Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Старорусский политехнический колледж (филиал)

УТВЕРЖДАЮ:
Директор колледжа
_____________ Алексеева М.А.
«_____»_____________ __2017г.

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине Элементы высшей математики

специальность 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Часть II

(объем аудиторных часов - 26)

Разработал Т.Е.Елисеева

Старая Русса
2017г.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОНДА ВРЕМЕНИ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

Наименование раздела и темы лекции	Вид лекции	Кол-во часов по очной форме обучения
РАЗДЕЛ 5 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА		**8**
Тема 5.1 Последовательность. Предел последовательности	Текущая	2
Тема 5.2 Функция. Предел функции. Непрерывность функции	Текущая	6
РАЗДЕЛ 6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ		**8**
Тема 6.1 Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной	Текущая	4
Тема 6.2 Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков	Текущая	4
РАЗДЕЛ 7 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ		**10**
Тема 7.1 Неопределенный интеграл	Текущая	4
Тема 7.2 Определенный интеграл	Текущая	4
Тема 7.3 Несобственный интеграл	Текущая	2

КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Общие компетенции (ОК)

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Профессиональные компетенции (ПК)

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

РАЗДЕЛ 5 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 5.1 Последовательность. Предел последовательности

План:

1 Числовая последовательность, основные понятия

2 Предел последовательности, свойства предела

1 Числовая последовательность, основные понятия

Если по некоторому закону $\forall n \in N$ поставлено в соответствие вполне определенное число x_n, то говорят, что задана ***числовая последовательность***

$$x_1, x_2, ..., x_n ...$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называют ***элементами (членами)*** последовательности.

Символ x_n - общий элемент (член) последовательности или ***n***–ый член последовательности.

Коротко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n).

2 Предел последовательности, свойства предела

Число ***b*** называют ***пределом последовательности*** (x_n), если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 \in N$, такой что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой***, если последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ - бесконечно малая (и наоборот).

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \left[\begin{array}{l} +\infty, \text{если } x_n > 0, \\ -\infty, \text{если } x_n \langle\ 0. \end{array}\right.$

Свойства пределов последовательности

1^0 (***о пределе суммы***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то сходится и их сумма (разность) и предел суммы (разности) равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n .$$

2^0 (***о пределе произведения***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то сходится и их произведение $(x_n \cdot y_n)$ и предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Следствие: Постоянный множитель $c \in R$ можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n .$$

3^0 (***о пределе частного***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ также сходится и предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0 .$$

4^0 Если последовательность (x_n) - сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > c$, то $x_n > c(x_n < c)$ для всех $n > n_0$.

5^0 ***(Предельный переход в неравенстве):***

Если последовательности (x_n) и (y_n) - сходятся и $(x_n)<(y_n)$ для $\forall n > n_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n .$$

6^0 (***Предел промежуточной последовательности***) – принцип двух милиционеров:

Если последовательность (x_n) и (y_n) - сходятся к одному и тому же пределу b, а последовательность (a_n) такова, что

$$x_n \le a_n \le y_n \text{ для } \forall\, n \in N \text{, то и } \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Пример 1 Вычислить предел последовательности $x_n = \dfrac{5n+2}{3n-1}$.

Решение: x_n представляет собой частное двух многочленов. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель являются величинами бесконечно большими.

Следовательно, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и применить теорему о пределе частного нельзя.

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо и числитель, и знаменатель дроби разделить на старшую степень *n*.

Таким образом, разделим и числитель, и знаменатель на *n*.

Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n+2}{n}}{\frac{3n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{5}{3},$$

т.к. при $n \to \infty$ каждая из дробей $\dfrac{2}{n}$ и $\dfrac{1}{n}$ стремится к нулю.

Пример 2 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-n}{n^2+2n-1}$.

Решение: Это неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n*, т.е. на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-n}{n^2+2n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = 0,$$

т.к. числитель дроби стремится к нулю, а знаменатель к пределу отличному от нуля.

Пример 3 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-4n+2}{7n^2+3n}$.

Решение: Имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на n^3.

Получим $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-4n+2}{7n^2+3n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}=\infty,$$

т.к. предел числителя отличен от нуля, а знаменателя – стремится к нулю.

Пример 4 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Решение: При $n\to\infty$ выражение $\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)$ представляет собой неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность вида $[\infty-\infty]$ надо домножить и разделить данное иррациональное выражение на ему сопряженное.

Итак, умножим и разделим данное выражение на $\left(\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)\left(\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}\right)}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\leftrightarrow\infty}\frac{n^2+2n-3-\left(n^2+3n\right)}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n-3}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=-1.$$

Пример 5 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}+2n}{3n+4}$.

Решение: Это неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Делим числитель и знаменатель на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+2n-1}+2n}{3n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}{3+\frac{4}{n}}=\frac{\sqrt{3}+2}{3}.$$

Пример 6 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^{2}}$.

Решение: Вынесем за скобки в числителе и знаменателе члены, содержащие переменную:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{3^{100}\cdot n^{100}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98}\cdot n^{100}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2}}=\lim_{n\to\infty}9\frac{\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2}}=9.$$

Тема 5.2 Функция. Предел функции. Непрерывность функции

План:

1 Функция одной переменной, основные понятия
2 Предел функции, теоремы о пределах
3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции
4 Односторонние пределы
5 Замечательные пределы
6 Сравнение бесконечно малых. Применение бесконечно малых к вычислению пределов
7 Непрерывность функции
8 Точки разрыва функции и их классификация

1 Функция одной переменной, основные понятия

Пусть X и $У$ – два произвольных множества и $x \in X, y \in У$.

Если каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответствие вполне определенный элемент $y \in У$, то говорят, что на множестве X задана ***функция y= f(x)*** или $y = y(x)$.

При этом переменная x называется ***аргументом функции*** или независимой переменной, а множество X – областью определения функции и обозначаются $D(x)$.

Число y – это ***значение функции*** или зависимая переменная, а множество $У$ – область значений функции, которую обозначают $E(y)$.

Буква f обозначает закон соответствия.

Частным значением функции $y = f(x)$ при фиксированном значении аргумента $x = x_0$ называют $y_0 = f(x_0)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют геометрическое место точек $M(x;f(x))$, где $x \in D(x)$ и $f(x) \in E(y)$.

Способы задания функции

1) *Аналитический способ* – способ задания функции с помощью формулы.

Различают несколько способов аналитического задания функции:

а) Функция задана *явно* формулой $y = f(x)$.

Пример 1 $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$, где $D(x)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

б) Функция задана *неявно* уравнением, связывающем x и y: $F(x;y) = 0$.

Пример 2 $x^2 + y^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r. Если выразить из этого уравнения y через x, то получится две функции: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, которые имеют область определения $D(y) = [-r;r]$, а области значений этих функций будут: для первой - $[0;r]$, для второй - $[-r;0]$.

в) Функция задана *параметрически* с помощью некоторого параметра t, причем и аргумент x, и функция y зависят от этого параметра:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Пример 3 Можно задать окружность $x^2 + y^2 = r^2$ с помощью параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

2) *Табличный способ задания функции*.

Например, таблицы Брадиса задают функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ и другие.

3) *Графический способ задания функции*, когда зависимость функции от её аргумента задается графически.

Сложная и обратная функции

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D(x), а функция $u = g(x)$ определена на D(g), причем $E(g) \subset D(x)$.

Тогда функция $y = F(x) = f(g(x))$ называется *сложной функцией* (или функцией от функции или *суперпозицией* функций f и g).

Пусть задана функция $y = f(x)$ взаимно однозначно отображающая множество X = D(x) на множество Y = E(y).

Тогда функция $x = g(y)$ называется *обратной к функции* $y = f(x)$.

То есть любому $y \in E(y)$ соответствует единственное значение $x \in D(x)$, при котором верно равенство $y = f(x)$.

Замечание. Графики функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ представляют одну и ту же кривую. Если же у обратной функции независимую переменную обозначить x, а зависимую через y, то графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Основные элементарные функции:

y = const (*постоянная функция*). D(x) = R; E(y) = c.

$y = x^n$ (*степенная функция*), n $\in$R, E(y), D(x) зависят от n.

$y = a^x$ (*показательная функция*), $a^a > 0$, $a^a \neq 1$, D(x) = R, E(y) = $(0;+\infty)$.

$y = \log_a x$ (*логарифмическая функция*), $a^a > 0$, $a^a \neq 1$, E(y) =R, D(x) =$(0;+\infty)$.

Тригонометрические функции:

$y = \sin x$, D(y) = R, E(y)=$[-1;+1]$.

$y = \cos x$, D(y) = R, E(y)=$[-1;+1]$.

