы. Например, количество строк 3, количество столбцов 3.

Нажать «*OK*».

После выполненных действий в рабочем окне документа появится матрица, в которую необходимо ввести требуемые значения. При введении значений можно использовать клавишу Tab (рисунок 7).



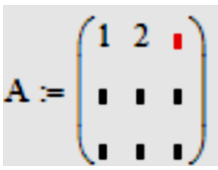


Рисунок 7 - Матрица

Рисунок 6 – Диалоговое окно

5 В *MathCAD* определены следующие **действия над матрицами**:

а) умножение матрицы на число

б) сложение – вычитание,

в) умножение матриц,

г) транспонирование,

д) вычисление определителя,

е) обращение,

ж) ранг матрицы.

6 Умножение матрицы на число

Для оператора умножения используют символ <*>.

7 Сложение (вычитание)

Для операторов сложения и вычитания используют символы <+>, <-> соответственно.

Матрицы должны иметь одинаковый размер, иначе будет выдано сообщение об ошибке.

8 Умножение матриц

При умножении следует помнить, что число столбцов первой матрицы должно быть равно числу строк второй матрицы.

Для оператора умножения используют символ <*>.

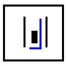
9 Транспонирование

Ввод оператора транспонирования  осуществляется с помощью панели инструментов Matrix (Матрица).

Для вставки символа транспонирования матрица должна находиться между линиями ввода.

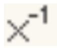
10 Вычисление определителя

Ввод оператора определителя  осуществляется с помощью панели инструментов Matrix (Матрица).

В пустой местозаполнитель  появившейся записи внести имя матрицы или матрицу и активизировать клавишу =.

11 Обратная матрица

Поиск обратной матрицы возможен, если исходная матрица квадратная и ее определитель не равен нулю.

Ввод оператора обратной матрицы  осуществляется с помощью панели инструментов Matrix (Матрица).

12 Ранг матрицы

Для вычисления ранга матрицы в MathCad предназначена функция rank(A), где A – матрица.

13 В *MathCAD* возможно решать **системы линейных уравнений**:

1 методом Крамера,

2 методом обратной матрицы,

3 методом Гаусса,

4 используя встроенную функцию lsolve,

5 используя вычислительный блок Given/Find.

14 Метод Крамера

1 Вычислить определитель матрицы и определить, является матрица вырожденной или невырожденной.

2 Вычислить определители матриц, получаемых путем замены каждого i-го столбца коэффициентов столбцом свободных членов.

3 Вычисление неизвестных по формулам Крамера.

15 Метод обратной матрицы

1 Запишите формулу решения системы матричным методом $X = A^{-1} \cdot B$, где X – матрица - столбец, состоящий из значений решения системы.

2 Для получения значений искомых переменных установите курсор правее или ниже данной формулы и напишите X =.

16 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

1 Ввод матрицы системы и матрицы – столбца свободных членов.

2 Формирование расширенной матрицы системы – функция augment(A,B).

3 Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду – функция rref (Ar)

4 Формирование столбца решения системы – функция submatrix(Ag,1,3,4,4)

17 Встроенная функция lsolve

1 Записывают формулу $X := lsolve(A, B)$, где переменная A обозначает матрицу системы, а переменная B обозначает матрицу свободных членов.

2 Для получения значений искомых переменных установите курсор правее или ниже данной формулы и напишите $X =$.

18 Вычислительный блок Given/Find

1 Задать начальные значения переменным, которые есть в уравнении.

2 Ввести ключевое слово *given* (дано), с которого начинается блок решений.

3 Записать уравнение, используя знак логического равенства между правой и левой частью уравнения из панели управления Evaluation (Выражения).

4 Ввести ключевое слово *find* (найти), которым заканчивается блок решений.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти $A \cdot C - B^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Введите матрицы A, B, C. Пример оформления решения в MathCad представлен на рисунке 8.

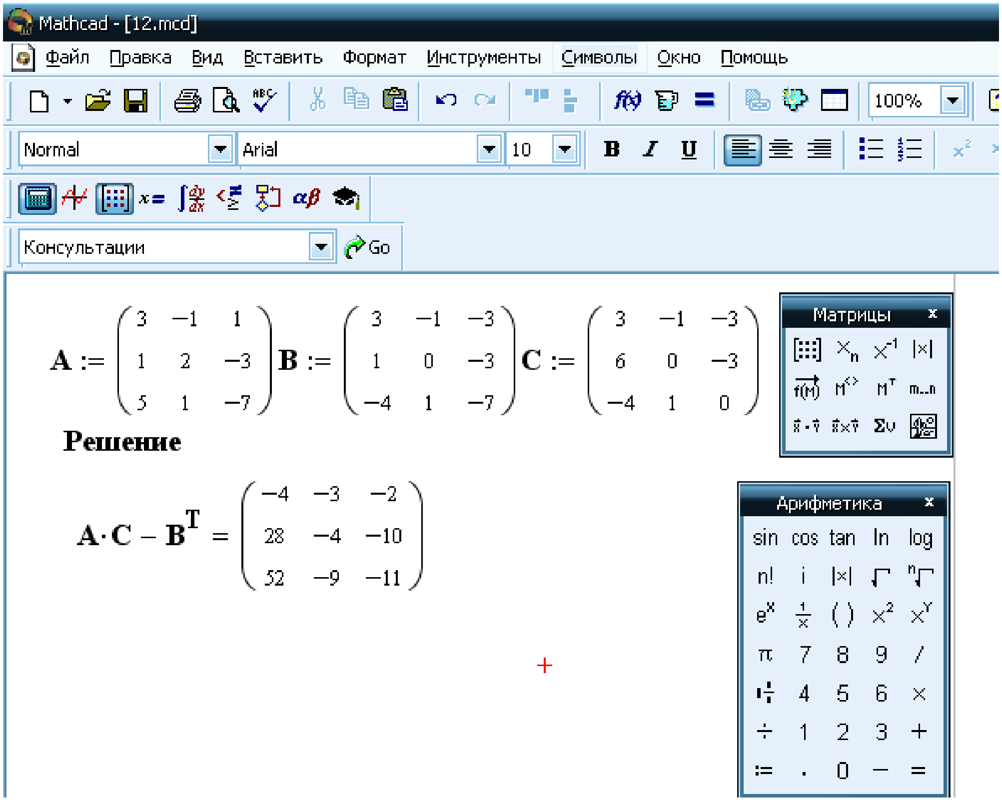


Рисунок 8 - Решение в MathCad

Пример 2 Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

1. Введите матрицу коэффициентов *A* при неизвестных *x*

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

2. Введите вектор *B* свободных членов

$$B := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Вычислите определитель матрицы A: $|A| = -34$
4. Введите матрицы A1, A2, A3, заменив коэффициенты при неизвестных x_{ij} на коэффициенты свободных членов

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad A3 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Введите формулы для вычисления корней уравнения:

$$X1 := \frac{|A1|}{|A|}$$

$$X2 := \frac{|A2|}{|A|}$$

$$X3 := \frac{|A3|}{|A|}$$

6. Выведите значения корней СЛУ
   X1=   X2=   X3=
7. Отображение результатов решения СЛУ:
   X1 = 1   X2 = 1   X2 = 1

Пример 3 Решить систему методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

1. Сформируйте матрицу A коэффициентов при неизвестных x_{1j} и вектор свободных членов B:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Решите систему, представив вектор неизвестных как произведение вектора свободных членов и обратной матрицы коэффициентов СЛУ
   $X_i := A^{-1} \cdot B$ X=

Пример 4 Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

1. Сформируйте матрицу A коэффициентов при неизвестных x и вектор B свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Вычислите определитель матрицы A: $|A| = -34$
3. Введите функцию: $P := \mathrm{augment}(A, B)$
4. Введите функцию: $R{:=}\mathrm{rref}(P)$
5. Введите: $X := R^{\langle 3 \rangle}$
6. Выведите результаты вычислений:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример5 Решить систему, используя встроенную функцию lsolve

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример оформления решения в MathCad представлен на рисунке 9.

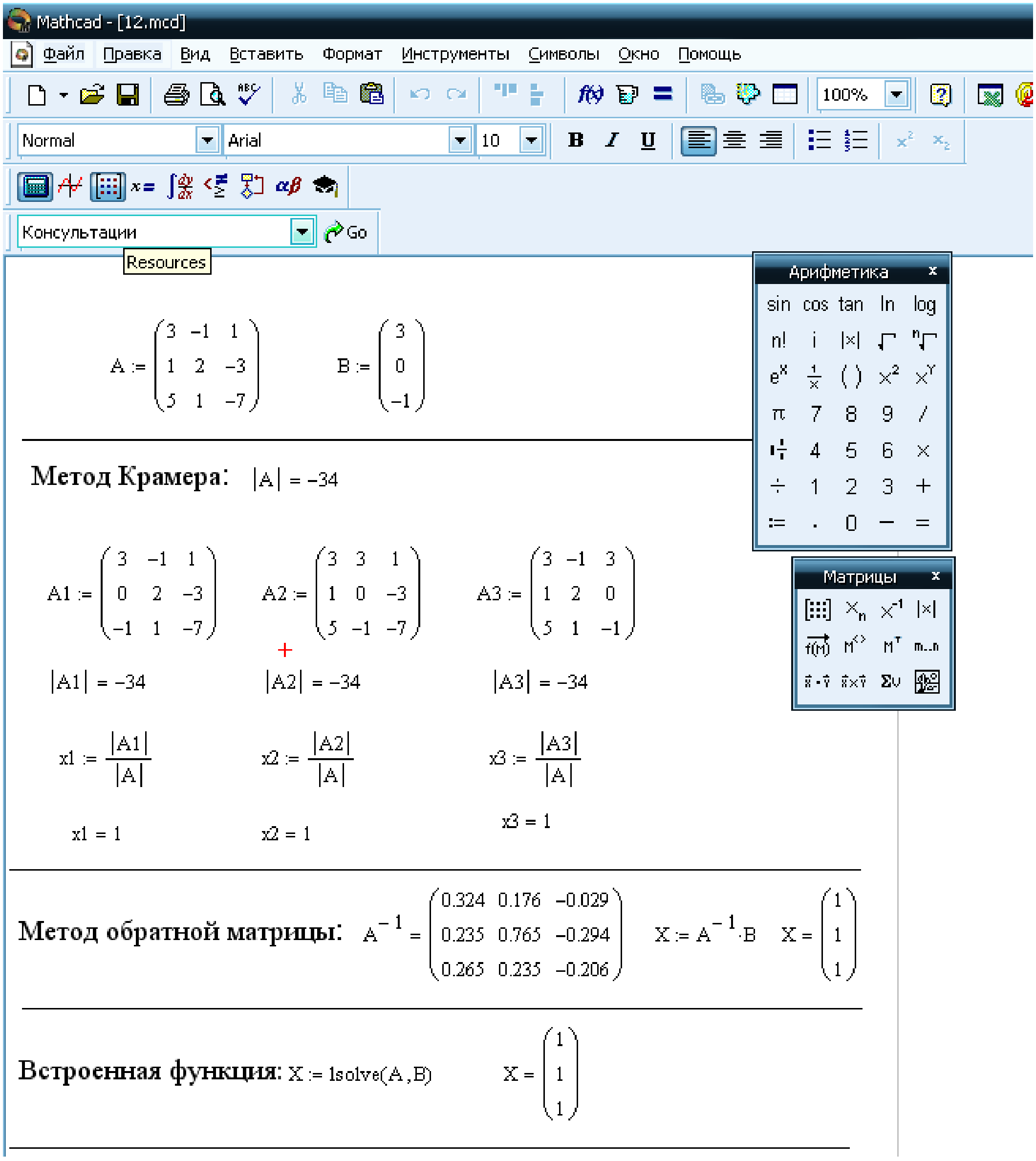


Рисунок 9 - Решение в MathCad

Содержание заданий

1 Выполнить действия над матрицами, вычислить определитель матрицы А и матрицы В.