$y = \mathrm{tg} x$, D(y) = $\bigcup\limits_{n\in Z}(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \dfrac{\pi}{2}+\pi n)$, E($y$) = R.

y = ctg$x$, D(y) = $\bigcup\limits_{n\in Z}(\pi n, \pi + \pi n)$, E($y$) = R.

Обратные тригонометрические функции:

y = arcsin$x$, D(y) = $[-1;+1]$, E(y) = $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

y = arccos$x$, D(y) = $[-1;+1]$, E(y) = $[0;\pi]$.

y = arctg$x$, D(y) = R, E(y) = $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

y = arcctg$x$, D(y) = R, E(y) = $(0;\pi)$.

Графики обратных тригонометрических функций представлены на рисунках 1,2,3,4

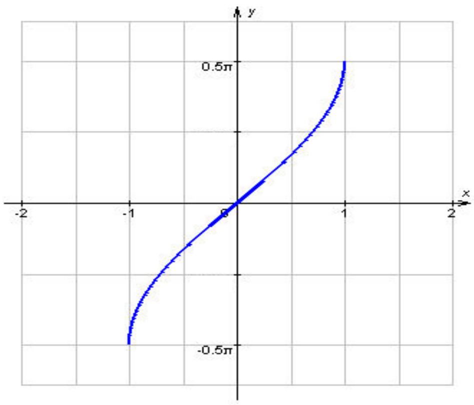


Рисунок 1- y = arcsin$x$

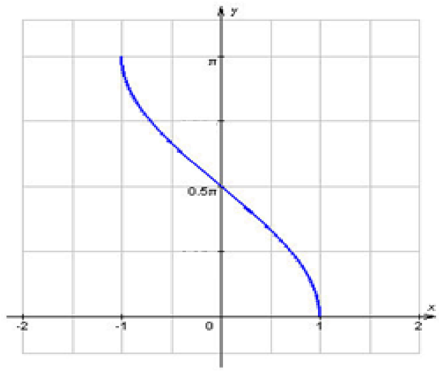


Рисунок 2 - y = arccos$x$

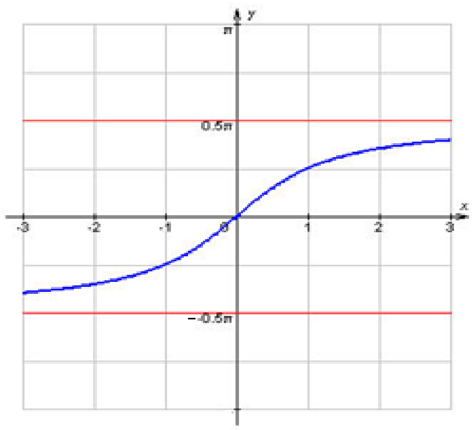


Рисунок 3- y = arctg$x$

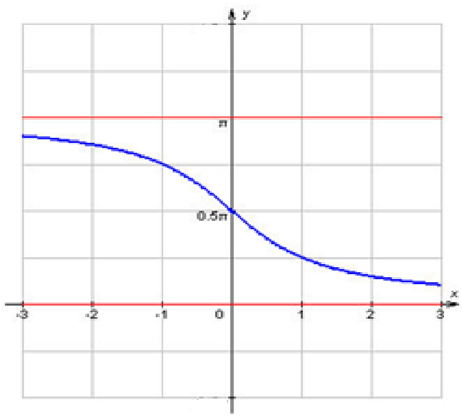


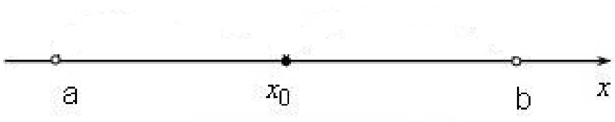
Рисунок 4 - y = arcctg$x$

Элементарной функцией называется функция, составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции.

Например: $y = \log_2(\sin x + \cos^2 x + 3)$ - элементарная функция.

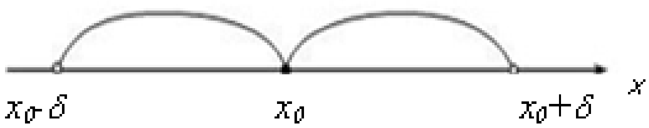
2 Предел функции

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий точку x_0:



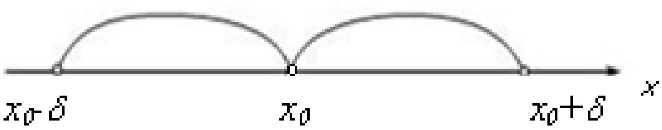
$$x \in (a;b)$$

***δ* - окрестностью точки x_0** называется интервал (x_0-δ ; $x_0+\delta$), длина которого 2δ, симметричный относительно x_0:



$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Проколотой δ - ***окрестностью точки x_0*** называется δ - окрестность точки x_0 без самой точки x_0:



$$x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Пусть точка *x* *о*пределена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, может быть, самой точки x_0.

Число *b* называется ***пределом функции f(x) в точке x_0,*** если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \neq x_0)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (*о единственности предела****).***

Если функция *f(x)* в точке x_0 имеет предел, то он единственный.

Теорема 2 Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 3 Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to x_0}\left(c \cdot f(x)\right) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Теорема 4 Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x} g(x)}, \text{ если } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Теорема 5 (*принцип двух милиционеров*).

Пусть в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0, выполняется неравенство

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b,$ то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$.

Приведенные теоремы облегчают вычисления пределов.

Пример 4 Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4)$.

Решение: Применим последовательно теоремы: о пределе алгебраической суммы, о пределе произведения и ее следствие.

Имеем

$$\lim_{x\to1}(x^4-3x^3+2x^2-x+4)=\lim_{x\to1}x^4-\lim_{x\to1}3x^3+\lim_{x\to1}2x^2-\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}4=$$
$$=\lim_{x\to1}x^4-3\lim_{x\to1}x^3+2\lim_{x\to1}x^2-\lim_{x\to1}x+4=1^4-3\cdot1^3+2\cdot1^2-1+4=3.$$

Замечание: Применение теорем обычно производится в уме, поэтому часто подробная запись решения опускается.

3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функцию *f(x)* называют ***бесконечно малой*** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x)\,\big(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\big).$$

Свойства бесконечно малой функции

1^0 Сумма бесконечного числа функций бесконечно малых в точке x_0 есть функция бесконечно малая в этой точке.

2^0 Произведение бесконечно малой функции в точке x_0 на функцию, ограниченную в некоторой окрестности этой точки, есть функция бесконечно малая в точке x_0.

3^0 (Необходимое и достаточное условие существования предела). Для того чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ необходимо, чтобы $(f(x)-b)$ была бесконечно малой или другими словами $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - функция бесконечно малая в точке x_0.

Функцию f (x) называют ***бесконечно большой*** в точке x_0, если функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая в точке x_0, это равносильно следующему:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x)\,\big(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon\big)$$

Не исключено, что x_0 - это несобственная точка.

Свойства бесконечно большой функции

1^0 Сумма конечного числа бесконечно больших функций в точке x_0 есть функция бесконечно большая в этой точке.

2^0 Сумма бесконечно большой функции в точке x_0 и ограниченной в некоторой окрестности точки x_0 функции является бесконечно большой функцией.

3^0 Произведение бесконечно большой функции в точке x_0 на функцию, которая имеет отличный от нуля предел, называется бесконечно большой функцией.

4^0 Частное от деления бесконечно большой функции в точке x_0 на функцию, имеющую предел в этой точке, является бесконечно большой функцией.

Пример 5 Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3}{8+4x}$.

Решение: Предел знаменателя равен нулю, $\lim\limits_{x\to -2}(8+4x)=0$. В этом случае применить теорему о пределе частного нельзя, т.к. деление на нуль невозможно. Но, если $\lim\limits_{x\to -2}(8+4x)=0$, то величина $(8+4x)$ есть бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{8+4x}$ будет бесконечно больной. Следовательно, при $x\to -2$ произведение $3\cdot\dfrac{1}{8+4x}$ есть бесконечно большая величина и

$$\lim_{x\to -2}\frac{3}{8+4x}=\infty.$$

Пример 6 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$.

Решение: Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$, т.е. имеют место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим и числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

т.к. при $x\to\infty$ каждая из дробей $\dfrac{3}{x},\dfrac{2}{x^2},\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^2}$ стремится к нулю.

Пример 7 Вычислить $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$.

Решение: Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Правило: Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, заданную отношением двух многочленов, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}$

надо и числитель, и знаменатель разделить на множитель $(x-x_0)$, используя обычные правила алгебры. Итак, разделим числитель и знаменатель на $(x+3)$:

$$\begin{array}{r|l} -\;4x^2+11x-3 & x+3 \\ \underline{4x^2+12x\quad\;\;} & \overline{4x-1} \\ -x-3 & \\ -\;\underline{-x-3} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} -\;3x^2+10x+3 & x+3 \\ \underline{3x^2+9x\quad\;\;} & \overline{3x+1} \\ x+3 & \\ -\;\underline{x+3} & \\ 0 & \end{array}$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(4x-1)}{(x+3)(3x+1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x-1}{3x+1}=\dfrac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\dfrac{13}{8}$.

Пример 8 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Решение: В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Правило: Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель иррациональны, надо и числитель, и знаменатель домножить на выражение, сопряженное данному иррациональному.

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 9 Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

Решение: При $x \to -2$ функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин, т.е. имеет место неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Выполним вычитание дробей

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4-12}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 10 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x})$.

Решение: Имеет место неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

Домножим числитель и знаменатель на выражение, дополняющее данное до разности кубов.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}=0.$$

4 Односторонние пределы

Если при нахождении предела функции рассматривать значения x только справа от x_0, то такой предел называется пределом справа.

Число b называют ***пределом функции f(x) в точке*** x_0 ***справа*** (правосторонний предел функции), если выполняется следующее условие:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\left(x\in(x_0;x_0+\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\right).$$

и записывают

$$f(x+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=b.$$

Если $x_0=0$, то пишут $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=b$.

Если при нахождении предела функции рассматривать значения x только слева от x_0, то такой предел называется пределом слева.

Число b называют ***пределом функции f(x) в точке*** x_0 ***слева*** (левосторонний предел функции), если выполняется следующее условие:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\big(x\in(x_0-\delta;x_0)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$$

и записывают

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=b.$$

Если $x_0=0$, то пишут $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}f(x)=b$.

Пределы слева и справа иначе называют односторонними пределами.

Теорема: Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел необходимо, чтобы для нее в этой точке существовали равные односторонние пределы. При этом

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x).$$

Пример 11 Вычислить односторонние пределы функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$$

Решение: $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\sin x=0$, $f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\sin(x^2+1)=1$.

5 Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Используется при раскрытии неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в тригонометрических выражениях.

Следствия первого замечательного предела:

1⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$;

2⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$;

3⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,\alpha x}{x}=\alpha$;

4⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$;

5⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,\alpha x}{tg\,\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}\,(\beta\neq 0)$;

6⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;

7⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;

8⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$;

9⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin \alpha x}{x}=\alpha$;

10⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,\alpha x}{x}=\alpha$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

используют при вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$, где

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=1,\qquad \lim_{x\to x_0}v(x)=\infty.$$

(что дает неопределенность вида 1^∞).

Следствия второго замечательного предела:

1⁰ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

2⁰ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$;

3⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$;

5⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

6⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

7⁰ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

6 Сравнение бесконечно малых. Применение бесконечно малых к вычислению пределов

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции в некоторой точке x_0.

Бесконечно малое α является бесконечно малой более высокого (низкого) порядка, чем β, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\ (\infty).$$

Две бесконечно малые α и β называют ***бесконечно малыми одного порядка***, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0\,.$$

α и β называют ***эквивалентными бесконечно малыми*** в точке x_0 (и записывают $\alpha \sim \beta$), если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\,.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций	
Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$	
$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\ln\left(1+\alpha(x)\right)\sim\alpha(x)$
$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\left(1+\alpha(x)\right)^{\mu}-1\sim\mu\cdot\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\left(\alpha(x)\right)^2$	$\log_a\left(1+\alpha(x)\right)\sim\frac{1}{\ln a}\cdot\alpha(x)$

Применение эквивалентных функций для вычисления пределов

Теорема (Принцип замены эквивалентных функций).

Если $f(x)\sim h(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)};\ \lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)g(x)\,.$$

Пример 12 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}$.

Решение: 1 способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\,.$$

2 способ: используем первое следствие первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1\,.$$

3 способ: используем замену эквивалентной бесконечно малой

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\,.$$

Пример 13 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение: 1 способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin x\cdot\sin x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=\frac{1}{2}.$$

2 способ: используем первое следствие первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

3 способ: используем замену эквивалентной бесконечно малой

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 14 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3}{x}+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{-6}=e^{-6}.$$

7 Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}\in$D(x)**,** если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и предел $f(x)$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}\in$D(x), если она определена в некоторой окрестности этой точки и бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, то есть: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1 Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $c\cdot f(x)$ (c=const), $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$, также непрерывны в точке x_0.

Теорема 2 Если функция $u=u(x)$ непрерывна в точке x_0 и функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=u(x_0)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 3 Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области их определения.

8 Точки разрыва функции и их классификация

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке функция либо не определена, либо определена, но нарушено хотя бы одно из условий определения непрерывности $f(x)$.

Классификация точек разрыва

1) точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода,*** если существуют конечные односторонние пределы.

При этом

если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то x_0 называют ***точкой скачка***;

если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 называют ***точкой устранимого разрыва***.

2) точка x_0 называется ***точкой разрыва II рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 15 Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -\infty<x\le 1,\\ \frac{1}{x-1}, & 1<x\le 3,\\ x-2{,}5, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

Решение: Функция задана на трех промежутках разными формулами. На каждом из промежутков функция непрерывна. Рассмотрим границы промежутков: $x=1$ и $x=3$. В точке $x=1$ замечаем, что

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1} 2^x=2; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Следовательно, $x=1$ — точка разрыва II рода.

В точке $x=3$ вычисляем:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=0{,}5; \quad \lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3}(x-2{,}5)=0{,}5; \quad f(3)=0{,}5.$$

Таким образом, в точке $x=3$ функция непрерывна.

Пример 16 Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва.

$$f(x)=\begin{Bmatrix}\cos\frac{\pi x}{2}, \text{åñëè} |x|\le 1\\ |1-x|, \text{åñëè} |x|>1\end{Bmatrix}$$

Решение. На промежутке (-∞;-1) $f(x)= -x+1$, на (-1;1) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ и на (1;+∞) $f(x) = x-1$.

На этих промежутках $f(x)$ элементарная функция, непрерывна при всех x, принадлежащих этим промежуткам. Необходимо проверить непрерывность в точках $x= -1$ и $x=1$.

1) $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(-x+1)=2$

2) $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\cos\frac{\pi x}{2}=\cos(-\frac{\pi}{2})=0$

Получили, что $f(-1-0)\neq f(-1+0)$ => $x= -1$ – точка разрыва $f(x)$ I рода.

3) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\cos\frac{\pi x}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0$

4) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

Получили, что $f(1\text{-}0) = f(1\text{+}0) = f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ – точка непрерывности функции $f(x)$.

$f(x)$ непрерывна на $(-\infty;-1)$ и на $(-1;+\infty)$, точка $x = -1$ – точка разрыва I рода.

Пример 17 Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на непрерывность

Решение. На промежутках $(-\infty;0)$ и на $(0;+\infty)$ $f(x)$ непрерывна. Исследуем точку $x=0 \notin D(x)$.

1) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow$

=> $x=0$ – точка разрыва $f(x)$ II рода.

РАЗДЕЛ 6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 6.1 Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной

1 Определение производной. Геометрический и механический смысл производной
2 Вычисление производной
3 Производные высших порядков
4 Дифференциал функции

1 Определение производной. Геометрический и механический смысл производной

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D(x)$. Рассмотрим точку $x \in D(x)$ и некоторое число Δx такое, чтобы точка $x+\Delta x \in D(x)$. Это число Δx называется ***приращением аргумента x.***

Приращением функции $y = f(x)$ называется разность $f(x+\Delta x) - f(x)$. Приращение функции $y = f(x)$ обозначают Δy. То есть $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ обозначают: y', $f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}$.

Поэтому можно записать:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то производная существует и функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x. Процесс нахождения производной называется ***дифференцированием*** функции.

Пример 1 Исходя из определения, найти производную функции у $=\frac{1}{x}$.

Решение. $\Delta y= f(x+ \Delta x) - f(x) =$

$$=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}\Rightarrow \Delta y=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x^2+x\cdot\Delta x}=\frac{-1}{x^2+x\cdot 0}=-\frac{1}{x^2}.$$

Т.е. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется по прямой по закону $S=S(t)$ (рисунок6)

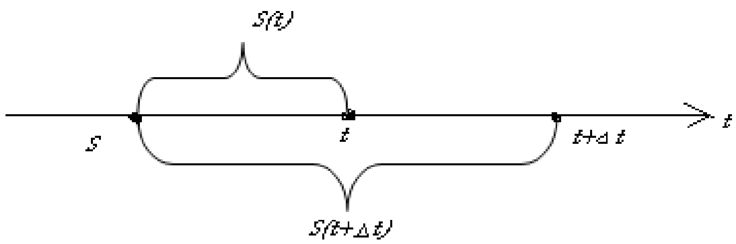


Рисунок 5 - Движение материальной точки

Тогда $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ – расстояние, пройденное за время Δt. Тогда средняя скорость движения:

$$Vcp = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Чтобы найти скорость движения в момент времени t, надо рассмотреть предел Vcp при $\Delta t \to 0$:

$$V(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t).$$

Значит, производная от пути S(t) равна мгновенной скорости точки в момент времени t:

$$S'(t) = V(t).$$

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в окрестности фиксированной точки x_0 (Рисунок 6).