2 Решить систему уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.

3 Решить систему уравнений методом Гаусса, используя встроенную функцию lsolve, используя блок Given/Find.

Вариант 1

1 $2\,(A+B)\,(2B-A)$, где $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&5&2\\-1&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&5\\0&1&3\\2&-2&4\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases}5x+8y-z=-7\\x+2y+3z=1\\2x-3y+2z=9\end{cases}$ **3** $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4\end{cases}$

Вариант 2

1 $3A-(A+2B)B$, где $A=\begin{pmatrix}4&5&-2\\3&-1&0\\4&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&3\\5&7&3\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases}x+2y+z=4\\3x-5y+3z=1\\2x+7y-z=8\end{cases}$ **3** $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6\\x_1-x_2-2x_3-3x_4=8\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8\end{cases}$

Вариант 3

1 $2(A-B)(A^2+B)$, где $A=\begin{pmatrix}5&1&7\\-10&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&1&0\\7&2&1\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases}3x+2y+z=5\\2x+3y+z=1\\2x+y+3z=11\end{cases}$ **3** $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1\\4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5\end{cases}$

Вариант 4

1 $(A^2-B^2)(A+B)$, где $A=\begin{pmatrix}7&2&0\\-7&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31\\5x_1+x_2+2x_3=29\\3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}$ **3** $\begin{cases}x_2-3x_3+4x_4=-5\\x_1-2x_3+3x_4=-4\\3x_1+2x_2-5x_4=12\\4x_1+3x_2-5x_3=5\end{cases}$

Вариант 5

1 $2\,(A+B)\,(2B-A)$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$
3 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$

Вариант 6

1) $(A-B)\,A+2B$, где $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
3 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 7

1 $2(A-0{,}5B)+AB$, где $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$
3 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 8

1 $(A-B)A+3B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$
3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

Вариант 9

1 $2A - (A^2 + B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$

Вариант 10

1 $3(A^2 - B^2) - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

Вариант 11

1 $(2A-B)(3A+B)-2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

Вариант 12

1 $A(A^2-B) - 2(B+A)B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Вариант 13

1 $3AB+(A-B)(A+2B)$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-7\\ 2x_1-x_2-x_3=0\\ x_1-2x_2-x_3=2\end{cases}$ **3** $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_4=-9\\ 3x_1-3x_2+x_3+4x_4=-7\\ 3x_1-2x_3+x_4=-16\\ x_1-4x_2+x_4=0\end{cases}$

Вариант 14

1 $2A(A+B)-3AB$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x-2y+3z=6\\ 2x+3y-4z=16\\ 3x-2y-5z=12\end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2x_1+x_3+4x_4=9\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5\\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1\end{cases}$

Вариант 15

1 $(3A+0.5)(2B-A)$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 3x+4y+2z=8\\ 2x-y-3z=-1\\ x+5y+z=0\end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4=12\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12\\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4\end{cases}$

Вариант 16

1 $2A^2-(A+B)(A-B)$, где $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7\\ x_1+3x_2-2x_3=0\\ 2x_2-x_3=2\end{cases}$ **3** 1) $\begin{cases} x_1+5x_2=2\\ 2x_1-x_2+3x_2+2x_4=4\\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6\end{cases}$

Вариант 17

1 $2AB + A(B-A)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

Вариант 18

1 $(A - B)(A + B) - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

Вариант 19

1 $(A + 2B)(3A - B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

Вариант 20

1 $A^2 - (A + B)\cdot(A - 3B)$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2 $\begin{cases} 11x + 3y - 3z = 2 \\ 2x + 5y - 5z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 2 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Тема 2.1 Основы алгебры векторов

Практическое занятие 6 Действия над векторами (2ч.)

Цель:

– обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о векторах, скалярном, векторном, смешанном произведениях и их свойствах.
– формирование умений по выполнению действий над векторами, вычислению скалярного, векторного, смешанного произведений векторов, использования свойств произведений.

Студент должен

*Знать***:**

– определение вектора, действий над векторами;
– свойства действий над векторами;
– понятие коллинеарности и компланарности векторов;
– понятие базиса, координат вектора, систем координат;
– правила действий над векторами, заданными координатами;
– скалярное произведение векторов, формулы для его вычисления, применение.

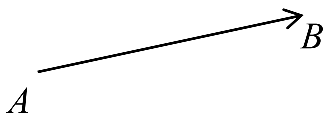
Уметь:

– выполнять действия над векторами;
– вычислять длину вектора;
– вычислять скалярное произведения;
– угол между векторами.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Вектором называется направленный отрезок прямой, у которого различают начало и конец.



Обозначение: $\overline{AB} = \overline{a}$.

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется расстояние от точки A до точки B. Длина обозначается символами $\left|\overline{AB}\right|, \left|\overline{a}\right|$.

Направлением вектора $\overline{AB}$ называется направление, определяемое лучом $[AB)$.

Вектор, длина которого равна нулю, а направление неопределенно, называется нулевым. Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** или ***ортом***. Обозначают $\overline{e}$.

$$\overline{e} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} \Rightarrow \overline{a} - \left|\overline{a}\right| \cdot \overline{e}$$ - стандартная формула вектора.

Два вектора называются ***равными***, если их длины равны, а направления одинаковы.

Два вектора называются ***коллинеарными,*** если лежат в одной плоскости на параллельных прямых или на одной прямой. Они могут быть одинаково или противоположно направлены.

Для того чтобы два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.

Векторы называются ***компланарными,*** если они лежат в одной плоскости (или их направления параллельны одной плоскости).

1 Сложение векторов

Суммой $\overline{a}+\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют вектор, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (рисунок 10).

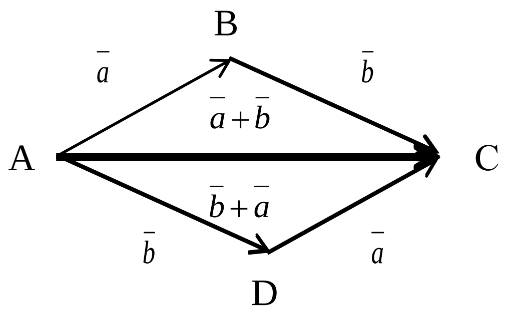


Рисунок 10 - Сумма векторов

2 Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает $\overline{a}$: $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, если в сумме $\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$.

3 Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор, длина которого равна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а направление

1) совпадает с направлением $\overline{a}$, если число λ>0;
2) противоположно ему, если λ<0.

Вектор $\overline{a}$, заданный в координатном пространстве *Oxyz,* можно разложить по единичным векторам $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, т.е. записать в виде

$$\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}.$$

Здесь (*x*,*y*,*z*) - ***координаты*** вектора $\overline{a}$.

Длина вектора $\overline{a}$ находится по формуле:

$$|\overline{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Если вектор задан парой точек $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, то разложение по единичным векторам $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, имеет вид

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot\bar{k}$$

Его длина определяется формулой

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Свойства координат вектора

1^0 $\quad \bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2^0 $\quad \overline{\lambda a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ называется число, определяемое по любой из формул:

1 $\quad (\bar{a};\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi,$ где $\varphi = (\bar{a}\hat{;}\bar{b})$ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2 $\quad (\bar{a};\bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Иногда скалярное произведение обозначают $\bar{a}\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1^0 Скалярное произведение коммутативно

$$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \quad (\bar{a};\bar{b}) = (\bar{b};\bar{a}).$$

2^0 Скалярное произведение однородно

$$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \quad \forall \lambda \in R \quad (\lambda\bar{a};\bar{b}) = (\bar{a};\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a};\bar{b}).$$

3^0 Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов

$$\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \quad (\bar{a} + \bar{b};\bar{c}) = (\bar{a};\bar{c}) + (\bar{b};\bar{c}).$$

4^0 Скалярное произведение $(\bar{a};\bar{a})$ неотрицательно

$$\forall\, \bar{a} \quad (\bar{a};\bar{a}) \ge 0.$$

$(\bar{a};\bar{a}) = |\bar{a}|^2$ - скалярный квадрат $\bar{a}$.

Угол φ между векторами $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a};\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_2^3}}\ .$$

Два вектора ***ортогональны***, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(\bar{a};\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти длину вектора $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Решение: Из условия задачи имеем $\bar{a} = (4;-2;5)$.

$$|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{16 - 4 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Пример 2 Найти скалярное произведение векторов:

$$\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 6\bar{k} \text{ и } \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}.$$

Решение: Воспользуемся формулой $(\bar{a};\bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Из условия задачи имеем $\bar{a} = (3;-4;6); \bar{b} = (2;3;-1)$.

Отсюда $(\bar{a};\bar{b}) = 3\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + 6\cdot(-1) = 6 - 12 - 6 = -12$.

Пример 3 Определить угол между векторами $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{k}$.

Решение: $\bar{a} = (1;-2;4), \bar{b} = (3;0;-2)$.

Воспользуемся формулой $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a};\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}\cdot\sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{5}{\sqrt{273}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{5}{\sqrt{273}}\right)$.

Содержание заданий

1 Найти длину вектора:

1) $\bar{a} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$; 2) $\bar{b} = 3\bar{j} - 4\bar{k}$; 3) $\bar{c} = (-1;4;-5)$; 4) $\bar{d} = (2;-1;3)$.

2 Даны две координаты вектора x=4, y=-12. Определить его третью координату, если $|\bar{a}| = 13$.

3 Определить скалярное, векторное произведения векторов:

1) $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$; 2) $\bar{a} = 6\bar{i} + 4\bar{k}$; 3) $\bar{a} = (0;-4;1)$; 4) $\bar{a} = (-2;4;-3)$;

$\bar{b}=\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$; $\bar{b}=-8\bar{j}+9\bar{k}$; $\bar{b}=(7;-8;-3)$; $\bar{b}=(5;-5;11)$.

4 Найти скалярное произведение векторов если:

1) $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=5$, угол между векторами равен $\frac{\pi}{3}$;

2) $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=4$, угол между векторами равен 30^0;

3) $|\bar{a}|=6, |\bar{b}|=1$, угол между векторами равен $\frac{2\pi}{3}$;

4) $|\bar{a}|=4, |\bar{b}|=2$, угол между векторами равен 45^0.

5 Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны; $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=7$ вычислить:

1) $(3\bar{a}-2\bar{b};2\bar{a}-3\bar{b})$; 2) $(4\bar{a}+4\bar{b};3\bar{a}-3\bar{b})$.

6 При каком значении m векторы $\bar{a}=m\bar{i}-\bar{j}$ и $\bar{b}=3\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$ перпендикулярны,?

7 При каком значении m векторы $\bar{a}=m\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-m\bar{k}$ перпендикулярны?

8 Определить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:

1) $\bar{a}=(1;2;3), \bar{b}=(6;4;-2)$;

2) $\bar{a}=(3;4;5), \bar{b}=(4;5;-3)$;

3) $\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}, \bar{b}=-6\bar{i}+4\bar{j}+2\bar{k}$;

4) $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+4\bar{k}, \bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+6\bar{k}$.