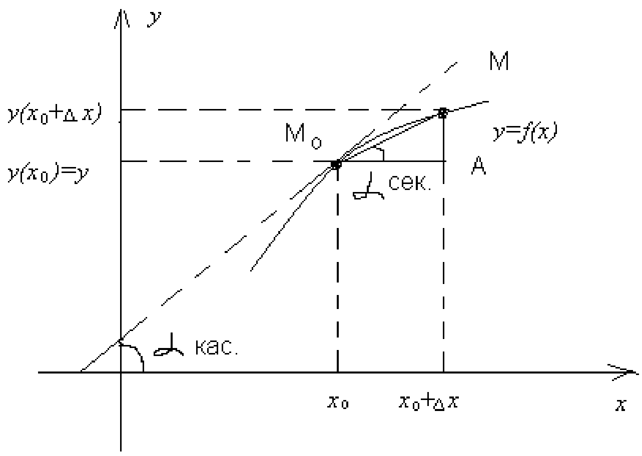


Рисунок 6 - Геометрический смысл производной

Точка $M_0(x_0;y(x_0))$ – фиксированная точка графика $y = f(x)$. Точка $M(x_0+\Delta x;y(x_0+\Delta x))$ при различных значениях Δx – любая точка на графике. Если точка M приближается к точке M_0 (при этом $\Delta x \to 0$), то секущая линия M_0M стремится к своему предельному положению, называемому ***касательной к линии y = f(x) в точке*** $\mathbf{M_0}$**.**

Рассмотрим Δ M_0MA: $tg\alpha_{сек} = \dfrac{MA}{M_0A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\alpha_{сек}$ = угол наклона секущей M_0M к оси Ox.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (M \to M_0)}} tg\alpha_{сек} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) = tg\alpha_{кас}$$

То есть $y'(x_0) = tg\,\alpha_{кас}$ => частное значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;y(x_0))$.

Тогда, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с известным угловым коэффициентом $K_{кас} = y'(x_0)$, можно записать ***уравнение касательной к линии y = f(x) в точке $M_0(x_0;f(x_0))$:***

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$$

Аналогично, можно записать ***уравнение нормали*** – прямой, перпендикулярной касательной и проходящей через точку касания $M_0(x_0;f(x_0))$:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

используя условие перпендикулярности прямых: $K_{норм} = -\frac{1}{K\hat{e}\grave{a}\tilde{n}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

2 Вычисление производной

Правила дифференцирования функций

Пусть $C \in \mathbf{R}$ - постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции, имеющие производные. Тогда

1 $C' = 0$.

2 $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

3 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4 $(C \cdot u)' = C \cdot u'$.

5 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0,$

6 $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$

Правило дифференцирования сложной функции

Если функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, а функция $u = \varphi(x)$ - по x, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Таблица производных элементарных функций

1 $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'$.

2 $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3 $\left(u^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

4 $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

5 $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

6 $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

7 $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$.

8 $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

9 $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

10 $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

11 $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

12 $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

13 $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

14 $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

15 $\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

16 $\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$.

Производная степенно - показательной функции $y = u^v$, где u и v дифференцируемые функции и $u > 0$, определяется формулой

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Пример 2 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найдем производные следующих функций:

1) $y=\sqrt[4]{3x}+5x^2+\frac{7}{x^3}$, 2) $y=\sqrt[5]{(1+3x^2)^3}$,

3) $y=x^2\arcsin x$, 4) $y=\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)$,

5) $y=\frac{x^3}{x-3}$, 6) $y=e^{\frac{x}{3}}\cdot\cos^2 2x$,

7) $y=2^{\sqrt{\sin x}}$, 8) $y=(7x)^{\cos x}(x>0)$.

Решение: 1) Перепишем данную функцию, записав слагаемые в виде степени: $y=\sqrt[4]{3}\cdot x^{\frac{1}{4}}+5x^2+7x^{-3}$. Тогда $y'=(\sqrt[4]{3}\cdot x^{\frac{1}{4}})'+(5x^2)'+(7x^{-3})'=$

$$=\sqrt[4]{3}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+10x+7(-3)x^{-4}=\frac{\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x}}+10x-\frac{21}{x^4}.$$

2) Записываем данную функцию в виде степени: $y=(1+3x^2)^{\frac{3}{5}}$ и вычисляем: $y'=\frac{3}{5}(1+3x^2)^{-\frac{2}{5}}\cdot(1+3x^2)'=\frac{3}{5}(1+3x^2)^{-\frac{2}{5}}6x=\frac{18}{5\sqrt[5]{(1+3x^2)^2}}$.

3) Применив формулу 4 правил дифференцирования, находим:

$$y'=(x^2)'\cdot\arcsin x+x^2\cdot(\arcsin x)'=2x\cdot\arcsin x+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4) Дифференцируя функцию $y=\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)$ как сложную находим производную:

$$y'=\frac{(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x))'}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}\cdot\frac{(\frac{\pi}{4}+x)'}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}+x)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2}+2x)}=\frac{2}{\cos 2x}.$$

5) В соответствии с формулой 5 правил дифференцирования получаем:

$$y'=\frac{(x^3)'(x-3)-x^3\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{3x^2(x-3)-x^3}{(x-3)^2}=\frac{2x^3-9x^2}{(x-3)^2}.$$

6) По аналогии с примером 3 находим:

$$y'=\left(e^{\frac{x}{3}}\right)'\cdot\cos^2 2x+e^{\frac{x}{3}}\cdot(\cos^2 2x)'=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\cdot\cos^2 2x+e^{\frac{x}{3}}\cdot 2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\cdot\cos^2 2x-2e^{\frac{x}{3}}\sin 4x.$$

7) Так как данная функция - показательная, то, согласно формуле 2 таблицы производных

$$y' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot (\sqrt{\sin x})' = 2^{\sqrt{\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \tfrac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x =$$

$$= 2^{\sqrt{\sin x}} \cos x \ln 2 \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}.$$

8) производная степенно-показательной функции $y = (7x)^{\cos x} (x > 0)$, равна $y' = \cos x \cdot (7x)^{\cos x - 1} \cdot (7x)' + (7x)^{\cos x} \cdot \ln(7x) \cdot (\cos x)' =$

$$= 7\cos x \cdot (7x)^{\cos x - 1} - (7x)^{\cos x} \cdot \ln(7x) \cdot \sin x.$$

3 Производные высших порядков

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке производную $y' = f'(x)$, которая в свою очередь, тоже может иметь производную, называемую второй производной для функции $y = f(x)$.

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Она обозначается:

$$y''(x) = (y')' = \frac{d^2y}{dx^2} = \ddot{y}(x)$$

Может случиться, что новая функция $y''(x)$ имеет производную, она называется ***третьей производной*** для функции $y=f(x)$.

Производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка***, т.е.

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

Ее обозначения:

$$y'''(x) = (y'')' = \frac{d^3y}{dx^3} = \dddot{y}(x)$$

Производная "n"-ого порядка функции $y=f(x)$ обозначается:

$$y^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}=(y^{(n-1)}(x))'.$$

Пример 3 $y=x^5-7x^3+2$. Найти третью производную.

Решение: $y'=5x^4-21x^2,\ \ y''=20x^3-42x,\ \ y'''=60x^2-42.$

4 Дифференциал функции

Дифференциалом dx аргумента x называется его приращение Δx.

Дифференциалом *функции* $f(x)$ называется произведение производной этой функции на дифференциал ее аргумента:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, то есть производная функции $f(x)$ равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента x.

Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график дифференцируемой функции в некоторой окрестности точки x_0 (Рисунок 7): из ΔM_0AN: $AN = M_0A\cdot tg\alpha = \Delta x\cdot f'(x_0) = dy$

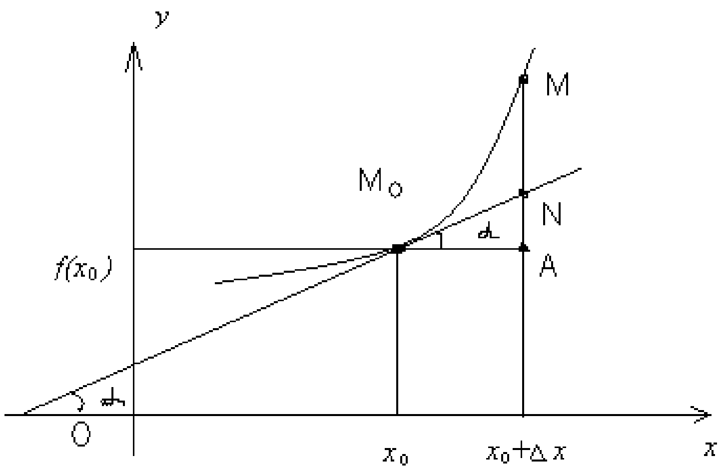


Рисунок 7 – Геометрический смысл дифференциала

Итак: ***дифференциал*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 ***равен приращению ординаты касательной*** (AN), проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, при переходе от x_0 к $x_0+\Delta x$ (от точки M_0 в точку M).

Свойства дифференциала:

1 $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C □ постоянная);

2 $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3 Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x),$$

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

Если при этом $g(x) \neq 0$, то

$$d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

Если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством инвариантности дифференциала.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 y = d(dy)$.

Аналогично: $d^3 y = d(d^2 y)$, …, $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Если $y = f(x)$ и x - независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2 y = y''(dx)^2, d^3 y = y'''(dx)^3, \ldots d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений:

1 ***Вычисление приближенного числового значения функции***

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

2 ***Приближенное вычисление степеней***

$$(x + \Delta x)^n \approx x_0^n + n x_0^{n-1} \Delta x.$$

3 ***Приближенное извлечение корней***

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0} \cdot \Delta x.$$

Пример 4 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = arctgx$.

Решение:

$$dy = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d^2 y = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' (dx)^2 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}(dx)^2.$$

Пример 5 Найти приближенное значение функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 5 \quad \text{при } x=3{,}001.$$

Решение: Представим *x* в виде суммы $x = 3 + 0{,}001$. Приняв $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}001$, найдем $f(x_0) = f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 + 5 = 50$.

Найдем производную и вычислим ее значение в $x_0 = 3$:

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(x_0) = f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 3 = 51,$$

$$f(3{,}001) = f(3 + 0{,}001) \approx 50 + 51 \cdot 0{,}001 = 50{,}051.$$

Пример 6 Найти приближенное значение степени $5{,}013^3$.

Решение: Представим данную степень в виде $(5 + 0{,}013)^3$.

Приняв $x_0 = 5$ и $\Delta x = 0{,}013$ по формуле:

$$(x + \Delta x)^n \approx x_0^n + n x_0^{n-1} \Delta x.$$

Найдем:

$$5{,}013^3 = (5 + 0{,}013)^3 \approx 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}013 = 125{,}975.$$

Пример 7 Найти приближенное значение корня $\sqrt{0{,}96}$.

Решение: Представим данный корень в виде $\sqrt{0{,}96} = \sqrt{1 - 0{,}04}.$

Приняв $x_0 = 1$ и $\Delta x = -0{,}04$ по формуле:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0} \Delta x.$$

Найдем:

$$\sqrt{0{,}94} = \sqrt{1 - 0{,}04} \approx 1 - \frac{0{,}004}{2} = 0{,}98.$$

Тема 6.2 Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

1 Признаки постоянства и монотонности функции
2 Точки экстремума
3 Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции
4 Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке
5 Схема исследования функции. Построение графика

1 Признаки постоянства и монотонности функции

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на промежутке $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2 > x_1$ следует неравенство:

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на промежутке $(a;b)$, если она на этом промежутке является только возрастающей или только убывающей.

Теорема 2 (*достаточные условия монотонности*).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых $x \in (a;b)$, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

2 Точки экстремума

Точка x_0 называется ***точкой минимума (максимума)*** функции $y = f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***.

Теорема (*Необходимое условие экстремума функции*)

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует.

Теорема *(Достаточное условие экстремума)*

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, дифференцируема в некоторой ее окрестности за исключением, может быть, самой этой точки, $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через точку x_0 $f'(x)$ изменяет знак, то точка x_0 является точкой экстремума. Если при этом знак $f'(x)$ меняется.

с «+» на «-», то x_0 - точка максимума,

с «-» на «+», то x_0 - точка минимума.

3 Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен выше любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется ***вогнутой*** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется ***выпуклой*** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** функции $y = f(x)$, если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка: $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

Теорема (*Достаточное условие выпуклости или вогнутости кривой*).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и $f''(x)$ для $x \in (a;b)$ сохраняет свой знак.

Если $f''(x) > 0$ на промежутке $(a;b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ вогнута. Если $f''(x) < 0$ на промежутке $(a;b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ выпукла.

Теорема *(Достаточное условие точки перегиба).*

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0, вторая производная функции $f''(x) = 0$ или не существует и $f''(x)$ меняет свой знак при переходе x через точку x_0, то точка $(x_0;f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

4 Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;b]$.

Число f(c) называется наибольшим (наименьшим) значением функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ и обозначается $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ ($\min\limits_{[a;b]} f(x)$) если выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(\mathrm{c}) \quad (f(x) \ge f(\mathrm{c})) \text{ для любого } x \in [a;b].$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то по свойству непрерывной на отрезке функции, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Схема нахождения этих значений:

1) Найти все точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует. Причем выбрать те точки из полученных, которые попадают на отрезок $[a;b]$.

2) Вычислить значения функции в точках, полученных в п.1.

3) Вычислить значения функции в граничных точках отрезка $[a;b]$ – $f(a)$ и $f(b)$.

4) Из чисел п.2 и п.3 найти наибольшее число M и наименьшее m.

Тогда $M = \max\limits_{[a;b]} f(x),\ m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

5 Асимптоты

Во многих случаях построение графика функции облегчается, если предварительно построить асимптоты кривой.

Прямая называется ***асимптотой графика функции***, если расстояние от переменной точки M графика до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Различают три вида асимптот: ***вертикальные, горизонтальные и наклонные.***

Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{равен } +\infty \text{ или } -\infty$$

Замечание. Если прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, то в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода.

Наоборот. Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ (правой при $x\to+\infty$, левой при $x\to-\infty$и двусторонней, если пределы при $x\to \pm\infty$.равны), если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b\,.$$

Прямая $y = kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** кривой $y = f(x)$ при $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$), если существуют два конечных предела:

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(или x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(или x\to-\infty)}} (f(x) - k\cdot x)$$

Нетрудно видеть, что горизонтальная асимптота $y = b$ является частным случаем наклонной $y = kx + b$ при $k = 0$.

Пример 1 Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Решение.

1) D(y) = $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками разрыва второго рода, так как:

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1+0-1)(-1+0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(+1)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1-0-1)(-1-0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(-0)}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=\left(\frac{1^3}{(1+0-1)(1+0+1)}\right)=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=\left(\frac{1^3}{(1-0-1)(1-0+1)}\right)=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty$$

Поэтому прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются вертикальными асимптотами.

3) Вычислим предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1,\ k=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0, b=0$$

Отсюда следует, что при $x\to+\infty$ прямая $y = 1\cdot x + 0$, т.е. $y = x$ - наклонная асимптота при $x\to+\infty$.

Найдем наклонную асимптоту при $x\to-\infty$.

Вычисляя те же пределы при $x\to-\infty$, получим k = 1 и $b = 0$, то есть прямая $y = x$ является наклонной асимптотой при $x\to-\infty$.

Ответ: $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты

$y = x$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

6 Схема исследования функции. Построение графика

Схема:

1 Найти ***область определения*** функции *D(x)*, т.е. множество тех значений *x*, при которых $y = f(x)$ имеет смысл;

2 ***Исследовать функцию на периодичность***: выяснить, существует ли наименьшее положительное число Т, что

$$f(x+T) = f(x) \text{ для любого } x\in D(x).$$

Если «да», то целесообразно далее исследовать функцию и строить ее график только на некотором отрезке длиной периода Т.

Затем продолжить график на всю область определения, разбивая ее на интервалы длины Т, в которых повторяется картинка графика.

3 ***Исследовать функцию на четность и нечетность***: выяснить, выполняются ли равенства:

$f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(x)$ – четность, график функции симметричен относительно оси OY

$f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(x)$ – нечетность, график функции симметричен относительно начала координат.

4 ***Найти точки пресечения графика функции с осями координат***:

а) с осью Оy: точка $(0;f(о))$, если $О \in D(x)$,

б) с осью Оy: точка $(x_k;0)$, где $x_k \in D(x)$ и является решением уравнения $f(x) = 0$.