9 Даны векторы $\bar{a}=(1;-2;3)$, $\bar{b}=(2;2-1)$, $\bar{c}=(0;1;-2)$, $\bar{d}=(2;-1;0)$. Вычислить:

1) $(\bar{a};\bar{b}+\bar{c})$

2) $(3\bar{a}-5\bar{b};2\bar{c}+\bar{d})$

3) $(\bar{a}-\bar{b};\bar{d}+\bar{c})$

4) $(\bar{a}+2\bar{b};3\bar{c}-4\bar{d})$

5) $(\bar{a}-2\bar{d};\bar{c})$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 3 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 3.1 Прямая на плоскости

Практическое занятие 7 Прямая на плоскости (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об уравнениях прямой линии на плоскости, о кривых второго порядка;
- формирование умений по составлению уравнений прямой линии на плоскости, нахождению угла между прямыми, определению их взаимного расположения, составлению уравнений кривых второго порядка, построению кривых.

Студент должен:

*Знать***:**

- основные способы задания прямой на плоскости;
- основные виды уравнений прямой линии на плоскости;
- формулу для вычисления угла между двумя прямыми;
- условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Уметь:

- составлять уравнения прямой на плоскости в зависимости от способа задания прямой;
- находить угол между двумя прямыми и определять их взаимное расположение.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

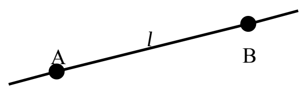
Зададим на плоскости систему координат Оху. Если рассматривать множество пар значений переменных х и у, удовлетворяющих уравнению $F(x,y)=0$, как координаты точек на плоскости, то изображение этого множества на плоскости дает график уравнения, который есть некоторая линия С.

Уравнением данной линии называется такое уравнение с переменными *x* и *y*, которому удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

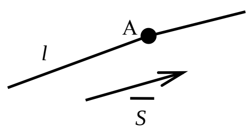
Способы задания прямой на плоскости

Существуют четыре основных способа задания прямой на плоскости.

1 С помощью двух различных точек.



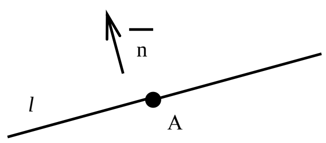
2 Через точку параллельно данному вектору.



Любой вектор $\overline{S}$, коллинеарный прямой l, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

Из определения следует, что прямая имеет сколько угодно направляющих векторов и все они коллинеарны между собой $\overline{S}(m;n)$.

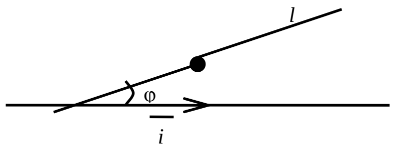
3 Через точку перпендикулярно данному вектору.



Любой ненулевой $\bar{n}$, перпендикулярный прямой l, называется ***нормальным вектором*** этой прямой $\bar{n}(A;B)$.

Каждая прямая имеет сколько угодно нормальных векторов и все они коллинеарны между собой.

4 Через точку под углом φ к вектору $\bar{i}$.



Уравнения прямой, в зависимости от способа задания прямой, представлены в таблице 1.

Таблица 1- Уравнения прямой

	Вид уравнения	**Название уравнения**
1	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами *(x_0,y_0)*, перпендикулярно вектору $\bar{n}$ *(A,B)*
2	$Ax+By+C=0$	Общее уравнение прямой
3	$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$	Параметрические уравнения прямой (уравнение прямой, проходящей через точку с координатами *(x_0,y_0)*, параллельно вектору $\bar{s}$*(m,n)***)**
4	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Каноническое уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через точку с координатами *(x_0,y_0)*, параллельно вектору $\bar{s}$*(m,n)***)**
5	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Уравнение прямой, проходящей через точки с координатами *(x_1, y_1)* и *(x_2, y_2)*
6	$y-y_0=k(x-x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (x_0,y_0), и имеющей угловой коэффициент *k*.
7	$y=kx+b$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k* и начальной ординатой *b*

8	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	Уравнение прямой в отрезках (*а,в* – отрезки на осях *x* и *y*)

$$k=\mathrm{tg}\varphi,$$

где φ- угол , образованный прямой с положительным направлением оси *Ox*.

Острый угол между прямыми $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$, определяется формулой

$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

Следствия:

1 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$,

2 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}$.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *M(3;-5)* параллельно $\bar{s}=(4;2)$.

Решение: Подставим координаты точки *M* и $\bar{s}$ в уравнение получим:

$$\begin{cases} x=3+4\lambda, \\ y=-5+2\lambda. \end{cases}$$

Пример 2 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку *M(3;-2)* параллельно $\bar{s}(0;1)$.

Решение: Подставим координаты точки *M* и $\bar{s}$ в уравнение получим:

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{1} \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3..$$

Пример 3 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;-3)$ и $M_2(4;6)$.

Решение: Подставим координаты точек M_1 и M_2 в уравнение, получим:

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y+3}{6+3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{9} \Leftrightarrow 9(x-2)=2(y+3) \Leftrightarrow 9x-2y-24=0.$$

Пример 4 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-4)$ с угловым коэффициентом $k=\frac{2}{5}$.

Решение: Подставим данные задачи в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, получим

$$y+4=\frac{2}{5}(x-3)\Leftrightarrow y+4-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=0\Leftrightarrow -\frac{2}{5}x+y+\frac{26}{5}=0\ \Leftrightarrow\ y=\frac{2}{5}x-\frac{26}{5}.$$

Пример 5 $l_1: y=-\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}$ $l_2: y=\frac{3}{4}x+5$. Найти угол между прямыми l_1 и l_2.

Решение: $k_1=-\frac{1}{7}, k_2=\frac{3}{4}$. Тогда по формуле имеем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{25\cdot 28}{28\cdot 25}=1.$$

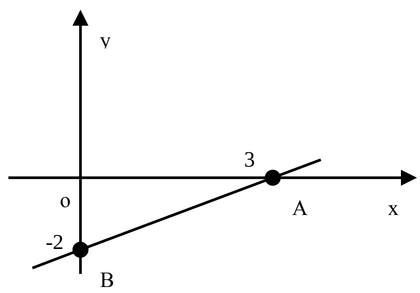
Следовательно $\alpha=45^0$.

Пример 6 Построить прямую $2x-3y-6=0$.

Решение: Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$$2x-3y=6\Leftrightarrow\frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}=1\Leftrightarrow\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1\qquad\Rightarrow\qquad a=3,b=-2.$$

Отметим на оси *OX* *a=3,* а на оси *OУ* $b=-2$, и проведем через точки *A* и *B* искомую прямую.



Содержание заданий

1 Составить параметрические и каноническое уравнения прямой, проходящей через точку *M(-6;2)* параллельно $\bar{s}=(3;-4)$.

2 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;\,5)$ и $B(7;\,-2)$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-5)$ с угловым коэффициентом $k=-\frac{1}{3}$.

4 Составьте уравнение прямой проходящей через точку M_0 и перпендикулярно вектору $\overline{AB}$, если: точка M_0 (-2;-3), A (-5;2), B (-1;4).

5 Привести общее уравнение прямой к уравнению в отрезках и вычислить площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от соответствующего координатного угла 2x+3y-6=0.

6 В ΔABC вершины имеют координаты точки A (-3;4), точки B (-4;-3), точки C (8;1). Составить уравнения сторон (AB) и (BC).Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $\overrightarrow{M_0}$ (-2;4), с направляющим вектором a (6;-1).

7 Вычислить угол между прямыми

а) 4x + 6y - 1 = 0 и x - 3y + 5 = 0;

б) $y=-\frac{2}{3}x+4$ и $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$;

в) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{4}$ и $\frac{x-7}{2}=\frac{y+4}{-3}$.

8 Определить взаимное расположение 2-х прямых

2x – 5y – 20 = 0 и 5x + 2y – 10 = 0.

9 Дана прямая $\frac{x+2}{-4}=\frac{y-7}{3}$**.** Написать уравнение какой – либо прямой, параллельной данной.

10 Через т. M_1(1;3) и M_2(2;-1) провести прямую линию. Определить угол между ней и прямой $y=2x+1$.

11 Параллельны ли прямые $2x-4y+7=0$ и $3x-6y+17=0$?

12 Дан отрезок AB, составить уравнение прямой, проходящей через средину отрезка AB перпендикулярно ему, если A (3; -2), B (5;-4).

13 Дан треугольник с вершинами A (-2;0), B (2;4), C (4;0). Написать уравнение высоты AD.

14 Определить площадь треугольника, образованного прямой 5x +8y-40=0 с осями координат.

15 Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (4;-3) и составляющей с положительным направлением оси Ox тот же угол, что и прямая $y=\frac{3}{5}x-2$.

16 Найти тангенсы угла наклона прямой 3x-4y+13=0 с положительным направлением оси абсцисс и определить, какой отрезок она отсекает на оси ординат.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Тема 3.3 Кривые второго порядка

Практическое занятие 8 Кривые второго порядка (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о кривых второго порядка;
- формирование умений по составлению уравнений кривых второго порядка, построению кривых.

Студент должен:

Знать:

- общее уравнение кривой второго порядка;
- канонические уравнения эллипса, гиперболы;
- понятия фокуса, действительной и мнимой осей, эксцентриситета кривых второго порядка, правила их вычисления.

Уметь:

- составлять уравнения кривых второго порядка;
- приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду;
- строить кривые по заданным уравнениям.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Окружностью называют множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки *O* на одно и тоже расстояние *R*. Точка *O* - центр окружности, *R* – радиус окружности. Пусть точка *O* в прямоугольной системе координат Оху имеет координаты (x_0, y_0), а $M(x; y)$ - произвольная точка окружности.

Тогда из условия $OM = R$ получаем уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Уравнение называется ***каноническим уравнением окружности.*** Это уравнение второй степени относительно *x* и *y*. Следовательно, окружность есть кривая второго порядка.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из каждой из которых до двух данных точек данной плоскости, называемых ***фокусами,*** есть величина постоянная (обозначают $|F_1F_2| = 2c,$), большая расстояния между фокусами.

Если фокусы эллипса находятся на оси *Ox*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - ***каноническое уравнение эллипса.***

Эллипс имеет форму, изображенную на рисунке 11

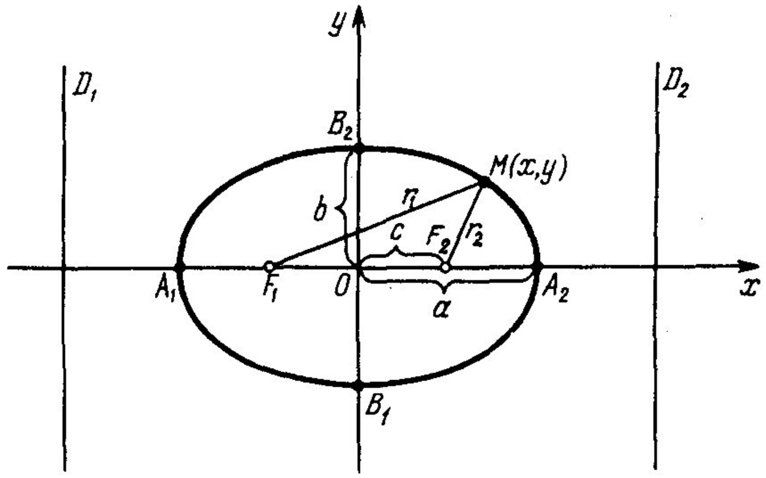


Рисунок 11- Эллипс, фокусы которого лежат на оси OX

Точки *A1, A2, B1, B2,* пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами эллипса***. Отрезок $[A_1A_2](|A_1A_2|=2a, F_1\in[A_1A_2], F_2\in[A_1A_2])$ называется ***большой осью эллипса,*** а отрезок $[B_1B_2]$ $(|B_1B_2|=2b)$ – ***малой осью***. Оси $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ являются осями симметрии эллипса, а точка *0* – ***центром симметрии (или просто центром) эллипса***.

a – большая полуось эллипса;

b – малая полуось эллипса;

$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы эллипса;

$c^2=a^2-b^2$, c – фокусное расстояние эллипса;

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$, ε – эксцентриситет эллипса;

$\vec{r_1}=\vec{F_1M}$, $\vec{r_2}=\vec{F_2M}$ – фокальные радиус-векторы;

по определению $r_1+r_2=2a$.