5 ***Найти промежутки знакопостоянства***: выяснить, при каких $x \in D(f)$ выполняются неравенства $f(x) > 0$ (при этом график функции расположен выше оси Оx) и $f(x) < 0$ (при этом график функции расположен ниже оси Оx).

6 ***Исследовать функцию на непрерывность, установить тип точек разрыва.***

7 ***Найти вертикальные и наклонные асимптоты***.

8 ***Найти промежутки убывания и возрастания, экстремумы функции***

9 ***Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика***.

10 ***Построить график функции***, используя свойства, установленные в проведенном исследовании. Если в некоторых промежутках график остался неясным, то его уточняют по дополнительным точкам.

Пример 1 Исследовать функцию $y = (x+2)e^{-x}$ и построить ее график.

1 $D(x) = R$.

2 Функция не периодическая.

3 Так как $y(-x)$ # $y(x)$ и $y(-x)$ # $-y(x)$, то функция общего вида, не является ни четной, ни нечетной.

4 Точка пересечения графика

с Оx : (-2;0), с Оy : (0;2)

5 При $x \in (-\infty;-2)$ функция отрицательная,

при $x \in (-2;+\infty)$ функция положительная.

6 Функция непрерывна при $x \in$ R.

7 Вертикальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты: $y = \mathrm{k}x + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)e^{-x}}{x} = \frac{\infty\cdot 0}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{xe^{x}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

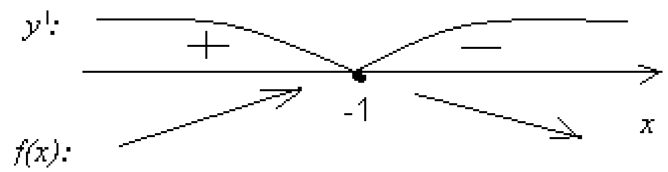
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x} + xe^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) + kx) = \lim_{x\to\infty}((x+2)e^{-x} - 0) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{e^{x}} = 0.$$

Следовательно, $y = 0$ –горизонтальная асимптота

8 $f'(x) = ((x+2)e^{-x})' = 1\cdot e^{-x}+(x+2)\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x-2) = -(x+1)e^{-x}$.

$y' = 0$: $-(x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = -1$, $f(-1) = 1\cdot e^{1} = e$.



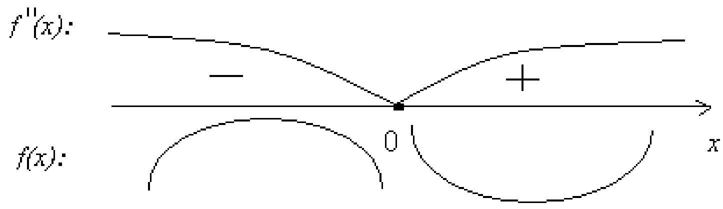
при $x \in (-\infty;-1)$ $f(x)$ возрастает,

при $x \in(-1;+\infty)$ $f(x)$ убывает,

при $x = -1$ $f_{max}(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = \mathrm{e}$.

9 $f''(x) = (-(x+1)e^{-x})' = -1e^{-x}+(x+1)e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x}$.

$f''(x) = 0$: $xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$, $f(0) = 2$.



при $x \in (-\infty;0)$ график $f(x)$ выпуклый

при $x \in (-(0;+\infty)$ график $f(x)$ вогнутый

Точка (0;2) – точка перегиба графика.

10 Сведем результаты проведенного исследования в таблицу 1 и построим график (Рисунок 12)

Таблица 1 –Результаты исследования

x	-∞;-1	-1	-1;0	0	0;+∞
знак $f'(x)$	+	0	-	-	-
знак $f'(x)$	-	-	-	0	+
$F(x)$		e		2	

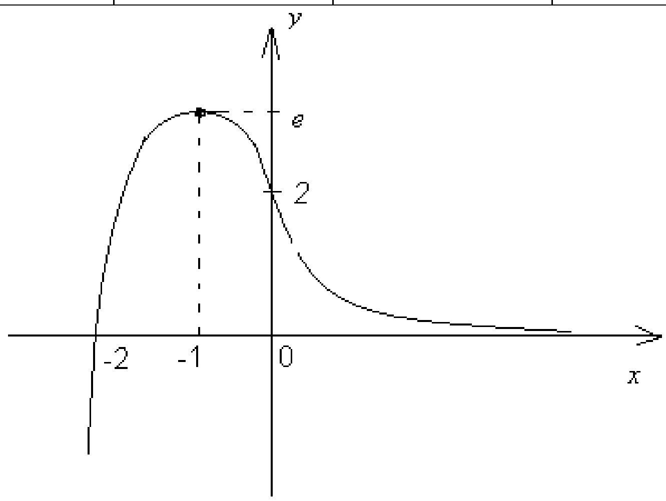


Рисунок 8 – График функции y = (x+2)e^{-x}

РАЗДЕЛ 7 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 7.1 Неопределенный интеграл

План:

1 Понятие неопределенного интеграла

2 Основные свойства неопределённого интеграла

3 Таблица основных интегралов

4 Вычисление неопределенного интеграла

1 Понятие неопределенного интеграла

Функцию $F(x)$ называют первообразной (или примитивной) для функции $f(x)$ на промежутке X, если для $\forall x \in X$ $F'(x) = f(x)$ или то же самое, что $dF(x) = f(x) \cdot dx$.

Действие нахождения первообразной называется интегрированием – операция, обратная для дифференцирования.

Если функция имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных $F(x) + C$, где $C \in R$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на X называется неопределённым интегралом функции $f(x)$.

Обозначение: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$,

где $F(x)$ – одна из первообразных для функции на X,

$f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x) \cdot dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

$\int$ - знак интеграла.

Читается: неопределённый интеграл $f(x)dx$.

2 Основные свойства неопределённого интеграла:

1° Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)\cdot dx\right)' = f(x).$$

2° Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\int f(x)dx = f(x)\cdot dx.$$

3° $\int F'(x)dx = F(x)+C$.

4° Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы С

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

5° Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\forall c\in R,\ c\neq 0 \quad \int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx.$$

6° Интеграл от суммы равен сумме интегралов, т.е. для $\forall$ *f(x)* и *g(x)*

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)\cdot dx = \int f(x)\cdot dx \pm \int g(x)\cdot dx.$$

7° Если *F(x)* первообразная для *f(x)* на *X*, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C.$$

3 Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x+C$	9 $\int \cos(x)dx = \sin(x)+C$
2 $\int 0dx = C$	10 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg^x + C$
3 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1$	11 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg(x)+C$

4 $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	13 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
6 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1$	14 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
7 $\int e^x dx = e^x + C$	15 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C$
8 $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	16 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$

В формулах 1-16 C – произвольная постоянная.

Замечание. Интеграл не от любой элементарной функции является элементарной функцией. Параметрами могут служить следующие интегралы, часто встречающиеся в задачах:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ - интеграл Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x} (0 < x \neq 1)$ - интегральный логарифм,

$\int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (x \neq 0)$ - интегральный косинус и синус.

Указанные функции существуют, имеют важное прикладное значение. Для них составлены таблицы значений.

4 Вычисление неопределенного интеграла

1 *Непосредственное интегрирование*

Вычисление интеграла путём непосредственного использования таблицы простейших интегралов и их основных свойств.

Пример 1 Вычислить интеграл $\int\left(3x^4-7x^3+6x^2+\frac{4}{x}\right)dx$.

Решение: Используя 5^0, 6^0 свойства и таблицу интегралов, имеем

$$\int\left(3x^4-7x^3+6x^2+\frac{4}{x}\right)dx=3\int x^4dx-7\int x^3dx+6\int x^2dx+4\int\frac{dx}{x}=\frac{3x^5}{5}-\frac{7x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+4\ln|x|+C=$$

$$=\frac{3x^5}{5}-\frac{7x^4}{4}+2x^3+4\ln|x|+C$$

Пример 2 Вычислить $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение:

$$\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{5x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+5\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$$

Пример 3 Вычислить $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Решение: $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-arctgx+C$.

Пример 4 Вычислить интеграл $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx$.

Решение: $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx=\int\left(2\cdot 3^2\cdot 5^3\right)^x dx=\int 2250^x dx=\frac{2250^x}{\ln 2250}+C$.

Пример 5 Вычислить интеграл $\int\sin 5xdx$.

Решение: По 7^0 свойству

$$\int\sin 5xdx=-\frac{1}{5}\cdot\cos 5x+C.$$

Пример 6 Вычислить интеграл $\int(\sin x+\cos x)^2dx$.