Прямые $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm d$ называются директрисами эллипса.

Строят эллипс, вписывая его в прямоугольник со сторонами длиной $2a$ и $2b$ и с центром симметрии в начале координат.

Уравнение эллипса со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Если эллипс, определяемый каноническим уравнением, расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy, то тогда $b>a$ и большой осью служит отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$, а малой осью – отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$\varepsilon=\frac{c}{b}, \quad \text{где } c=\sqrt{b^2-a^2}.$$

Чтобы привести **общее уравнение эллипса** $a_{11}x^2+a_{10}x+a_{22}y^2+a_{01}y+a_{00}=0$, где коэффициенты a_{11} и a_{22} должны иметь одинаковые знаки, **к каноническому виду,** нужно ***выделить полные квадраты*** по переменным x и y.

Гиперболой называется множеством всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (обозначают $|F_1F_2|=2c$,), меньшая расстояния между фокусами.

Если фокусы эллипса находятся на оси Ox

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ - ***каноническое уравнение гиперболы.***

Гипербола имеет форму, изображенную на рисунке 12

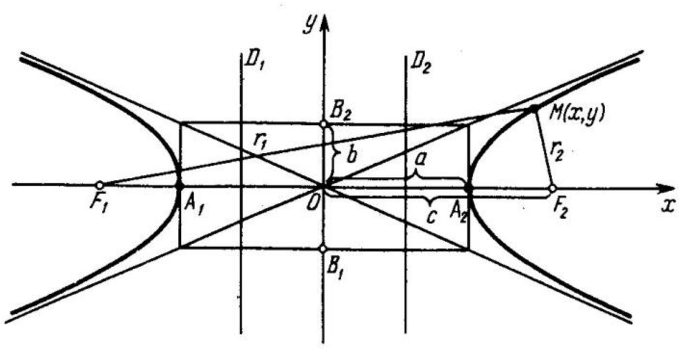


Рисунок 12 - Гипербола

Точки A_1, A_2 пересечения гиперболы с осями координат называются ***вершинами гиперболы.*** Отрезок $[A_1A_2](|A_1A_2| = 2a, F_1 \in [A_1A_2], F_2 \in [A_1A_2])$ называется ***действительной осью гиперболы,*** а отрезок $[B_1B_2](|B_1B_2| = 2b)$ – ***мнимой осью***. Оси $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ являются осями симметрии ***гиперболы***, а точка *0* – ***центром симметрии (или просто центром) гиперболы***.

a – действительная полуось гиперболы;

b – мнимая полуось гиперболы;

$F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы гиперболы;

$c^2 = a^2 + b^2$, c – фокусное расстояние гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, ε – эксцентриситет гиперболы;

$\vec{r_1} = \vec{F_1M}$, $\vec{r_2} = \vec{F_2M}$ – фокальные радиус-векторы;

по определению $|r_1 - r_2| = 2a$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm d$ называются директрисами гиперболы. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Строят гиперболу, изобразив предварительно прямоугольник со сторонами длиной *2a* и *2b* и с центром симметрии в начале координат, а затем вписывают ветви гиперболы в углы между асимптотами гиперболы (прямыми, на которых лежат диагонали прямоугольника), помещая вершины гиперболы в точки с координатами *(– a, 0)*, *(a, 0)*.

Уравнение гиперболы со смещенным при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0,,y_0)$ центром имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола, уравнение которой $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, называется **сопряженной** по отношению к гиперболе, имеющей уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Фокусы сопряженной гиперболы расположены на мнимой оси.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на ***одинаковом расстоянии*** от данной ***точки,*** называемой фокусом, и от данной ***прямой***, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

$y^2 = 2px$ **-** ***каноническое*** **уравнение параболы**

Парабола имеет форму, изображенную на рисунке 5

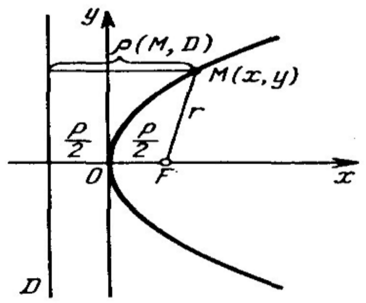


Рисунок 13 - Парабола

Строят параболу, откладывая одинаковые отрезки от точек параболы до фокуса с координатами $F(\frac{p}{2}, 0)$ и до директрисы, уравнение которой $x = -\frac{p}{2}$. Вершина параболы находится в точке $O(0,0)$.

Уравнение параболы со смещенной при помощи параллельного переноса в точку $M_0(x_0, y_0)$ вершиной имеет вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Парабола, уравнение которой $x^2 = 2py$, называется **сопряженной** по отношению к параболе, имеющей уравнение $y^2 = 2px$. Фокус сопряженной параболы расположен в точке $F(0, \frac{p}{2})$, а ее директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0.$$

Решение: Выделяя полные квадраты в левой части данного уравнения, приведем его к каноническому виду:

$$x^2-4x+4-4+y^2+8y+16-16-16=0,$$

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+8y+16\right)=36$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2=6^2$$

Центр окружности находится в точке (2;-4), а радиус равен 6.

Пример 1 Определить длину осей и координаты фокусов эллипса

$$24x^2+49y^2=1176.$$

Решение: Приведем к каноническому виду.

Разделим обе части уравнения на 1176, получим

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1.$$

Отсюда $\begin{cases} a^2=49 \\ b^2=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=14 \\ 2b=4\sqrt{6} \end{cases}.$

Имеем $b^2=a^2-c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-24}=5.$

Следовательно, $F_1(5;0)$ и $F_1(-5;0)$.

Пример 2 Составить каноническое уравнение эллипса, если фокусное расстояние равно 10, а малая ось равна 6.

Решение: По условию задачи

$$2c=10 \Leftrightarrow c=5, \quad 2b=6 \Leftrightarrow b=3,$$

$$b^2-a^2-c^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2=9+25=34.$$

Следовательно, $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=1.$

Пример 3 Составьте уравнение гиперболы, вершины которой находятся в точках A (5;0) и B (-5;0), а расстояние между фокусами равно 14.

Решение: По условию задачи имеем: a=5, $|F_1F_2|=2c=14 \Leftrightarrow c=7.$

Найдем b^2 по формуле $b^2=c^2-a^2$.

Получим $b^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{27} = 1.$$

Пример 4 Составьте каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если длинна ее действительной оси равна 16 и гипербола проходит через точку А (-10;-3).

Решение: Из условия задачи имеем: $2a = 16 <=> a = 8$.

Так как гипербола проходит через точку A(-10;-3), то ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Найдем b^2.

$$\frac{(-10)^2}{8^2} - \frac{(-3)^2}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{100}{64} - \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 16.$$

Следовательно, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Пример 5 Найти эксцентриситет гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Решение: Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}.$$

По формуле $E = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ находим $E = \frac{\sqrt{9+16}}{3} = \frac{5}{3}$.

Содержание заданий

1 Составить уравнение эллипса, если известно, что вершинами его являются точки (3;0) и (0;1).

2 Найти оси и координаты вершин эллипсов:

1) $16x^2 + 25y^2 = 400$; 2) $16x^2 + 9y^2 = 144$.

3 Составить простейшее уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ох, если его полуоси равны 4 и 3.

4 Расстояние между фокусами эллипса равно 30, а большая ось равна 34.

a. Найти малую ось. Какой эллипс соответствует этим данным?

5 Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Ох, если длины его осей равны 12 и 8.

6 Составить уравнение эллипса с фокусами на оси Оу, если длины его осей равны 10 и 4.

7 Составить уравнение эллипса, если его две вершины находятся в точках $A_1(-3;0)$ и $A_2(6;0)$, а фокусы заданы координатами (4;0).

8 Составить уравнение эллипса, если его две вершины находятся в точках $B_1(0;-8)$ и $B_2(0;8)$, а фокусы заданы координатами (5;0).

9 Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 6 (фокусы лежат на оси Ох) и большая ось равна 10.

10 Найти координаты фокусов и расстояние между фокусами эллипса:

$$1)\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{26} = 1.$$

11 Вычислить эксцентриситет эллипса:

$$1)\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \qquad 2)\ \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

12 Составить каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси абсцисс, если его оси 16 и 10.

13 Установить, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс; найти его центр С, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис; построить график этого эллипса.

14 Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, если ее действительная ось равна 16 и мнимая ось равна 8.

15 Составить уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках $A_1(-3;0)$ и $A_2(3;0)$ и фокусы в точках (-5;0).

16 Найдите длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы.

а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1;$ б) $\frac{x^2}{25}-\frac{16y}{49}=1.$

17 Составить уравнение гиперболы, действительная и мнимая оси которой равны соответственно: 1) 4 и 6; 2) 12 и 5.

18 Найдите координаты фокусов, эксцентриситет гиперболы, уравнения асимптот гиперболы:

а) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$ б) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$ в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1;$ г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическая работа 9 Решение задач векторной алгебры и аналитической геометрии в MathCad (2ч.)

Цель:

– Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач векторной алгебры и аналитической геометрии. Приобретение навыков выполнения действий над векторами, построения прямых и кривых средствами пакета.

Студент должен

Знать:

– определение вектора, действий над векторами, свойства действий;
– понятие коллинеарности и компланарности векторов;
– понятие базиса, координат вектора, систем координат;
– правила действий над векторами, заданными координатами;

- скалярное произведение векторов, формулы для его вычисления;
- основные способы задания прямой на плоскости;
- основные виды уравнений прямой линии на плоскости;
- формулу для вычисления угла между двумя прямыми;
- условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
- общее уравнение кривой второго порядка;
- канонические уравнения эллипса, гиперболы;
- понятия фокуса, действительной и мнимой осей, эксцентриситета кривых второго порядка, правила их вычисления.

Уметь:

- выполнять действия над векторами;
- вычислять длину вектора;
- вычислять скалярное произведение;
- угол между векторами.
- составлять уравнения прямой на плоскости в зависимости от способа задания прямой;
- находить угол между двумя прямыми и определять их взаимное расположение.
- составлять уравнения кривых второго порядка;
- строить кривые по заданным уравнениям.

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Краткие теоретические сведения

1 Начало работы

Запуск приложения *MathCAD* осуществляется командой

ПУСК→ Программы→ MathSoft→ MathCAD

2 Начало работы с матрицами

Чтобы начать работу с векторами на панели математических инструментов Math (Математика), необходимо активизировать панель операций с матрицами и векторами Matrix (Матрицы)

3 Рассмотрим более подробно **панель Matrix** (Матрицы) (рисунок 14)

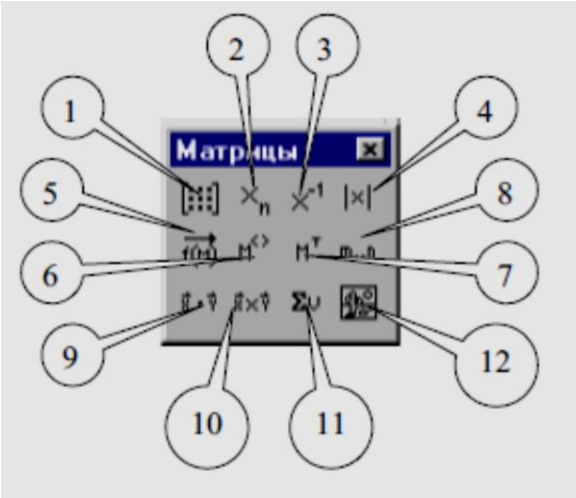


Рисунок 14 - Панель Матрицы

1 Создать матрицу или вектор.

2 Вставка нижнего индекса матрицы.

3 Инверсия матрицы (обратная матрица).

4 Вычисление определителя матрицы

5 Задать вектор.

6 Столбец матрицы.

7 Транспонирование матрицы.

8 Задать диапазон дискретной величины.

9 Скалярное произведение векторов.

10 Векторное произведение векторов.

11 Сумма элементов вектора.

12 Вставка изображения.

4 Создание вектора

В том месте рабочего окна, в котором хотите создать вектор введите обозначение вектора (например, А), и оператор присваивания **:=** .

Активизировать кнопку 1  под названием Insert Matrix (Создать матрицу).

При вводе вектора в графе **columns** (столбцы) следует проставить 1, а в графе **rows**(строки) проставить размер вектора. Нажать «*OK*, появится шаблон, в который необходимо ввести требуемые значения (рисунок 15). При введении значений можно использовать клавишу Tab.

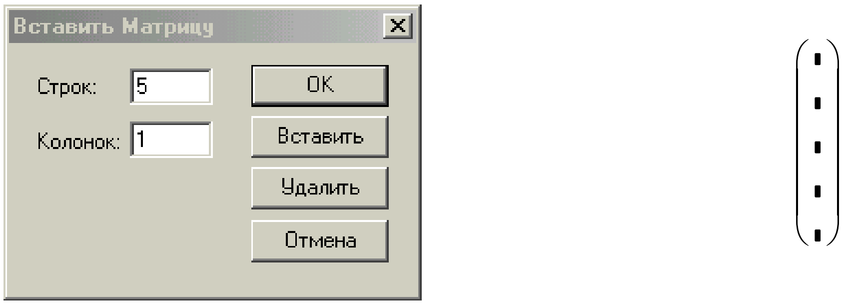


Рисунок 15 - Окно ввода векторов и шаблон вектора

Для работы с векторами и матрицами MathCAD содержит ряд операторов и функций. Введём обозначения: V - вектор; Z - скалярные величины. В таблице 2 приведены операторы для работы с векторами.

Таблица 2 – Операторы для работы с векторами

Оператор	**Набор на клавиатуре**	**Назначение**
V1+V2	V1+V2	Сложение векторов V1и V2
-V	-V	Смена знака у всех элементов вектора
V+Z	V+Z	Сложение вектора V со скаляром Z
Z*V,V*Z	Z*V,V*Z	Умножение вектора V на скаляр Z
Z*M,M*Z	Z*M,M*Z	Умножение Матрицы M на скаляр Z
V1*V2	V1*V2	Умножение двух векторов
$\frac{V}{Z}$	V/Z	Деление вектора V на скаляр Z
$\sqrt{V}$	V	Вычисление квадратного корня из V
V^T	V Ctrl!	Транспонирование вектора V
V1*V2	V1 Ctrl*V2	Скал-умножение векторов V1и V2
$\overline{V}$	V”	Получение комплексно скалярного вектора
$\sum V$	Alt $ V	Вычисление суммы элементов вектора V
$\vec{V}$	V Ctrl -	Векторизация вектора V
V_n	V[n	Выделение n-го элемента вектора V

Модуль вектора(vector magnitude) вычисляется так же как и определитель матрицы .

При попытке вычислить модуль вектора с панели Matrix будет ошибочное состояние. Точно также будет ошибочное состояние при попытке вычислить детерминант матрицы с панели Calculator (рисунок 16).

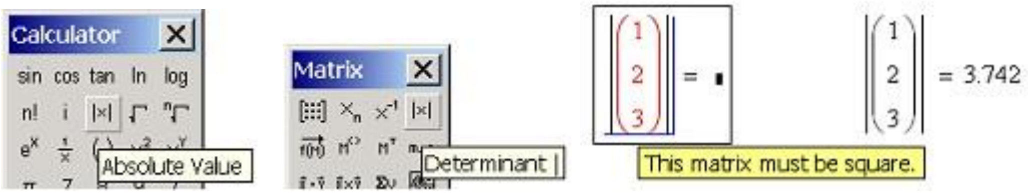


Рисунок 16 – Модуль вектора

Скалярное произведение векторов определяется как скаляр, равный сумме попарных произведений соответствующих элементов (идентичен обычному оператору умножения). Векторы должны иметь одинаковый размер. Для обозначения скалярного произведения используется символ «точка».

Векторное произведение двух векторов *u* и *v* с углом *θ* между ними равно вектору с модулем $|u| \cdot |v| \cdot \sin(\theta)$, направленным перпендикулярно плоскости векторов u и v. Векторное произведение векторов применимо только для трехкомпонентных векторов. Обозначают векторное произведение символом x, который можно ввести нажатием кнопки на панели Matrix (рисунок 17).

Рисунок 17 – Обозначения произведений векторов

Одним из многих достоинств Маткада является легкость построения графиков.

Панель графиков вызывается нажатием кнопки с изображением графиков на математической панели (рисунок 18).

Рисунок 18 – Панель графиков

На панели графиков расположены девять кнопок с изображением различных типов графиков (название графиков каждой кнопки высвечивается при подводе к ней курсора и ожидании в течение 3-5 секунд):

– **X-Y Plot** - графики в декартовых координатах,
– **Polar Plot** - графики в полярных координатах,
– 3D **Bar Chart**- столбиковые диаграммы,
– **Surface Plot** - трехмерный график,
– **Cunter Plot**- карта линий уровня,
– **Vector Field Plot** - векторное поле,
– **3D Scatter Plot** -трехмерный точечный график.

Сначала нас будет интересовать левая верхняя кнопка X-У графиков в декартовой системе координат (По-английски X-Y Plot) (рисунок 19).

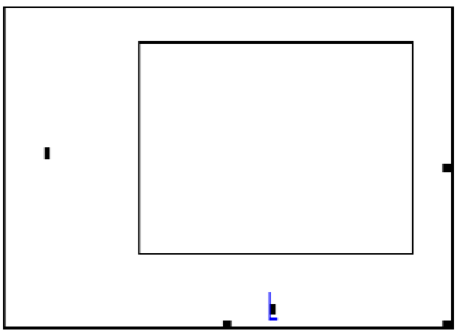


Рисунок 19 – Пустая область графика с местозаполнителями

В ячейке, расположенной под осью абсцисс, указывается независимая переменная ***x***. Ее следует определить заранее как переменную, принимающую значения из промежутка (ранжированная переменная).

В ячейке рядом с осью ординат необходимо задать функцию ***f(x)***, график которой мы хотим построить. Если эта функция была определена заранее, то в ячейку достаточно ввести ***f(x)***, иначе следует ввести изображаемую функцию в явном виде (например, ***cos(x)***).

После ввода ***x*** и ***f(x)*** в графической области появятся еще четыре ячейки, которые не обязательно заполнять. MathCad автоматически находит подходящие значения для x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}. Если же предлагаемые MathCad значения вас не устраивают, вы можете задать свои.

В MathCad существует возможность строить график функции, не задавая предварительно промежуток изменения независимой переменной. По умолчанию этот промежуток принимается равным [-10, 10].

Для представления на одной диаграмме графиков нескольких функций необходимо выделить ячейку рядом с осью ординат и через запятую ввести вторую функцию. По умолчанию график этой функции будет представлен пунктирной линией другого цвета.

Если вас не устраивает внешний вид построенных графиков, вы можете его изменить, выделив график (выполнив на нем щелчок, так, чтобы вокруг него появилась рамка) и затем воспользоваться командой **Format -> Graph -> X-Y Plot**, или, выполнив на графике щелчок правой кнопкой мыши и выбрав команду **Format** из выпадающего контекстного меню (можно выполнить также двойной щелчок левой кнопкой мыши). В результате на экране появится диалоговое окно **Formatting Currently Selected X-Y Plot**, позволяющее изменить вид графика (рисунок 20).

Данное диалоговое окно содержит несколько вкладок:

– **X-Y Axes** (форматирование осей);
– **Traces** (тип линий графиков);

– **Labels** (подписи);

– **Defaults** (по умолчанию).

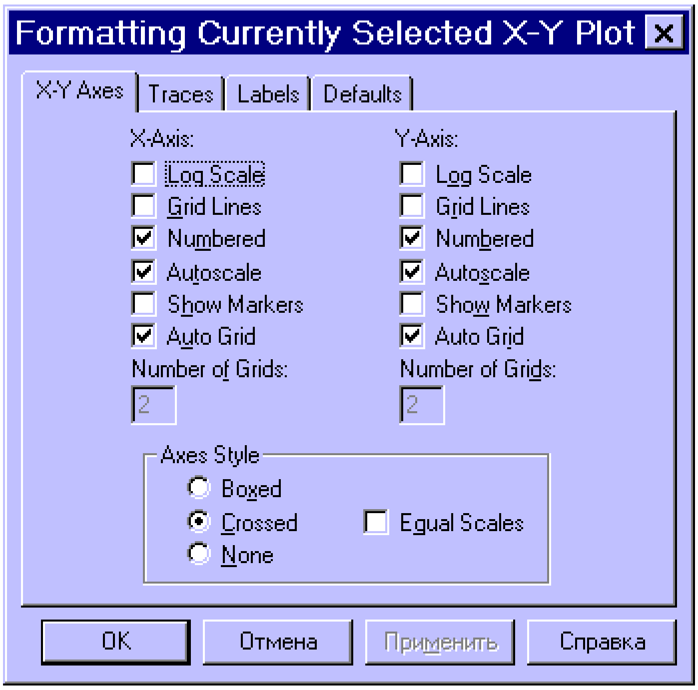


Рисунок 20 - Форматирование

Описание работы

Первая из вкладок позволяет форматировать оси координат:

– **Log Scale** (Логарифмическая шкала) - задает логарифмические оси, в этом случае границы графика должны задаваться положительными числами.

– **Grid Lines** (Вспомогательные линии) - задает отображение сетки из параллельных осям линий.

– **Numbered** (Нумерация) - задает отображение подписи к маркировкам на осях.

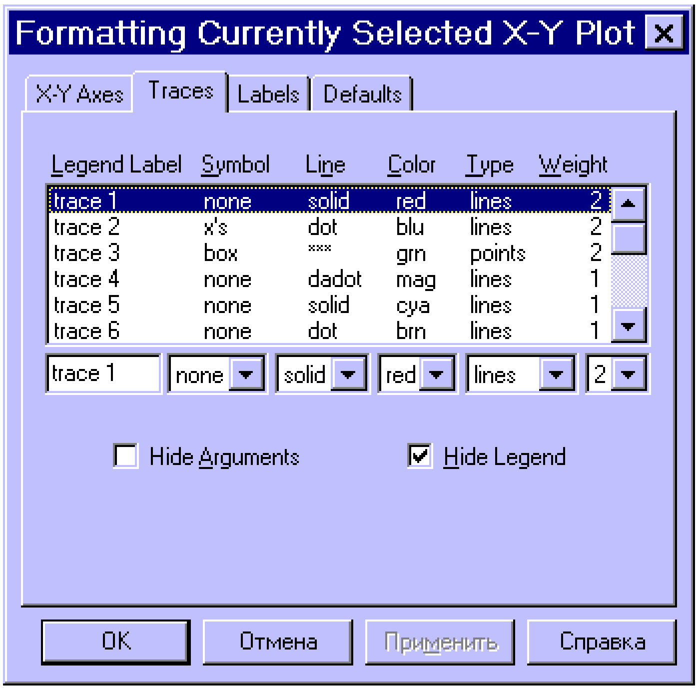
– **Autoscale** (Автомасштаб) - задает автоматическое нахождение подходящих границ для осей. Но если вы сами зададите в соответствующих ячейках минимальные и максимальные значения x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, именно эти значения будут использоваться для определения границ графика.**Show Markers** (Показать метки) - Если установить эту опцию, то в графической области появятся четыре дополнительные ячейки для создания красных линий маркировки, соответствующих двум специальным значениям x и двум специальным значениям y.

– **Auto Grid** (Автосетка) - При установке этой опции число линий сетки определяет MathCad.

– **Axes Style** (Вид осей) - Группа кнопок этой области позволяет выбрать следующие варианты представления осей: **Boxed** (ограниченная область), **Crossed** (пересечение) - оси пересекаются в точке с координатами (0.0), **None** (без границ). Флажок **Equal Scales** (равный масштаб) позволяет задать одинаковый масштаб для обеих осей.

Форматирование оси графика можно произвести, выполнив на ней двойной щелчок.

Для изменения типа линий графиков необходимо активизировать вкладку **Traces** (След)



Описание работы

— **Legend Lable** (Имя в легенде) - каждой кривой можно поставить в соответствие некоторый текст, называемый легендой. Легенда отображается в нижней части графической области, а рядом с каждой легендой отображается тип линии соответствующей кривой.

– **Symbol** (Символ) - позволяет выбрать символ для каждой точки кривой (плюс, крестик, кружок и др.)

– **Line** (Линия) - можно выбрать один из следующих типов линий: *solid* (сплошная), *dash* (штриховая), *dot* (точечная) или *dadot* (штрихпунктирная). Это поле списка доступно в случае, если в поле **Type** (Тип) выбран элемент *lines*.

– **Color** (Цвет) - задается цвет представления кривой на экране.**Type** (Тип) - Позволяет выбрать один из семи видов графика: в виде кривых, в виде столбцов и т. п. Специальным видом графика является тип (погрешность, расхождение), представляющий собой разность двух заданных функций. Величина шага независимой переменной определяет расстояние между отдельными столбцами, ступенями или линиями погрешностей на диаграмме.

– **Weight** (Вес) - Позволяет задавать толщину линий графика.
– В нижней части вкладки **Traces** расположены опции:
– **Hide Arguments** (Скрыть аргументы) - Эта опция по умолчанию отключена. В этом случае под именем функции рядом с осью ординат указывается текущий тип линий. Если установить данную опцию, указание типа линий исчезнет.
– **Hide Legend** (Скрыть легенду) - По умолчанию легенда не отображается. Если вы хотите отобразить под графиком текст легенды, его необходимо перед этим ввести в поле **Legend Lable** (Имя в легенде) и подтвердить ввод, выполнив щелчок на кнопке **Применить**.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Даны координаты векторов $\vec{a}(2;-3;4)$ и $\vec{b}(3;2;-1)$. Вычислить: длину каждого вектора, скалярное произведение векторов, угол φ между векторами, длину вектора $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, пользуясь правилами выполнения операций над векторами, заданными в координатной форме. Найти вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и смешанное произведение векторов $(\vec{p},\ \vec{a},\ \vec{b})$.

Решение: Заметим, что в среде MathCad векторы должны быть представлены в виде векторов-столбцов.

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |a| = 5.385 \qquad |b| = 3.742$$

$$a \cdot b = -4 \qquad \phi := acos\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right) \quad \phi = 1.771$$

$$p := 2 \cdot a + 3 \cdot b \qquad p = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad |p| = 13.928$$

$$c := a \times b \qquad c = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad p \cdot (a \times b) = 0$$

Пример 2 Даны координаты вершин четырёхугольника A1=(2, -3, 5), A2=(0,2,1), A3=(-2,-2,3), A4=(3,2,4). Средствами векторной алгебры найти:

а) длину ребра A1A2;

б) угол между ребрами A1A2 и A1A3;

в) площадь грани A1A2A3;

г) объём пирамиды A1A2A3A4;

д) высоту пирамиды.

Решение: Введите векторы-столбцы A1, A2, A3, A4 в следующем виде:

$$A1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A3 := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A4 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

а) Для нахождения длины ребра A1A2 необходимо определить этот вектор. Согласно векторной алгебре записываем формулу для определения самого вектора: A1A2:=A2-A1. Для определения длины вектора A1A2 с помощью наборной панели матрицы создайте запись: $|A1A2| =$. Ответ будет получен автоматически и равен $|A1A2| = 6.708$. Для дальнейших вычислений определим вектора A1A3 и A1A4 как

A1A3:=A3-A1 A1A4:=A4-A1

б) Угол между ребрами определим по формуле известной из курса векторной алгебры: $\alpha := a\cos\left(\frac{A1A2 \cdot A1A3}{|A1A2| \cdot |A1A3|}\right)$

Для вывода результата, вычисленного по формуле, левее или ниже данной формула запишите $\alpha =$.

в) Площадь грани A1A2A3 находим по следующей формуле:

$$S := \frac{|A1A2 \times A1A3|}{2}$$

г) Объём пирамиды находим по следующей формуле:

$$V := \left|\frac{(A1A2 \times A1A3) \cdot A1A4}{6}\right|$$

д) Высоту пирамиды вычислим по формуле: $H := \frac{3 \cdot V}{S}$

Пример 3 Построить кривую в системе координат *xOy*, заданную уравнением $-3x^2-3y^2-14xy+50x+10y+100=0$.

Решение: Решим данное уравнение относительно *y* в MathCad, то есть выразим *y* через *x*, выполнив команду **Simbolics\Variable\Solve**, предварительно выделив y

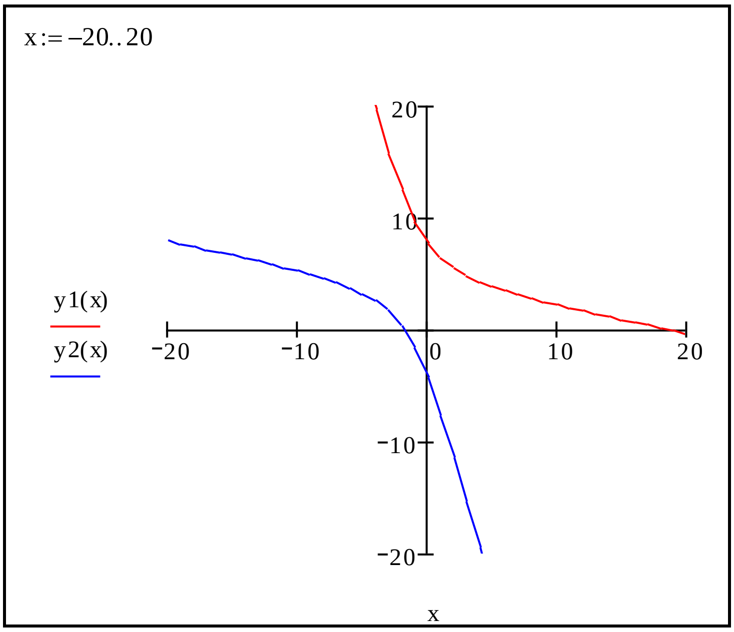
$$-3\cdot x^2 - 3\cdot y^2 - 14\cdot x\cdot y + 50\cdot x + 10\cdot y + 100 = 0 \text{ solve}, y \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-7}{3}\cdot x + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(40\cdot x^2 + 80\cdot x + 325\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-7}{3}\cdot x + \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(40\cdot x^2 + 80\cdot x + 325\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Определим функции, описывающие части кривой

$$y1(x) := \frac{-7}{3}\cdot x + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{40\cdot x^2 + 80\cdot x + 325}$$

$$y2(x) := \frac{-7}{3}\cdot x + \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{40\cdot x^2 + 80\cdot x + 325}$$

Построим графики двух функций на промежутке $x\in[-20, 20]$ в MathCad:



Содержание заданий

1 Даны координаты векторов $\vec{a}(m;n-m;-n)$ и $\vec{b}(m+n;1;-m)$. Вычислить: длину каждого вектора, скалярное произведение векторов, угол φ между векторами, длину вектора $\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$, пользуясь правилами выполнения операций над векторами, заданными в координатной форме. Найти вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ и смешанное произведение векторов $(\vec{p},\ \vec{a},\ \vec{b})$.

2 Даны координаты вершин ABCD. средствами векторной алгебры найти: а) длину ребра АВ; б) угол между рёбрами АВ и АС; в) площадь грани ABCD; объём пирамиды ABCD; г) высоту пирамиды ABCD.

3 Даны точки A, B, C, D. Положим $a=\overrightarrow{AB}$, $b=\overrightarrow{CD}$. Найти:

а) векторы 2a+b и a-2b;

б) модули векторов |2a+b| и |a-2b|;

в) скалярное произведение (2a+b)·(a-2b);

г) угол между векторами (2a+b)·и (a-2b).

4 Построить данную кривую в системе координат XY. Определить тип кривой и привести уравнение $f(x)=(m+1)x^2+2(m+n+1)xy+(m+1)y^2+mx–ny+10=0$ к каноническому виду.

В математической системе MathCad создать файл и решить в нем поставленную задачу в соответствии с вариантом (таблица 1, 2). Вариант выбирается по номеру в списке журнала. Сохранить файл под именем «Векторы - Фамилия». Где возможно, получить результат в дробном и вещественном виде. Сохранить файл «Векторы - Фамилия» локальном диске.

В таблице 1 предлагаются рекомендуемые значения параметров по вариантам, в таблице 2 –варианты заданий.

Таблица 1 - Рекомендуемые значения параметров по вариантам

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
m	1	2	3	4	5	6	1	2	3	2	4	4	5	4	2	6
n	5	6	2	1	1	1	6	3	4	4	3	2	3	5	6	2

Таблица 2 - Варианты заданий

1	A(1,0,2)	B(-1,2,3)	C(2,3,1)	D(-3,4,5,)
2	A(0,3,-2)	B(4,1,3)	C(-1,1-1)	D(3,2,4)
3	A(-1,-1,0)	B(1,1,1)	C(-2,1,0)	D(0,-2,7)
4	A(0,2,0)	B(-2,0,0)	C(3,1,0)	D(0,-1,-3)
5	A(2,1,-1)	B(-1,-3,-1)	C(0,-1-1)	D(2,4,1)
6	A(2,2,-1)	B(0,0,0)	C(0,-4,0)	D(2,0,0)
7	A(-3,2,4)	B(-3,-3,4)	C(0,-3,4)	D(-1,-1,4)
8	A(5,6,1)	B(6,1,4)	C(1,2,3)	D(2,0,2)
9	A(-5,6,0)	B(-6,-2,1)	C(-3,4,-1)	D(-1,-7,0)
10	A(10,9,0)	B(9,8,1)	C(8,7,1)	D(7,6,0)
11	A(7,7,0)	B(5,6,0)	C(4,5,1)	D(3,4,1)
12	A(-5,-2,0)	B(-3,-3,1)	C(0,5,0)	D(9,6,1)
13	A(-1,0,-1)	B(1,1,-1)	C(1,2,-3)	D(0,-2,-4)

14	A(1,6,2)	B(-1,0,1)	C(4,2,3)	D(-1,-1,4)
15	A(3,6,4)	B(3,5,3)	C(2,4,2)	D(1,0,1)
16	A(7,2,7)	B(9,1,7)	C(9,7,6)	D(-1,-1,7)
17	A(4,-3,2)	B(1,-7,2)	C(-1,0,1)	D(1,1,1)
18	A(0,-5,3)	B(2,2,2)	C(0,-3,1)	D(7,7,2)
19	A(1,6,7)	B(0,6,7)	C(-4,5,6)	D(-4,-4,8)
20	A(2,1,-1)	B(-1,-3,-1)	C(0,-1-1)	D(2,4,1)

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 4 ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Тема 4.1 Комплексные числа

Практическая работа 10 Действия над комплексными числами (2ч.)

Цель:

- Обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об алгебраической форме, тригонометрической форме комплексных чисел;
- Формирование умений по выполнению действий над комплексными числами в алгебраической форме, тригонометрической форме.

Студент должен:

*Знать***:**

- понятие комплексного числа;
- алгебраическую форму записи комплексного числа;
- операции над комплексными числами в алгебраической форме;
- геометрическую интерпретацию комплексного числа;
- тригонометрическую форму записи комплексного числа;
- операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

Уметь:

- выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме;
- изображать комплексные числа в плоскости.

Средства обучения: доска, мел.

Краткие теоретические сведения

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где $i = \sqrt{-1}$ (или $i^2 = -1$) и $a, b \in R$.

Число a называется ***действительной частью*** комплексного числа $z = a + bi$, а число b его ***мнимой частью***. Для их обозначения используются символы $a = Re\, z$, $b = Im\, z$.

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются ***равными***, если равны их действительные и мнимые части, т.е. если выполняются равенства

$$a_1 = a_2, \qquad b_1 = b_2.$$

Суммой (разностью) двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 \pm z_2$ вида

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ можно найти, почленно умножая числа z_1 и z_2:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Таким образом, ***произведением двух комплексных чисел*** $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2$ вида

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Для числа $z = a + bi$ комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется ***сопряжённым.***

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется ***модулем*** комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Следствие:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

Комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой $(a;b)$ на координатной плоскости. Координатная плоскость в этом случае называется комплексной плоскостью. При этом ось Ox называется действительной осью и обозначается $\operatorname{Re} z$, а ось Oy — мнимой осью и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Очень важной является интерпретация комплексного числа $z = a + ib$ как вектора $\overrightarrow{OA}$ с координатами $(a; b)$ на комплексной плоскости с началом в точке O (0; 0) и концом в точке A с координатами $(a; b)$. Рассмотренные интерпретации комплексного числа позволяют называть комплексное число вектором или точкой на комплексной плоскости (рисунок 21).

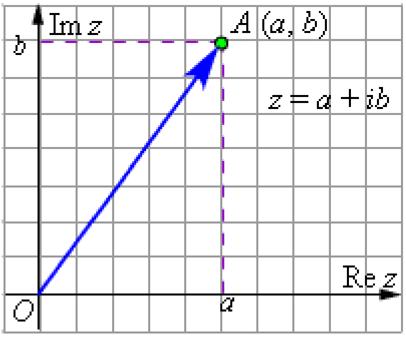


Рисунок 21 - Геометрическое изображение комплексного числа

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа и обозначается

$$\varphi = Arg\, z.$$

Очевидно, что у комплексного числа z имеется бесконечно много аргументов: если φ_0 − какой-либо аргумент числа z, то все остальные можно найти по формуле $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$, $n \in Z$.

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi; \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется ***тригонометрической формой записи комплексного числа.***

Из последней системы находим:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$
$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом, аргументом отличного от нуля комплексного числа $z = a + bi$ является любое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Среди всех аргументов комплексного числа z всегда есть один и только один, удовлетворяющий неравенствам:

$$0 \le \varphi < 2\pi .$$

Это означает, что мы можем однозначно определить аргумент любого отличного от нуля комплексного числа.

Произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Частное комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

Для возведения комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в n-ю степень используется формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется **формулой Муавра** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик)

Для извлечения корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найдите сумму комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -3 - i$.

Решение: $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-3 - i) = 2 + 3i - 3 - i = -1 + 2i$.

Пример 2 Вычислите $z_1 - z_2$, если $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -3 + i$.

Решение: $z_1 - z_2 = 5 - 2i - (-3 + i) = 5 - 2i + 3 - i = 8 - 3i$.

Пример 3 Найдите произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -1 - i$.

Решение: $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (-1 - i) = (-2 + 3) + (-3 - 2)i = 1 - 5i$.

Пример 4 Дано $z_1 = 12 + 5i$ $z_2 = 3 - 4i$. Найти $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 - 4i)} = \frac{36 + 15i + 48i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{16 + 63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i$$

Пример 5 Записать комплексное число $z = \frac{5 + i}{(1 + i)\cdot(2 - 3i)}$, в виде $a + bi$

$$z = \frac{5 + i}{2 + 2i - 3i - 3i^2} = \frac{5 + i}{5 - i} = \frac{(5 + i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{25 + 10i + i^2}{25 - i^2} = \frac{24 + 10i}{26} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$$

Пример 6 Постройте точки, изображающие комплексные числа:

$1;\ -i;\ -1 + i;\ 2 - 3i$

Точки, изображающие комплексные числа, представлены на рисунке 21

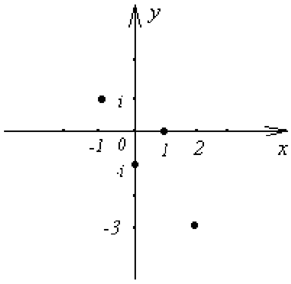


Рисунок 21 – Геометрическое изображение комплексных чисел

Пример 7 Представить в тригонометрической форме комплексное число *1– i*.

Решение: a = 1, b = -1.

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$

$$\begin{cases} \cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \ \varphi=\frac{7\pi}{4}$$

$$1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Пример 8 Найти произведение комплексных чисел $z_1=2\cos 50^o+2i\sin 50^o$, $z_2=\cos 40^o+i\sin 40^o$.

Решение: Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$$z_1=2\left(\cos 50^o+i\sin 50^o\right),$$

$$z_2=1\left(\cos 40^o+i\sin 40^o\right).$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2=2\cdot 1\left(\cos\left(50^o+40^o\right)+i\sin\left(50^o+40^o\right)\right)=2\cdot\left(\cos 90^o+i\sin 90^o\right)=2\left(0+i\right)=2i$$

Пример 9 Найти частное комплексных чисел

$$z_1=2\cos 50^o+2i\sin 50^o,$$

$$z_2=\cos 40^o+i\sin 40^o.$$

Решение: Тригонометрические формы этих чисел имеют вид:

$$z_1=2\left(\cos 50^o+i\sin 50^o\right),$$

$$z_2 = 1\left(\cos 40^o + i\sin 40^o\right).$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}\left(\cos\left(50^o - 40^o\right) + i\sin\left(50^o - 40^o\right)\right) = 2\cdot\left(\cos 10^o + i\sin 10^o\right).$$

Пример 10 Вычислите $(1 + i)^{100}$.

Запишем комплексное число $1 + i$ в тригонометрической форме.

$a = 1$, $b = 1$.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$(1+i)^{100} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{100} = \sqrt{2}^{100}(\cos\frac{100\pi}{4} + i\sin\frac{100\pi}{4}) = 2^{50}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) =$$
$$= 2^{50}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{50}$$

Пример 11 Найти $\sqrt[3]{-1+i}$

Решение: Представим (-1 + i) в тригонометрической форме.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\Psi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

-1 + i = $\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4})$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}*(\cos\frac{3\pi}{4} + i*\sin\frac{3\pi}{4})} = ?$$

k=0,1,2

$$t_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{3} + i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}) = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$t_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}) = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$t_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

На комплексной плоскости найденные значения корня представляют равностоящие друг от друга точки t_0, t_1, t_2, которые расположены на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$.

Содержание заданий

1 Вычислить:

а) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;

б) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

в) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;

г) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

д) $(2 - i)^2$;

е) $(1 + 2i)^3$.

2 Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

а) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

б) $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$;

в) $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$.

3 Вычислить:

а) i^{13}; б) i^{65}; в) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$

г) $\frac{5}{1+2i}$; д) $\frac{2i-3}{1+i}$; е) $\frac{2+3i}{i}$

ж) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; з) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; и) $(2-i)^2$.

4 Найти z^{-1}, если:

а) $z = 7 - 12i$;

б) $z = 3 + 4i$;

в) $z = -3 + 7i$;

г) $z = i$.

5 Вычислить:

а) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 - i)^7$;

б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$;

в) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6 Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

7 Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - i$; 2) $z_1 = -3, \quad z_2 = 4i$.

8 Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

а) $z = 1 + i$;

б) $z = \sqrt{3} - i$;

в) $z = \sqrt{2}i$;

г) $z = 2$;

д) $z = -i$.

9 Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1, -1, i, $-i$; $z = 3 - 3i$; $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}i}{2}$.

10 Даны числа $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos\dfrac{\pi}{24} + i\sin\dfrac{\pi}{24}$.

Вычислить: 1) $z_1z_2z_3$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$; 3) $\dfrac{z_1z_2}{z_3}$; 4) $\dfrac{z_1z_3}{z_2}$.

11 Вычислить $|z|$ и arg$z$, если $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

12 Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

13 $x^2+x+1=0$.

14 $x^3+x^2+2x-4=0$.

15 $x^2+3x+4=0$.

16 $x^3-27=0$.

17 $x^3-4x^2-4x-5=0$.

18 $x^3+8x^2+15x+18=0$.

19 $x^3-6x+9=0$.

20 $x^3+6x+2=0$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическая работа 11 Решение задач теории комплексных чисел в MathCad (2ч.)

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач теории комплексных чисел. Приобретение навыков работы с комплексными числами в пакете MathCad.

Студент должен:

Знать:

- понятие комплексного числа;
- алгебраическую форму записи комплексного числа;
- операции над комплексными числами в алгебраической форме;
- геометрическую интерпретацию комплексного числа;
- тригонометрическую форму записи комплексного числа;
- операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

Уметь:

- выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме;
- выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме;
- изображать комплексные числа в плоскости.

Средства обучения: доска, мел.

Краткие теоретические сведения

1 Различные формы представления комплексных чисел. Способы определения комплексного числа

- Комплексные числа в алгебраической форме. Первый способ:

$$\begin{array}{lll} arl := 2 & aim := 3 & a := arl + aim \cdot i \\ Rb := 0 & Ib := 3 & b := Rb + Ib \cdot i \\ d1 := 2 & d2 := -3 & d := d1 + d2 \cdot i \end{array}$$

Для того чтобы ввести мнимую единицу i, наберите на клавиатуре **1i** и щелкните мышью вне выделяющей рамки

$$\begin{array}{l} a \text{ complex } \rightarrow 2 + 3 \cdot i \\ b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i \\ d \text{ complex } \rightarrow 2 - 3 \cdot i \end{array}$$

Для того чтобы отобразить комплексное число в рабочем документе в алгебраической форме, щелкните в панели **Symbolic** по ключевому слову **complex** и введите в помеченной позиции имя комплексной переменной и щелкните мышью вне выделяющей рамки

- Комплексные числа в алгебраической форме. Второй способ:

$$\begin{array}{ll} a := 2 + 3 \cdot i & a \text{ complex } \rightarrow 2 + 3 \cdot i \\ b := 3 \cdot i & b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i \end{array}$$

$$d := 2 - 3\cdot i \qquad d \text{ complex } \to 2 - 3\cdot i$$

– Комплексные числа в алгебраической форме. Третий способ:

$$a := 2 + \sqrt{-9} \qquad a \text{ complex } \to 2 + 3\cdot i$$

$$b := \sqrt{-9} \qquad b \text{ complex } \to 3\cdot i$$

$$d := 2 - \sqrt{-9} \qquad d \text{ complex } \to 2 - 3\cdot i$$

– Комплексные числа в тригонометрической форме.

$$z := 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \qquad z \text{ complex } \to \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{3}{2}\cdot i$$

– Комплексные числа в показательной форме

$$z := \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\cdot i} \qquad z \text{ complex } \to \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} + \frac{3}{4}\cdot i\cdot\sqrt{2}$$

– Действительная и мнимая части комплексного числа

$$z := 1 - i \qquad \mathrm{Re}(z) = 1 \qquad \mathrm{Im}(z) = -1 \qquad z \text{ complex } \to 1 - i$$

$$z := e^{\frac{\pi}{2}\cdot i} \qquad \mathrm{Re}(z) = 0 \qquad \mathrm{Im}(z) = 1 \qquad z \text{ complex } \to i$$

$$z := 5\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \qquad \mathrm{Re}(z) = 2.5 \qquad \mathrm{Im}(z) = 4.33 \qquad z \text{ complex } \to \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cdot i\cdot\sqrt{3}$$

– Модуль и аргумент комплексного числа

$$z := 1 - i$$

$$|z| = 1.414 \qquad |z| \to \sqrt{2}$$

Для того чтобы найти модуль комплексного числа, щелкните в панели **Calculator** по символу модуля и введите в помеченной позиции имя числа

$$\arg(z) = -0.785 \qquad \arg(z) \to \frac{-1}{4}\cdot\pi$$

Для того чтобы найти аргумент комплексного числа, введите имя функции **arg** и укажите в скобках комплексное число (или его имя)

$$z \text{ complex } \rightarrow 1 - i$$

$$z := e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}$$

$|z| = 1$ $|z| \rightarrow 1$ $\arg(z) = 1.571$ $\arg(z) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi$

$$z \text{ complex } \rightarrow i$$

$$z := 5 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$|z| = 5$ $|z| \rightarrow 5$ $\arg(z) = 1.047$ $\arg(z) \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi$

$$z \text{ complex } \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}$$

– Вычисление комплексно - сопряженного числа

$$z := 2 + 3 \cdot i$$

$\bar{z} = 2 - 3i$

Для того чтобы определить комплексно сопряженное к числу z, введите с клавиатуры z и затем символ " (кавычки)

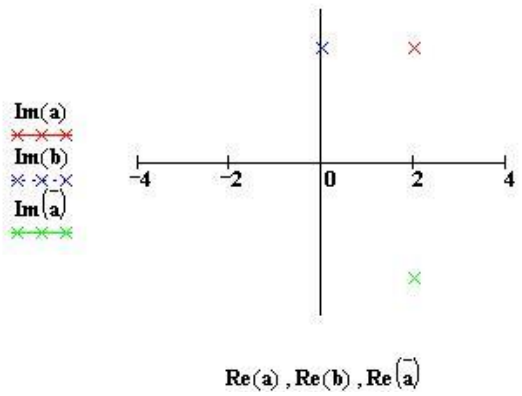
$z := 5 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$ $z = 2.5 + 4.33i$ $z \rightarrow \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}$

$\bar{z} = 2.5 - 4.33i$ $\bar{z} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}$

– Изображение комплексных чисел на комплексной плоскости

Комплексные числа a, b и $\bar{a}$ определены выше:

$a \text{ complex } \rightarrow 2 + 3 \cdot i$ $b \text{ complex } \rightarrow 3 \cdot i$ $\bar{a} \text{ complex } \rightarrow 2 - 3 \cdot i$



Для того чтобы отобразить комплексное число на комплексной плоскости

– щелкните в панели **Graph** по символу декартова графика,
– в открывшемся окне графиков введите в помеченной позиции возле оси абсцисс, разделяя запятой, имена действительных частей комплексных чисел,
– в позиции возле оси ординат - имена мнимых частей,
– щелкните вне поля графиков.

Для того чтобы установить стиль изображения щелкните по графику дважды и посмотрите метки в полях ввода, чтобы понять, как определен стиль изображения для приведенного графика.

2 Арифметические действия с комплексными числами

– Сложение и его свойства

$a := 2 + 3 \cdot i$ $\qquad$ $b := -3 + 5 \cdot i$

Для того чтобы ввести мнимую единицу i, наберите на клавиатуре **1i** и щелкните мышью вне выделяющей рамки

$a \text{ complex } \rightarrow 2 + 3 \cdot i$

$b \text{ complex } \rightarrow -3 + 5 \cdot i$

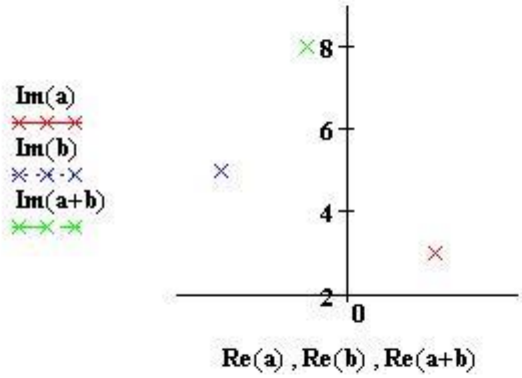
$c := a + b$ $\qquad$ $c = -1 + 8i$

$\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b) = -1$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b) = 8$

$\bar{a} + a = 4$

$\bar{a} - a = -6i$

Для того чтобы определить комплексно сопряженное к числу a, введите с клавиатуры a и затем символ " (кавычки)



Для того чтобы отобразить комплексное число на комплексной плоскости

- щелкните в панели **Graph** по символу декартова графика,
- в открывшемся окне графиков введите в помеченной позиции возле оси абсцисс, разделяя запятой, имена действительных частей комплексных чисел,
- в позиции оси ординат - имена мнимых частей, и щелкните вне поля графиков.

Для того чтобы установить стиль изображения, щелкните по графику дважды и посмотрите метки в полях ввода, чтобы понять, как определен стиль изображения для приведенного графика.

- Умножение и его свойства

$p := a \cdot b \qquad p = -21 + i$

$|a| \to \sqrt{13} \qquad |b| \to \sqrt{34} \qquad |p| \to \sqrt{442} \qquad |a| \cdot |b| \to \sqrt{13} \cdot \sqrt{34}$

$13 \cdot 34 = 442$

$\arg(a) = 0.983 \qquad \arg(b) = 2.111 \qquad \arg(p) = 3.094$

$\arg(a) + \arg(b) = 3.094$

$a \cdot \overline{a} = 13 \qquad (|a|)^2 = 13 \qquad \arg(a \cdot \overline{a}) = 0$

- Деление и его свойства

$a \text{ complex } \to 2 + 3 \cdot i \qquad b \text{ complex } \to -3 + 5 \cdot i$

$$\frac{a}{b} \to \frac{9}{34} - \frac{19}{34} \cdot i \qquad \frac{a}{b} = 0.265 - 0.559i$$

$$\frac{|a|}{|b|} = 0.618 \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = 0.618$$

$$\arg(a) - \arg(b) = -1.128 \qquad \arg\left(\frac{a}{b}\right) = -1.128$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}} = -0.385 + 0.923\mathrm{i} \qquad \left|\frac{\mathbf{a}}{\overline{\mathbf{a}}}\right| = 1$$

Содержание заданий

1 Вычислить:

а) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;

б) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

в) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;

г) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

д) $(2 - i)^2$;

е) $(1 + 2i)^3$.

2 Вычислить:

а) i^{13}; б) i^{65}; в) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$

г) $\frac{5}{1+2i}$; д) $\frac{2i-3}{1+i}$; е) $\frac{2+3i}{i}$

ж) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; з) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; и) $(2-i)^2$.

3 Найти z^{-1}, если:

а) $z = 7 - 12i$;

б) $z = 3 + 4i$;

в) $z = -3 + 7i$;

г) $z = i$.

4 Вычислить:

а) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3(1 - \mathrm{i})^7$;

б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$;

в) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

5 Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2-3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6+2i$; $2+2i$; $-2+2i$; $-2-2i$.

6 Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1=-2+i,\quad z_2=3-i$; 2) $z_1=-3,\quad z_2=4i$.

7 Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

а) $z=1+i$;

б) $z=\sqrt{3}-i$;

в) $z=\sqrt{2}i$;

г) $z=2$;

д) $z=-i$.

8 Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1, -1, i, $-i$; $z=3-3i$; $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}i}{2}$.

9 Даны числа $z_1=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$, $z_2=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $z_3=\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}$.

Вычислить: 1) $z_1z_2z_3$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$; 3) $\dfrac{z_1z_2}{z_3}$; 4) $\dfrac{z_1z_3}{z_2}$.

10 Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

11 Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ

Основная литература:

1 Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов [Электронный ресурс]: учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 329 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ruhttps://www.biblio-online.ru

2 Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

3 Высшая математика : учебник и практикум для СПО / М. Б. Хрипунова [и др.] [Электронный ресурс]: под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 472 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

4 Потапов, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учебник и практикум для СПО / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 310 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

5 Шипачев, В. С. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум для СПО / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 447 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

Интернет –ресурсы:

6 Белых С.В. Карманный справочник по математике [Электронный ресурс]. - Ростов н/Д: Феникс, 2013. - Изд. 2-е. - 224 с. - Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

7 Белых С.В. Памятка по алгебре и геометрии [Электронный ресурс] . - Ростов н/Д: Феникс, 2014. - 96 с. – Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

8 Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа– Режим доступа: http://www.bymath.net

9 Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября» – Режим доступа: http://mat.1september.ru

10 Задачи по геометрии: информационно-поисковая система – Режим доступа: http://zadachi.mccme.ru

11 Интернет-проект «Задачи» – Режим доступа: http://www.problems.ru

12 Луканкин А.Г. Математика [Электронный ресурс] : учеб. для учащихся учреждений сред. проф. образования / А. Г. Луканкин. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014. - 320 с. - Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

13 Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online) – Режим доступа: http://www.mathtest.ru

14 Математическое образование: прошлое и настоящее. Интернет-библиотека по методике преподавания математики – Режим доступа: http://www.mathedu.ru

15 Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru/collection/matematika

16 Московский центр непрерывного математического образования – Режим доступа: http://www.mccme.ru

17 Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» – Режим доступа: http://www.kvant.info ,http://kvant.mccme.ru

18 Портал Allmath.ru — Вся математика в одном месте – Режим доступа: http://www.allmath.ru

19 Портал Math.ru: библиотека, медиатека, олимпиады, задачи, научные школы,учительская, история математики – Режим доступа: http://www.math.ru

20 Прикладная математика: справочник математических формул, примеры и задачи с решениями – Режим доступа: http://www.pm298.ru

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изм-е-нения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				