Решение:

$$\int(\sin x+\cos x)^2dx=\int\left(\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x\right)dx=\int(1+\sin 2x)dx=\int dx+\int\sin 2xdx=$$

$$=x-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Пример 7 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение: По формуле 12 имеем $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C$ (a=2).

Пример 8 Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Решение: По формуле 15 имеем $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln|\, x + \sqrt{4+x^2}\,| + C$.

2 *Метод замены переменной (метод подстановки)*

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула

$$\int \varphi(t)\cdot\varphi'(t)\cdot dt = \int f(x)dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Пример 9 Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение: Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$ или $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$.

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{t\cdot 2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}dt == 2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - 1 + \ln|1+t|\right) + C =$$
$$= x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

Пример 10 Вычислить $\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx$.

Решение: Положим $3+2x^3 = t$.

Дифференцируем обе части равенства: $d\left(3+2x^3\right) = dt$, $6x^2dx = dt$.

Отсюда $x^2dx = \frac{dt}{6}$.

Следовательно,

$$\int x^2\left(3+2x^3\right)^4 dx = \int t^4\cdot\frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + C = \frac{\left(3+2x^3\right)^5}{30} + C.$$

Пример 11 Найти $\int \frac{3xdx}{\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}}$.

Решение: Положим $x^2 - 3 = t$.

Дифференцируем обе части равенства: $d\left(x^2-3\right) = dt$, $2xdx = dt$.

Отсюда $xdx = \frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int\frac{3xdx}{\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}}=\int\frac{3\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt[3]{t^2}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}=\frac{3}{2}\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{t}+C=\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2-3}+C.$$

Пример 12 Найти $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-5}}$.

Решение: Положим $x^4=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d\left(x^4\right)=dt$, $4x^3dx=dt$.

Отсюда $x^3dx=\frac{dt}{4}$.

Следовательно,

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-5}}=\int\frac{\frac{dt}{4}}{\sqrt{t^2-5}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}=\frac{1}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8-5}\right|+C.$$

Пример 13 Вычислить $\int\frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение: Положим $1+2\sin x=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(1+2\sin x)=dt$, $2\cos xdx=dt$.

Отсюда $\cos xdx=\frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int\frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}=\int\frac{3\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=3\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=3\sqrt{t}+C=3\sqrt{1+2\sin x}+C.$$

Пример 14 Вычислить $\int\frac{2\sin xdx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение: Положим $\cos x=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(\cos x)=dt$, $-\sin xdx=dt$.

Отсюда $\sin xdx=-dt$.

Следовательно,

$$\int\frac{2\sin xdx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}=\int\frac{2\cdot(-dt)}{\sqrt{3+t^2}}=-2\int\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}=-2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right|+C=-2\ln\left|\cos t+\sqrt{3+\cos^2 x}\right|+C$$

Пример 15 Вычислить $\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+4}}$.

Решение: Положим $e^{2x}=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d\left(e^{2x}\right)=dt$, $2e^{2x}dx=dt$.

Отсюда $e^{2x}dx=\frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+4}}=\int \frac{3\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}\sqrt{e^{4x}+4}\right|+C.$$

Пример 16 Вычислить $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$.

Решение: Положим $2\ln x+3=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(2\ln x+3)=dt$, $\frac{2dx}{x}=dt$.

Отсюда $\frac{dx}{x}=\frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+C.$$

3 *Метод интегрирования по частям*

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Отсюда следует

$$\int (u\cdot v)'\cdot dx=\int (u'\cdot v+u\cdot v')\cdot dx=\int u'\cdot v\cdot dx+\int u\cdot v'\cdot dx$$

или

$$\int u\cdot v'\cdot dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\cdot dx\ .$$

Отсюда следует формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du\ .$$

Практика показывает, что большая часть интегралов, берущихся с помощью метода интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы.

1) Интегралы вида

$$\int P_n(x)\cos\alpha x dx,\ \int P_n(x)\cdot\sin\alpha x dx,\ \int P_n(x)e^{\alpha x}dx,\ ,$$

где α – некоторое постоянное число,

$P_n(x)$ - многочлен степени n, $n \in N$.

При этом $u = P_n(x)$, $dv = \begin{Bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin\alpha x \\ \cos\alpha x \end{Bmatrix} \cdot dx$

2) Интегралы вида

$$\int P_n(x)\arcsin\alpha x dx,\ \int P_n(x)\arccos\alpha x dx\quad \int P_n(x)\ln^n\alpha x dx,$$

$$\int P_n(x) arctg\,\alpha x dx,\ \int P_n(x) arcctg\,\alpha x dx$$

Тогда за функцию $u = \begin{Bmatrix} \arcsin\alpha x \\ \arccos\alpha x \\ \ln^n\alpha x \\ arctg\,\alpha x \\ arcctg\,\alpha x \end{Bmatrix}$, берут соответствующую из перечисленных, $dv = P_n(x)\cdot dx$

3) Интегралы вида

$$\int e^{dx}\cos\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\sin\beta^x dx,\ \int A^{\alpha x}\cos\beta x dx,$$

$$\int A^{\alpha x}\sin\beta x dx,\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx,$$

где $\alpha, \beta,$ A – постоянные числа, $A > 0$, A # 1.

Такие интегралы берутся двукратным интегрированием по частям при любом выборе u. Это приводит к линейному уравнению относительно предложенного интеграла, откуда его и находят.

Замечание. Указанные три группы не исчерпывают всех без исключения интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

Пример 17 Найти $\int x\sin xdx$.

Решение: Положим $u=x,$ $dv=\sin xdx$.

Тогда $du=dx,$ $v=\int\sin xdx=-\cos x$.

Используя формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x\sin xdx=-x\cdot\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Пример 18 Найти $\int arctgxdx$.

Решение: Положим $u=arctgx,$ $dv=dx$.

Тогда $du=\dfrac{dx}{1+x^2},$ $v=\int dx=x$.

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int arctgxdx=xarctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Для вычисления интеграла $\int\dfrac{xdx}{1+x^2}$ применим метод замены переменной.

Положим $1+x^2=t$.

Тогда $d\left(1+x^2\right)=dt,$ $2xdx=dt,$ $xdx=\dfrac{dt}{2}$.

По формуле метода подстановки

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

Итак,

$$\int arctgxdx=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

Пример 19 Найти $\int\ln xdx$.

Решение: Пусть $u=\ln x,$ $dv=dx$.

Тогда $du=\dfrac{dx}{x},$ $v=x$.

По формуле получим

$$\int\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=s\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Пример 20 Найти $\int (2x-3)e^{3x}dx$.

Решение: Пусть $u=2x-3$, $dv=e^{3x}dx$.

Тогда $du=2dx$, $v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}$.

По формуле имеем

$$\int (2x-3)e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}(2x-3)-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}(2x-3)-\frac{2}{9}e^{3x}+C.$$

Пример 21 Найти $\int \left(3x^2+2x-5\right)\ln(x)dx$.

Решение: Положим $u=\ln x$, $dv=\left(3x^2+2x-5\right)dx$.

Тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x^3+x^2-5x$.

По формуле получаем

$$\int \left(3x^2+2x-5\right)\ln(x)dx=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x-\int \frac{x^3+x^2-5x}{x}dx=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x-\int \left(x^2+x-5\right)dx=$$

$$=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x--\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+C$$

Пример 22 Найти $\int x^2e^xdx$.

Решение: Положим $u=x^2$, $dv=e^xdx$.

Тогда $du=2xdx$, $v=e^x$.

Согласно формуле интегрирования по частям, имеем:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Для вычисления интеграла $\int xe^xdx$ снова применим формулу интегрирования по частям.

Положим $u=x$, $dv=e^xdx$.

Тогда $du=dx$, $v=e^x$.

Окончательно получим

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C.$$

Пример 23 Найти $\int e^x\sin xdx$.

Решение: Положим $u=e^x$, $dv=\sin xdx$.

Тогда $du=e^xdx$, $v=-\cos x$.

Применяя формулу метода интегрирования по частям, получаем:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx .$$

Полученный интеграл снова вычисляем методом интегрирования по частям.

Положим $u = e^x$, $dv = \cos x dx$.

Тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$.

По формуле имеем:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx .$$

Таким образом,

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx ,$$

мы пришли к исходному интегралу.

Переносся интеграл из правой части этого равенства в левую, получим:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x);$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Тема 7.2 Определенный интеграл

План:

1 Задача, приводящая к определенному интегралу

2 Свойства определенного интеграла

3 Вычисление определенного интеграла

4 Геометрические приложения определенного интеграла

1 Задача, приводящая к определенному интегралу

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a,b]$.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Ставится задача: вычислить площадь этой криволинейной трапеции (рисунок 9)

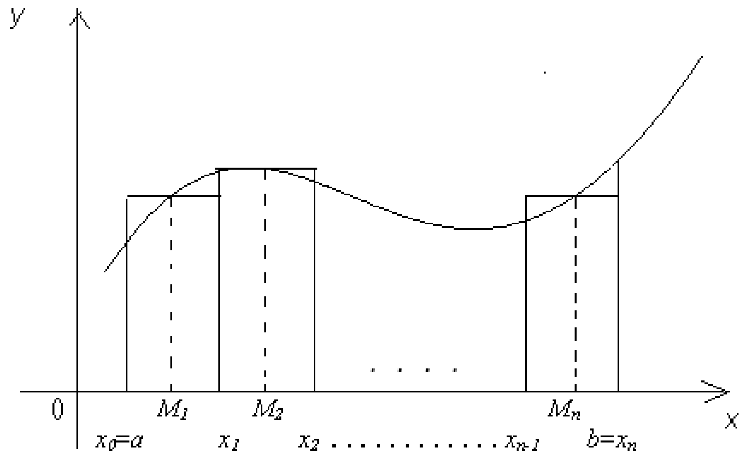


Рисунок 9 – Криволинейная трапеция

Разобьем отрезок $[a,b]$ с помощью точек $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ на более мелкие отрезки $[x_i\ , x_{i+1}]$. Внутри каждого из последних отрезков выберем точку c_i . Построим на каждом из отрезков прямоугольники с высотами, равными значению функции в выбранных точках c_i .

Площади полученных прямоугольников равны: $S_1 = f\ (c_1) \cdot \Delta\ x_1$; $S_2 = f\,(c_2) \cdot \Delta\, x_2$; ….; $S_n = f\ (c_i) \cdot \Delta\, x_i$.

Найдем сумму этих площадей:

$$\bar{S} = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots . + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Получили площадь ступенчатой фигуры. Эта площадь зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и от выбора на каждой из частей точек c_i (i = 1,…, n).

Чем больше будет точек разбиения $[a;b]$ на части и мельче по длине эти части, тем точнее сумма $\bar{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ будет приближаться к площади данной криволинейной трапеции. То есть можно записать:

$$S_{крив.тр.} = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \bar{S} = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum (c_i)\Delta x_i$$

Сумма $\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Предел интегральной суммы S функции $f(x)$ на $[a;b]$ при $n \to \infty$ и $max\Delta x_i \to 0$ называется *определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$*, если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения $[a;b]$ на части, ни от выбора точек c_i ($i = 1,\ldots, n$) на каждой из частей. Следовательно, можно записать:

$$S_{крив.трапеции} = \lim_{n\to\infty} \sum f(c_ш)\Delta x_r = \int_a^b f(x)dx.$$

При этом отрезок $[a;b]$ называют отрезком интегрирования, “a” – нижним пределом интегрирования, “b” – верхним пределом.

Теорема (*Достаточное условие интегрируемости функции на $[a;b]$*)

Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ непрерывна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то есть функция $f(x)$ на $[a;b]$ интегрируема.

2 Свойства определенного интеграла

1^0 Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2^0 Определенный интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

3^0 Если на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

4^0 *Теорема о среднем.* Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

5^0 Для любых трех чисел *a, b, c* имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если только все эти интегралы существуют.

6^0 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3 Вычисление определенного интеграла

1 *Формула Ньютона-Лейбница*

Если F(x) - произвольная первообразная для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1 Вычислить $\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 7)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение:

$$\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+7\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+7x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+7\cdot 2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}+7\cdot(-1)\right)=$$
$$\frac{8}{3}-6+14+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+7=19{,}5$$

Пример 2 Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0)=-(0-1)=1$

2 ***Замена переменных в определенном интеграле.***

Пусть $f(\varphi(x))$ - некоторая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t по формуле $\varphi(x)=t$. Пусть $\varphi(a)=\alpha,\ \varphi(b)=\beta,$ функции $\varphi(x),\varphi'(x)$, $f(\varphi(x))$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Пример 3 Вычислить $\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx$.

Решение: Положим $x^2-7=t$. Тогда $d\left(x^2-7\right)=dt,2xdx=dt,xdx=\frac{1}{2}dt$;

Если $x=2\sqrt{2}$, то t=1; если x=4, то t=9.

Следовательно,

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx=\int_1^9 3\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{3}{2}\int_1^9\sqrt{t}dt=\frac{3}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9=t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=t\cdot\sqrt{t}\Big|_1^9=9\sqrt{9}-1\sqrt{1}=26$$

3 ***Интегрирование по частям.***

Для любых непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

или, в обозначениях $\begin{vmatrix} u = f(x) & dv = g'(x)dx \\ du = f'(x)dx & v = g(x) \end{vmatrix}$, $\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Пример 4 Вычислить $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Решение: Воспользуемся методом интегрирования по частям.

Положим $u = x, \quad dv = e^{-x}dx$.

Тогда $du = dx, \quad v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$.

Следовательно, $\int_0^1 xe^{-x}dx = -x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$.

4 Геометрические приложения определенного интеграла

1 *Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат*

а) Область D ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, причем $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;b]$.

$$S_D = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

б) Область D ограничена кривыми $x = f(y)$ и $x = g(y)$, прямыми $y=c$ и $y=d$, причем $f(y) \geq g(y)$ для $y \in [c;d]$.

$$S_D = \int_c^d \left(f(y) - g(y)\right)dy.$$

2 *Вычисление объема тела вращения*

а) Пусть надо вычислить объем тела, образованного вращением *вокруг оси Ox* криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$.

В таком случае площадь поперечного сечения в т. $x \in [a;b]$ круг радиусом $f(x)$ равна:

$$S(x) = \pi \cdot f^2(x).$$

Тогда объем тела, образованного вращением *вокруг оси Ох* этой криволинейной трапеции, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

б) Объем тела, образованного вращением *вокруг оси Ох* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$, $y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Тема 7.3 Несобственные интегралы

План

1 Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Изучая определенный интеграл от функции $f(x)$, мы требовали, чтобы $f(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

1) была определена на *конечном* отрезке $[a;b]$;

2) была непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если нарушено одно из указанных условий, то речь будет идти о *несобственных интегралах* первого и второго рода.

1 Несобственные интегралы по бесконечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ или $(-\infty;a]$ или $(-\infty;+\infty)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется ***несобственным интегралом первого рода*** или ***несобственным интегралом от f (x) на бесконечном промежутке*** $[a;+\infty)$, обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и в этом случае говорят, что интеграл ***сходится.***

Если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует или равен ∞, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***расходятся.***

Аналогично определяются интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_b^a f(x)dx+\lim_{c\to\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$$

Если пределы конечные, то соответствующий интеграл считают ***сходящимся,*** а если хотя бы один из пределов не существует или бесконечный, то интеграл считают ***расходящимся.***

Пример 1 Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b xe^{-2x}dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & du=dx \\ dV=e^{-2x}dx & V=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x}\Bigg|_1^b+\frac{1}{2}\int\limits_1^b e^{-2x}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{+2b}}+\frac{e^{-2}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Bigg|_1^b\right)=$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{2b}}+\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-2b}+\frac{1}{4}e^{-2}\right)=-\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{2e^{2b}}-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{2b}}+\frac{3}{4e^2}=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4e^{2b}}-0+\frac{3}{4e^2}=\frac{3}{4e^2}$$

Так как получили конечное число, то интеграл $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$ сходится и равен $\frac{3}{4e^2}$.

2 Несобственные интегралы от неограниченных функций

1) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, а в точке $x=b$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x=b$ будем называть ***особой точкой*** функции $f(x)$.

Если существует конечный предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** от функции f (x) на отрезке [a;b] и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ***сходится*** и пишут равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если конечный предел не существует или он бесконечный, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ***расходится.***

2) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, а в точке $x=a$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x=a$ называют особой точкой функции $f(x)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ***сходится*** и пишут равенство:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Если конечный предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ***расходится.***

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x=c$ *внутри* отрезка $[a;b]$, то по определению полагают:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right)$$

при условии, что *оба* предела в правой части существуют, и ε и δ не зависят друг от друга. Этот интеграл также называют ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Сходимость или ***расходимость*** такого интеграла зависит от существования или не существования конечного предела.

Пример 2 Исследовать на сходимость

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dV=dx & V=x \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Bigg|_\varepsilon^1 - x\Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(0 + \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1$$

Так получили конечное число, то $\int_0^1 \ln x dx$ сходится и равен «-1».

Пример 3 Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Так как получили конечное число, то $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Пример 4 Исследовать на сходимость:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^1 \frac{dx}{x^2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} \right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\delta^1 \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) = \infty + \infty = \infty$$

Так получили бесконечность, то $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится.