Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Старорусский политехнический колледж (филиал)

Учебно-методическая документация

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ЧАСТЬ II

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Квалификация техник - программист

Рассмотрены и утверждены
Методическим советом колледжа
(протокол № 51 от 12.10.2017 г)

Разработчик:

Елисеева Т.Е., преподаватель математики высшей квалификационной категории.

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка………………………….……………………..… 4
Тематический план………..………………………………………… 7
Содержание практических занятий……………………..…………….. 16
Практическое занятие № 12……………………………………………… 16
Практическое занятие № 13……………………………………………… 22
Практическое занятие № 14……………………………………………… 30
Практическое занятие № 15……………………………………………… 37
Практическое занятие № 16……………………………………………… 42
Практическое занятие № 17……………………………………………… 47
Практическое занятие № 18……………………………………………… 52
Практическое занятие № 19……………………………………………… 57
Практическое занятие № 20……………………………………………… 65
Практическое занятие № 21……………………………………………… 73
Практическое занятие № 22……………………………………………… 73
Практическое занятие № 23……………………………………………… 81
Практическое занятие № 24……………………………………………… 86
Практическое занятие № 25……………………………………………… 86
Практическое занятие № 26……………………………………………… 94
Практическое занятие № 27……………………………………………… 100
Информационное обеспечение обучения……………………………….. 104
Лист регистрации изменений……………………………………….... 106

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по практическим занятиям (часть II), являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине Элементы высшей математики составлены в соответствии с:

1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах;
2 Рабочей программой учебной дисциплины;
3 Аннотацией основной профессиональной образовательной программы по специальности СПО 09.02.03 Программирование в компьютерных системах базовой подготовки;
4 Положением о планировании, организации и проведении лабораторных работ и практических занятий студентов, осваивающих основные профессиональные образовательные программы среднего профессионального образования в колледжах НовГУ.

Методические рекомендации включают 16 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины в объёме 32 часов.

Перед практическим занятием следует изучить соответствующий теоретический материал и разобраться в решении примеров, приведенных в практикуме. Это позволит выполнить большее количество упражнений на практическом занятии, получить консультацию по вопросам и примерам, вызвавшим затруднение.

Краткие теоретические сведения включают определения, основные теоремы, формулы, знание которых необходимо для решения упражнений по данной теме. Это позволяет использовать практикум, не прибегая к учебникам. Затем на примерах, в процессе решения типовых задач, иллюстрируются методы их решения. Иногда даются несколько способов решения одной и той же задачи для сравнения эффективности методов.

Содержание заданий содержат задания на отработку понятий и методов решения задач.

Количество упражнений значительно превышает необходимый минимум для усвоения материала, что позволяет использовать личностно-ориентированную технологию обучения и применять различные формы организации занятий: фронтальную, индивидуальную, групповую.

После практических занятий проводятся проверочные работы, представленные в методических рекомендациях по оценке качества подготовки обучающихся. Они позволяют выявить уровень усвоения пройденного материала.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен:

уметь:

- выполнять действия над матрицами и решать системы уравнений;
- решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;
- пользоваться понятиями теории комплексных чисел.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления;
- основы теории комплексных чисел.

Перечень формируемых компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Выполнять разработку спецификаций отдельных компонент.

ПК 1.2. Осуществлять разработку кода программного продукта на основе готовых спецификаций на уровне модуля.

ПК 2.4. Реализовывать методы и технологии защиты информации в базах данных.

ПК 3.4. Осуществлять разработку тестовых наборов и тестовых сценариев.

Тематический план и содержание учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	**Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся, курсовая работа (проект)** *(если предусмотрены)*	**Объем часов**	**Уровень освоения**
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 5 Основы математического анализа		**24**	
Тема 5.1 Последовательность. Предел последовательности	**Содержание учебного материала**	2	
	Числовые последовательности, способы задания. Предел последовательности, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Предел монотонной последовательности.		
	Практические занятия	2	

	Предел последовательности – нахождение пределов последовательностей; – раскрытие неопределенностей.		
	Самостоятельная работа обучающихся: Проработка теоретического и практического материала	2	
Тема 5.2 **Функция.** **Предел функции.** **Непрерывность функции**	**Содержание учебного материала**	6	
	Действительная функция действительной переменной, способы задания. Предел функции. Теорема о единственности предела функции. Свойства пределов функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Односторонние пределы. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Непрерывные функции. Критерий непрерывности функции в точке. Теорема о непрерывности суммы, произведения, частного непрерывных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции. Свойства непрерывной функции на отрезке (Теоремы Больцано - Коши. Теоремы Вейерштрасса). Разрывы непрерывности функции. Классификация разрывов непрерывности функции.		2

	Практические занятия Предел функции – нахождение пределов функций; – раскрытие неопределенностей. Односторонние и замечательные пределы. – вычисление односторонних пределов; – применение замечательных пределов и эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов; Непрерывность функции – исследование функции на непрерывность; – определение точек разрыва функции. Решение задач основ математического анализа в пакете MathCad	6	
	Самостоятельная работа обучающихся: Элементарные функции, их свойства и графики. Таблица Типовой расчет по теме Предел функции	6	
Раздел 6 Дифференциальное исчисление функции одной независимой		**22**	

переменной			
Тема 6.1 Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной	**Содержание учебного материала**	4	
	Понятие производной функции. Необходимое условие существования производной. Геометрический и механический смысл производной. Касательная и нормаль к линии на плоскости. Уравнения касательной и нормали к линии на плоскости. Вычисление производной: дифференцирование суммы, произведения и частного, дифференцирование сложной и обратной функций, производные основных элементарных функций, логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Правила вычисления производных высших порядков. Таблица производных высших порядков. Понятие первого дифференциала функции. Связь между дифференцируемостью и существованием производной функции. Геометрический и механический смысл первого дифференциала. Вычисление первого дифференциала: правила дифференцирования, основные формулы, инвариантность формы первого дифференциала.		2
	Практические занятия	6	

	Производная функции – нахождение производных сложных функций с помощью правил и формул дифференцирования, логарифмического дифференцирования; Производные и дифференциал функции – вычисление производных высших порядков. – вычисление дифференциала функции. Решение задач дифференциального исчисления в пакете MathCad		
	Самостоятельная работа обучающихся Проработка теоретического и практического материала Типовой расчет по теме Производная функции.	4	
Тема 6.2 **Применение дифференциального исчисления для исследования функций и**	**Содержание учебного материала**	4	
	Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа. Раскрытие неопределенностей, правила Лопиталя. Признаки постоянства и монотонности функции. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума функции. Нахождение экстремумов с помощью первой производной. Выпуклость графика функции.		2

построения графиков	Достаточный признак выпуклости графика функции. Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты графика функции. Исследование функций и построение графиков.		
	Практические занятия Исследование функции – нахождение экстремумов функций; исследование функций на возрастание и убывание; – нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции, точек перегиба; – нахождение асимптот графика функций; – исследование функции и построение ее графика. Исследование функций и построение графиков в пакете MathCad	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Расчетно-графическая работа Исследование функции методами дифференциального исчисления и построение ее графика.	4	
Раздел 7 Интегральное		**36**	

исчисление функции одной переменной			
Тема 7.1 Неопределенный интеграл	**Содержание учебного материала**	4	
	Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование, замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.		2
	Практические занятия Методы вычисления неопределенного интеграла – вычисление интегралов методом непосредственного интегрирования. – вычисление неопределенного интеграла методом замены переменной. – вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.	6	
	Самостоятельная работа обучающихся:	6	

	Проработка теоретического и практического материала Типовой расчет по теме Неопределенный интеграл		
Тема 7.2 Определенный интеграл	**Содержание учебного материала**	4	
	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла Определенный интеграл Римана. Необходимое условие интегрируемости функции. Свойства определенного интеграла. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенных интегралов.		2
	Практические занятия Методы вычисления определенного интеграла – вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница; – вычисление определенного интеграла методом замены переменной; – вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся	6	

	Геометрические приложения определенных интегралов. Конспект темы. Расчетно-графическая работа по теме.		
Тема 7.3 Несобственные интегралы	**Содержание учебного материала**	2	
	Несобственные интегралы по бесконечному промежутку: определение основных понятий, вычисление. Несобственные интегралы от неограниченных функций: определение основных понятий, вычисление.		2
	Практические занятия Несобственный интеграл: – вычисление несобственного интеграла по бесконечному промежутку; – вычисление несобственного интеграла от неограниченной функции. Решение задач интегрального исчисления в пакете MathCad	4	
	Всего:	**82**	

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

РАЗДЕЛ 5 ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 5.1 Последовательность. Предел последовательности

Практическое занятие 12 Предел последовательности (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о числовых последовательностях, о пределе числовой последовательности.
- формирование умений по вычислению предела числовой последовательности.

Студент должен:

Знать:

- определение числовой последовательности, способы ее задания;
- определение предела последовательности и его свойства;
- определение монотонной последовательности.

Уметь:

- вычислять предел числовой последовательности.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Если по некоторому закону $\forall n \in N$ поставлено в соответствие вполне определенное число x_n, то говорят, что задана ***числовая последовательность***

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называют ***элементами (членами)*** последовательности.

Символ x_n - общий элемент (член) последовательности или ***n***–ый член последовательности.

Коротко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n).

Число ***b*** называют ***пределом последовательности*** (x_n), если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 \in N$, такой что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой***, если последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ - бесконечно малая (и наоборот).

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty \left[\begin{array}{l} +\infty, \text{если } x_n > 0, \\ -\infty, \text{если } x_n < 0. \end{array}\right.$

Свойства пределов последовательности

1^0 (***о пределе суммы***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то сходится и их сумма (разность) и предел суммы (разности) равен сумме пределов:

$$\lim_{n \to \infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n.$$

2^0 (***о пределе произведения***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то сходится и их произведение $(x_n \cdot y_n)$ и предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \to \infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Следствие: Постоянный множитель $c \in R$ можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \to \infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \to \infty} x_n.$$

3^0 (***о пределе частного***):

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ также сходится и предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0 .$$

4^0 Если последовательность (x_n) - сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > c$, то $x_n > c(x_n < c)$ для всех $n > n_0$.

5^0 ***(Предельный переход в неравенстве):***

Если последовательности (x_n) и (y_n) - сходятся и $(x_n)<(y_n)$ для $\forall n > n_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n .$$

6^0 (***Предел промежуточной последовательности***) – принцип двух милиционеров:

Если последовательность (x_n) и (y_n) - сходятся к одному и тому же пределу b, а последовательность (a_n) такова, что

$$x_n \leq a_n \leq y_n \text{ для } \forall\, n \in N \text{, то и } \lim_{n\to\infty} a_n = b .$$

Пример 1 Вычислить предел последовательности $x_n = \frac{5n+2}{3n-1}$.

Решение: x_n представляет собой частное двух многочленов. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель являются величинами бесконечно большими. Следовательно, имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$и применить теорему о пределе частного нельзя.

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо и числитель, и знаменатель дроби разделить на старшую степень *n*.

Таким образом, разделим и числитель, и знаменатель на *n*.

Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5n+2}{n}}{\dfrac{3n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{n}}{3-\dfrac{1}{n}}=\frac{5}{3},$$

т.к. при $n\to\infty$ каждая из дробей $\frac{2}{n}$ и $\frac{1}{n}$ стремится к нулю.

Пример 2 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n}{n^2+2n-1}$.

Решение: Это неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень *n*, т.е. на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-n}{n^2+2n-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=0,$$

т.к. числитель дроби стремится к нулю, а знаменатель к пределу отличному от нуля.

Пример 3 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-4n+2}{7n^2+3n}$.

Решение: Имеет место неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на n^3. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-4n+2}{7n^2+3n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{7}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\infty,$$

т.к. предел числителя отличен от нуля, а знаменателя – стремится к нулю.

Пример 4 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Решение: При $n\to\infty$ выражение $\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)$ представляет собой неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность вида $[\infty-\infty]$ надо домножить и разделить данное иррациональное выражение на ему сопряженное.

Итак, умножим и разделим данное выражение на $\left(\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n-3}-\sqrt{n^2+3n}\right)\left(\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}\right)}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\leftrightarrow\infty}\frac{n^2+2n-3-\left(n^2+3n\right)}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n-3}{\sqrt{n^2+2n-3}+\sqrt{n^2+3n}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=-1.$$

Пример 5 Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}+2n}{3n+4}$.

Решение: Это неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Делим числитель и знаменатель на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+2n-1}+2n}{3n+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}{3+\frac{4}{n}}=\frac{\sqrt{3}+2}{3}.$$

Пример 6 Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^{100}}{(3n-1)^{98}(n+2)^2}$.

Решение: Вынесем за скобки в числителе и знаменателе члены, содержащие переменную:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{3^{100}\cdot n^{100}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{100}}{3^{98}\cdot n^{100}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}9\frac{\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{100}}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{98}\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=9.$$

Содержание заданий

Найти следующие пределы:

1 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+7n}{2n-3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n+3}{5+3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n+5n^2}{1+2n-4n^2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n^2+3}{5n+3n^3-1}$.

2 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-3n}{5n^2+4n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{n^3-4n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4+2n^3-4n}{6n^5-2n^4+5n^3-2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+4n}+2n}{3n^3-1}$.

3 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-3n^3+4}{5n^2+2n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-2n}+n}{2n+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5-3n^4+4n^3-5n+6}{1-2n+3n^2-4n^3+2n^4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^9-3n}+2n^3}{\sqrt[3]{n^4+n}+n}$.

4 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{(4n+2)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3+2n+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)(2+3n)(3-4n)}{(1+2n)(3+2n)(4+n)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+4)^3}{(3n-1)(4-2n)\cdot n}$.

5 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}+4n}{\sqrt{n+1}+2n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+n+1}-\sqrt{3n^2+2n-1}}{\sqrt{n^2-1}+2n}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n-1}\right)$;

6 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3+1}-\dfrac{2n^2+4}{3n^2-5}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{3n+1}-\dfrac{2n^2+3}{8n^2+5}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3}{5n^3-6}\cdot\dfrac{1-2n^2+n}{3-2n+n^2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{5n}\cdot\dfrac{3n^4+2n^3-5n}{4n^4-3n^2+1}\right)$.

7 а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48}\cdot(n+2)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+3n)^{100}}{(3n-2)^{97}\cdot(n+2)^3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^{98}\cdot(2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Тема 5.2 Функция. Предел функции. Непрерывность функции

Практическое занятие 13 Предел функции (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о функциях, пределах функций.
- формирование умений по вычислению предела функций.

Студент должен:

Знать:

- определение функции, способы ее задания;
- определение предела функции в точке по Коши и по Гейне;
- основные теоремы о пределе функции в точке.

Уметь:

- вычислять пределы функции в точке и на бесконечности.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Пусть X и $У$ – два произвольных множества и $x \in X, y \in У$.

Если каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответствие вполне определенный элемент $y \in У$, то говорят, что на множестве X задана ***функция y= f(x)*** или $y = y(x)$.

При этом переменная x называется ***аргументом функции*** или независимой переменной, а множество X – областью определения функции и обозначаются $D(x)$.

Число *у* – это ***значение функции*** или зависимая переменная, а множество *У* – область значений функции, которую обозначают *Е(у)*.

Буква *f* обозначает закон соответствия.

Частным значением функции $y = f(x)$ при фиксированном значении аргумента $x = x_0$ называют $y_0 = f(x_0)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называют геометрическое место точек $M(x;f(x))$, где $x \in D(x)$ и $f(x) \in E(y)$.

Способы задания функции

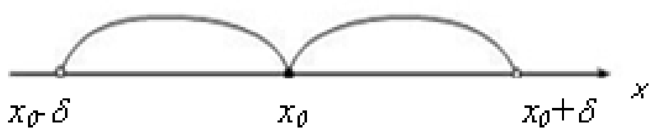
1) *Аналитический способ* – способ задания функции с помощью формулы.

2) *Табличный способ задания функции*.

3) *Графический способ задания функции*, когда зависимость функции от её аргумента задается графически.

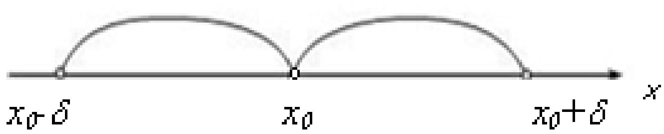
Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D(x), а функция $u = g(x)$ определена на D(g), причем E(g)$\subset$ D(x). Тогда функция $y = F(x) = f(g(x))$ называется *сложной функцией.*

δ - окрестностью точки x_0 называется интервал ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$), длина которого 2δ, симметричный относительно x_0**:**



$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Проколотой δ***- окрестностью точки x_0*** называется δ- окрестность точки x_0 без самой точки x_0:



$$x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Пусть точка x *о*пределена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, может быть, самой точки x_0.

Число b называется ***пределом функции f(x) в точке x_0,*** если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq x_0)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (*о единственности предела* Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то он единственный.

Теорема 2 Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если эти пределы существуют.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Теорема 3 Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x) \right) = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Теорема 4 Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Теорема 5 Пусть в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0, выполняется неравенство $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Тогда, если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b,$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b,$ то и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Функцию $f(x)$ называют ***бесконечно малой*** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x)\,\big(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon\big).$$

Свойства бесконечно малой функции

1^0 Сумма бесконечного числа функций бесконечно малых в точке x_0 есть функция бесконечно малая в этой точке.

2^0 Произведение бесконечно малой функции в точке x_0 на функцию, ограниченную в некоторой окрестности этой точки, есть функция бесконечно малая в точке x_0.

3^0 (Необходимое и достаточное условие существования предела). Для того чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ необходимо, чтобы $(f(x)-b)$ была бесконечно малой или другими словами $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - функция бесконечно малая в точке x_0.

Функцию f (x) называют ***бесконечно большой*** в точке x_0, если функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая в точке x_0, это равносильно следующему:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x)\,\big(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>\varepsilon\big)$$

Не исключено, что x_0 - это несобственная точка.

Свойства бесконечно большой функции

1^0 Сумма конечного числа бесконечно больших функций в точке x_0 есть функция бесконечно большая в этой точке.

2^0 Сумма бесконечно большой функции в точке x_0 и ограниченной в некоторой окрестности точки x_0 функции является бесконечно большой функцией.

3^0 Произведение бесконечно большой функции в точке x_0 на функцию, которая имеет отличный от нуля предел, называется бесконечно большой функцией.

4^0 Частное от деления бесконечно большой функции в точке x_0 на функцию, имеющую предел в этой точке, является бесконечно большой функцией.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-3x^3+2x^2-x+4)$.

Решение: Применим последовательно теоремы: о пределе алгебраической суммы, о пределе произведения и ее следствие.

Имеем

$$\lim_{x\to 1}(x^4-3x^3+2x^2-x+4)=\lim_{x\to 1}x^4-\lim_{x\to 1}3x^3+\lim_{x\to 1}2x^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4=$$
$$=\lim_{x\to 1}x^4-3\lim_{x\to 1}x^3+2\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}x+4=1^4-3\cdot 1^3+2\cdot 1^2-1+4=3.$$

Замечание: Применение терем обычно производится в уме, поэтому часто подробная запись решения опускается.

Пример 2 Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3}{8+4x}$.

Решение: Предел знаменателя равен нулю, $\lim\limits_{x\to -2}(8+4x)=0$. В этом случае применить теорему о пределе частного нельзя, т.к. деление на нуль невозможно. Но, если $\lim\limits_{x\to -2}(8+4x)=0$, то величина $(8+4x)$ есть бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{8+4x}$ будет бесконечно больной. Следовательно, при $x\to -2$ произведение $3\cdot\dfrac{1}{8+4x}$ есть бесконечно большая величина и

$$\lim_{x\to -2}\frac{3}{8+4x}=\infty.$$

Пример 3 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$.

Решение: Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$, т.е. имеют место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Разделим и числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2},$$

т.к. при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{3}{x},\frac{2}{x^2},\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}$ стремится к нулю.

Пример 4 Вычислить $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$.

Решение: Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Правило: Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, заданную отношением двух многочленов, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x^1+b_0}$ надо и числитель, и знаменатель разделить на множитель $(x-x_0)$, используя обычные правила алгебры. Итак, разделим числитель и знаменатель на $(x+3)$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+11x-3 & x+3 \\ \underline{4x^2+12x} & \overline{4x-1} \\ -x-3 & \\ \underline{-x-3} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3x^2+10x+3 & x+3 \\ \underline{3x^2+9x} & \overline{3x+1} \\ x+3 & \\ \underline{x+3} & \\ 0 & \end{array}$$

Имеем $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)(4x-1)}{(x+3)(3x+1)}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x-1}{3x+1}=\frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1}=\frac{13}{8}$.

Пример 5 Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Решение: В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Правило: Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель иррациональны, надо и числитель, и знаменатель домножить на выражение, сопряженное данному иррациональному.

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\cdot(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6 Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

Решение: При $x\to -2$ функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин, т.е. имеет место неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Выполним вычитание дробей

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4-12}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^3+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 7: Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x})$.

Решение: Имеет место неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Домножим числитель и знаменатель на выражение, дополняющее данное до разности кубов.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x})=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x(x+2)}+\sqrt[3]{x^2}}=0.$$

Содержание заданий

1 Пользуясь определением предела функции, доказать предельные равенства.

а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-1)=1$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2-1}{2x+1}=-5$.

2 Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+2x^2-3x-4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^2-2x+1\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-2x^2+3x-1}$

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x^3+x^2-2x}$

3 Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x^3+x^2-2x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x}{1-3x^3}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{\sqrt[3]{x}+4x^2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x-2}{\sqrt{x^3}+6x^2}$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^4+8x-1}{3x^2+x-4}$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{(x-2)^3}$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

4 Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^3-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-x+6}{x^3+3x^2+x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$

з) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+x+2}$;

и) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

к) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

л) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 14 Односторонние и замечательные пределы. Непрерывность функции (2ч.)

Цель:

– обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об односторонних и замечательных пределах, об эквивалентных бесконечно малых.

– формирование умений по вычислению односторонних пределов, по применению замечательных пределов.

Студент должен

Знать:

- понятие одностороннего предела;
- замечательные пределы и их применение;
- определение непрерывности функции в точке;
- основные теоремы о непрерывных функциях;
- свойства непрерывной функции на отрезке;
- разрывы непрерывности функций.

Уметь:

- вычислять односторонние пределы;
- применять замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые при вычислении пределов функции;
- исследовать функцию на непрерывность;
- находить точки разрыва функции.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Если при нахождении предела функции рассматривать значения x только справа от x_0, то такой предел называется пределом справа.

Число b называют ***пределом функции f(x) в точке*** x_0 ***справа*** (правосторонний предел функции), если выполняется следующее условие:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\big(x\in(x_0;x_0+\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big).$$

и записывают $f(x+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=b$.

Если $x_0=0$, то пишут $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=b$.

Если при нахождении предела функции рассматривать значения x только слева от x_0, то такой предел называется пределом слева.

Число b называют ***пределом функции f(x) в точке*** x_0 ***слева*** (левосторонний предел функции), если выполняется следующее условие:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\big(x\in(x_0-\delta;x_0)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$$

и записывают $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=b$.

Если $x_0=0$, то пишут $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)=b$.

Пределы слева и справа иначе называют односторонними пределами.

Теорема: Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел необходимо, чтобы для нее в этой точке существовали равные односторонние пределы. При этом $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$.

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Используется при раскрытии неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в тригонометрических выражениях.

Следствия первого замечательного предела:

1⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$

2⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha\cdot x)}{x}=\alpha$

3⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(\alpha\cdot x)}{x}=\alpha$

4⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha\cdot x)x}{\sin(\beta\cdot x)}=\frac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$

5⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(\alpha\cdot x)}{tg(\beta\cdot x)}=\frac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$

6⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;

7⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

8⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;

9⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(\alpha\cdot x)}{x}=\alpha$;

10⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg(\alpha\cdot x)}{x}=\alpha$.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Следствия второго замечательного предела:

1⁰ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2⁰ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$

3⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

4⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

5⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

6⁰ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$;

7⁰ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции в некоторой точке x_0.

Бесконечно малое α является бесконечно малой более высокого (низкого) порядка, чем β, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\ (\infty)$.

Две бесконечно малые α и β называют ***бесконечно малыми одного порядка***, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$.

α и β называют ***эквивалентными бесконечно малыми*** в точке x_0 (и записывают $\alpha\sim\beta$), если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций	
Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$	
$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim \mu\cdot\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}(\alpha(x))^2$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{1}{\ln a}\cdot\alpha(x)$

Теорема (Принцип замены эквивалентных функций). Если $f(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}\in$D(x)**,** если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и предел $f(x)$ в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}\in$D(x), если она определена в некоторой окрестности этой точки и бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, то есть: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на промежутке***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции $f(x)$, если в этой точке функция либо не определена, либо определена, но нарушено хотя бы одно из условий определения непрерывности $f(x)$.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода,*** если существуют конечные односторонние пределы. При этом

если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то x_0 называют ***точкой скачка***;

если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 называют ***точкой устранимого разрыва***.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва II рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение: 1 способ: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$.

2 способ: используем первое следствие первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1.$$

3 способ: используем замену эквивалентной бесконечно малой

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Пример 2 Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

Решение: 1 способ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = 2\cdot\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin x\cdot\sin x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\right) = \frac{1}{2}.$$

2 способ: используем первое следствие первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)x^2}{x^2\cdot\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

3 способ: используем замену эквивалентной бесконечно малой

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3 Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{3}{x}+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{-6}=e^{-6}.$$

Пример 4 Вычислить односторонние пределы функции $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<0\\ x^2+1, x\geq 0\end{cases}$

Решение: $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}\sin x=0$, $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\sin(x^2+1)=1$.

Пример 5 Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -\infty<x\leq 1,\\ \frac{1}{x-1}, & 1<x\leq 3,\\ x-2{,}5, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

Решение: Функция задана на трех промежутках разными формулами. На каждом из промежутков функция непрерывна. Рассмотрим границы промежутков: $x=1$ и $x=3$. В точке $x=1$ замечаем, что

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1}2^x=2;\quad \lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

Следовательно, $x=1$ — точка разрыва II рода.

В точке $x=3$ вычисляем:

$$\lim_{x\to3-0}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-1}=0{,}5;\quad \lim_{x\to3+0}f(x)=\lim_{x\to3}(x-2{,}5)=0{,}5;\quad f(3)=0{,}5.$$

Таким образом, в точке $x=3$ функция непрерывна.

Содержание заданий

Найти односторонние пределы функции *y=f(x)* в точке *x=a*, если:

1 $f(x)=\begin{cases}2-x, x>0;\_\ a=0, a=1\\ x_3-4, x\leq 0\end{cases}$; **2** $f(x)=\begin{cases}1+x, x>0\ \_, a=0, a=1\\ 1-x, x\leq 0\end{cases}$;

3 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\ge 0\_; a=0\\ \cos x, x<0\end{cases}$;

4 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x}, x\ge 0\_ a=0\\ \sin x, x<0\end{cases}$.

Вычислить пределы

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$;

9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$;

10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{\sin^3 3x}$;

11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 7x}$;

12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$;

13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg 2x}$;

14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{x}$;

15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$;

16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arcsin 4x}$.

Вычислить пределы

17 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}$;

18 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$;

19 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

20 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

21 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

22 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{3}{x}}$;

23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$;

24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$;

25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{2x}$;

26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{3x}$;

27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}$;

28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$.

Является ли функция *y=f(x)* непрерывной в точке x_0, если:

29 $y=x^2+2,\ \ x_0=3$;

30 $y=x^3+1,\ \ x_0=2$;

31 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x \neq 2, x_0 = 2, \\ 5, & x = 2. \end{cases}$

32 $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x \neq -2, x_0 = -2, \\ -4, & x = -2. \end{cases}$

33 $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, x_0 = 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$

34 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-7}, & x \neq 7, x_0 = 7, \\ 2, & x = 7. \end{cases}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 15 Решение задач основ математического анализа в пакете MathCad (2ч.)

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач основ математического анализа. Приобретение навыков вычисления пределов средствами пакета.

Студент должен:

Знать:

- определение функции, способы ее задания;
- определение предела функции в точке по Коши и по Гейне;
- основные теоремы о пределе функции в точке.
- понятие одностороннего предела;
- замечательные пределы и их применение;
- определение непрерывности функции в точке;
- основные теоремы о непрерывных функциях;
- разрывы непрерывности функций.

Уметь:

- вычислять пределы функции в точке и на бесконечности.
- вычислять односторонние и замечательные пределы;

– исследовать функцию на непрерывность, находить точки разрыва функции.

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Краткие теоретические сведения

Для вычисления пределов в Mathcad используется панель Calculus (рисунок 1).

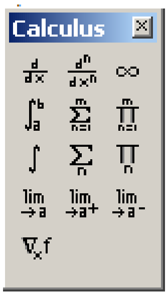


Рисунок 1 - Панель инструментов Calculus

Открыть панель Calculus можно, щелкнув мышкой по изображению интеграла на панели инструментов Math (рисунок 2).

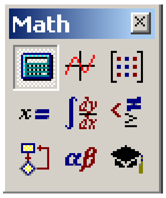


Рисунок 2 - Панель инструментов Math

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Требуется найти область определения функции $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$. Если имеются точки разрыва, то установить тип разрыва.

Решение: Поскольку аналитическое выражение функции представлено в виде дроби, а знаменатель дроби не может быть равен 0, из области определения функции следует исключить точку $x = -1$, т.е. $D(x) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$. То есть точка $x = -1$ является точкой разрыва. Чтобы найти тип разрыва следует найти односторонние пределы (команды следует взять с панели **Calculus):**

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) \to \infty$$

Так как односторонние пределы равны бесконечности, то имеет место неустранимый разрыв 2-го рода, а точка $x = -1$ является точкой бесконечного скачка функции.

Пример 2 Вычислить пределы $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x^{\frac{1}{\ln x}})$, $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \dfrac{2}{3x})^{5x}$, $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2}{5+4^{\frac{1}{x+3}}}$.

Решение. Для нахождения пределов достаточно обратиться к панели **Calculus**, на которых расположены кнопки с пределами, в том числе левосторонними и правосторонними. Выполненные команды предоставят шаблоны для заполнения, после чего следует выполнить команду **Simplify (Упростить),** предназначенную для символьных вычислений. Решение представлено на рисунке 3.

а) $$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} \to \frac{1}{144}$$

б) $$\lim_{x \to 0} \sin(3 \cdot x)^{\frac{1}{\ln(x)}} \text{ simplify } \to \exp(1)$$

в) $$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{3 \cdot x}\right)^{5 \cdot x} \text{ simplify } \to \exp\left(\frac{-10}{3}\right)$$

г) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{3 \cdot x} - 1}{2 \cdot x} \text{ simplify } \to \frac{3}{2}$$

д) $$\lim_{x \to -3^-} \frac{2}{5 + 4^{\frac{1}{x+3}}} \text{ simplify } \to \frac{2}{5}$$

Рисунок 3- Вычисление пределов

Содержание заданий

Найти область определения, точки разрыва, построить график функций

1 а) $y=\sqrt{\dfrac{3x+4}{4x-2}}$ б) $y=\sqrt{x^2+5x+6}+\ln(x+4)$

2 а) $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x-3}{2x+1}$ б) $y=\log_3(x-1)+\arccos\dfrac{x+1}{3}$

3 а) $y=\lg\cos x-6^{\frac{1}{x+2}}$ б) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}+\sqrt{16-6x}$

4 а) $y=\sqrt{3x-12}+\sin\dfrac{x}{3}$ б) $y=\log_4(x^2-1)+\dfrac{x+3}{4x-2}$

5 а) $y=\sqrt{10-3x-x^2}$ б) $y=\lg(5x^2+4)+\arcsin\dfrac{x}{x+1}$

6 а) $y=\sqrt{\dfrac{4x-1}{2x+3}}$ б) $y=\cos 3x+9^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

7 а) $y=\arcsin\dfrac{3x-1}{2}+\lg(7x-2)$ б) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+2x+1}+3^{\frac{1}{x^2-4}}$

8 а) $y=\arcsin\dfrac{3x-1}{2}+\lg(7x-2)$ б) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+2x+1}+3^{\frac{1}{x^2-4}}$

9 а) $y=\dfrac{x}{3x^2+1}+\sqrt{\dfrac{x-8}{12-x}}$ б) $y=2^{\frac{1}{x-3}}+\lg(x+3)$

10 а) $y=\sin\dfrac{x}{2}+\sqrt{2x^2-x+4}$ б) $y=\lg\dfrac{x}{x+4}-\dfrac{3}{x^2-25}$

Найти указанные пределы:

1 а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

2 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$

3 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0} tg\,2x\cdot ctg\,4x$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$

4

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$

5

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg\,2x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

6

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$

7

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,5x}{tg\,3x}$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$

8

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg3x}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$

9

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$

10

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$

РАЗДЕЛ 6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 6.1 Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной

Практическое занятие 16 Производная функции (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о производных сложных функций;
- формирование умений по нахождению производных функций с помощью правил и формул дифференцирования, методом логарифмического дифференцирования.

Студент должен:

Знать:

- определение производной, ее геометрический и механический смысл;
- правила и формулы дифференцирования функций;

Уметь:

- дифференцировать функции, используя правила и формулы дифференцирования, находить производные сложных функций и обратных функций;
- применять логарифмическое дифференцирование.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если этот предел конечный, то производная существует и функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x. Производная обозначается также $y'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$. Процесс нахождения производной называется дифференцированием функции.

Правила дифференцирования функций. Пусть $C \in \mathbf{R}$ - постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции, имеющие производные.

1 $C' = 0$.

2 $(Cu)' = C \cdot u'$.

3 $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Правило дифференцирования сложной функции. Если функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, а функция $u = \varphi(x)$ - по x, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Таблица производных

1 $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} u'$.

2 $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3 $\left(u^{-1}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

4 $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'.$

5 $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'.$

6 $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$

7 $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}.$

8 $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'.$

9 $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'.$

10 $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$

11 $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$

12 $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

13 $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

14 $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}.$

15 $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

16 $\left(u^{v}\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^{v} \cdot \ln u \cdot v'$.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти производную функции $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5.$

Решение: применив последовательно правило вычисления производной суммы и формулы вычисления производной степенной функции , имеем $f'(x) = (4x^3)' - (2x^2)' + x' - 5' = 4(x^3)' - 2(x^2)' + x' - 5' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 12x^2 - 4x + 1.$

Пример 2 Найти производную функции $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1).$

Решение: Используя правило дифференцирования произведения и соответствующие формулы нахождения производных, получим

$$f'(x) = (x^3-1)'(x^2+x+1) + (x^2+x+1)'(x^3-1) = 3x^2(x^2+x+1) + (2x+1)(x^3-1) = .$$
$$= 3x^2(x^2+x+1) + (2x+1)(x-1)(x^2+x+1) = (x^2+x+1)[3x^2+(2x+1)(x-1)] =$$
$$= (x^2+x+1)(3x^2+2x^2-2x+x-1) = (x^2+x+1)(5x^2-x-1).$$

Пример 3 Найти производную функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение: используя правило дифференцирования частного и соответствующие формулы нахождения производных, получим

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(-2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Пример 4 Найти производную функции $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Решение: полагая $u = \sqrt{4-x^2}$, получим $f(x) = \sqrt{u}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Пример 5 Найти производную функции $f(x) = \sin^3 3x$.

Решение: Полагая $3x = u$, получим $f(x) = \sin^3 u$. Применяя правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$f'(x) = (\sin^3 u)' = 3\sin^2 u(\sin u)' = 3\sin^2 3x\cos 3x(3x)' = 3\sin^2 3x\cdot\cos 3x\cdot 3 =$$
$$9\sin^2 3x\cdot\cos 3x.$$

Пример 6 Найти производную функции $f(x) = \arccos\sqrt{2x}$.

Решение:

$$f'(x) = (\arccos\sqrt{2x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}(\sqrt{2x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2 =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

Пример 7 Найти производную функции $y=(7x)^{\cos x}\,(x>0)$.

Решение: Производная степенно-показательной функции $y=(7x)^{\cos x}(x>0)$, равна $y'=\cos x\cdot(7x)^{\cos x-1}\cdot(7x)'+(7x)^{\cos x}\cdot\ln(7x)\cdot(\cos x)'=$ $=7\cos x\cdot(7x)^{\cos x-1}-(7x)^{\cos x}\cdot\ln(7x)\cdot\sin x$.

Содержание заданий

Найти производные функций:

1 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+x^2$;

2 $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$;

3 $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$;

4 $y=5x^4-\sqrt{2x}$;

5 $y=(1-x)^2$;

6 $y=3^x-\log_{\frac{1}{3}}2x$;

7 $y=\left(x+\sqrt{x}\right)^3$;

8 $y=\sqrt[5]{x}-\cos x+ctgx$;

9 $y=2^x+3^x+\frac{1}{4^{-x}}+2^x\cdot 3^x$;

10 $y=\frac{2^x}{3^x}+\ln x+\frac{1}{x}$;

11 $y=\log_2 x+2\log_4 x-\ln x$;

12 $y=e^x\sin 3x$;

13 $y=\sin x-3\cos 4x-\frac{1}{x^2}$;

14 $y=\frac{x\ln x}{1+x^2}$;

15 $y=3tg\,x+0.1ctg\,x$;

16 $y=x^2arctg\,x$;

17 $y=\arcsin x-e^x\cos x$;

18 $y=\left(1+x+x^2\right)^2$;

19 $y=\frac{x}{1+x^2}+2^{2x}+x^3\sin 4x$;

20 $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

21 $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;

22 $y=\frac{x^2}{1-\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3^{x+1}}$;

23 $y=\sqrt{2x-1}$;

24 $y=\sqrt{3x+4}$;

25 $y=\sqrt{x}\,\frac{2^{-x}}{arctgx}$;

26 $y=arctg^4\frac{1}{x+2}$;

27 $y=tg^2 3x$;

28 $y=\sqrt{\sin\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)}$;

29 $y = 2^{x^2+x+1}$; **30** $y = e^{\sqrt{x}\ln x}$;

31 $y = e^{x\ln(x+2)}$ **32** $y = 2^{3x+x^2+4}$;

33 $y = \sqrt{1+\sqrt{2x}} + \log_x 2$; **34** $y = \sqrt{2+\sqrt{3x}} + \log_x 3$.

Практическое занятие 17 Производные и дифференциал функции (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о производных высшего порядка, дифференциале;
- формирование умений по нахождению производных высших порядков, дифференциала функции, применению дифференциала в приближенных вычислениях.

Студент должен:

*Знать***:**

- правила и формулы дифференцирования функций;
- определение производной *n-го* порядка, дифференциала функции, его геометрический и механический смысл;
- правила вычисления дифференциала.

Уметь:

- вычислять производные высших порядков
- находить дифференциал функции;
- с помощью дифференциала приближенно вычислять значения функции и приращения функции в указанной точке.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Вторую производную также обозначают $y''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка и т. д.

Производную n-го порядка обозначают $y^{(n)}(x)$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Дифференциалом dx аргумента x называется его приращение Δx.

Дифференциалом *функции* $f(x)$ называется произведение производной этой функции на дифференциал ее аргумента:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, то есть производная функции $f(x)$ равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента x.

Свойства дифференциала:

1 $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C - постоянная);

2 $d(C\cdot f(x)) = C\cdot df(x)$;

3 Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x),$$

$$d(f(x)\cdot g(x)) = g(x)\cdot df(x) + f(x)\cdot dg(x).$$

Если при этом $g(x) \neq 0$, то

$$d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\cdot df(x) - f(x)\cdot dg(x)}{g^2(x)}.$$

Если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством инвариантности дифференциала.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 y = d(dy)$.

Аналогично: $d^3 y = d(d^2 y)$, …, $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Если $y = f(x)$ и x- независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам

$$d^2 y = y''(dx)^2, d^3 y = y'''(dx)^3, \ldots d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений:

1 ***Вычисление приближенного числового значения функции***

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

2 ***Приближенное вычисление степеней***

$$(x + \Delta x)^n \approx x_0^n + n x_0^{n-1} \Delta x.$$

3 ***Приближенное извлечение корней***

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0} \cdot \Delta x.$$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 $y = x^5 - 7x^3 + 2$. Найти третью производную.

Решение: $y' = 5x^4 - 21x^2$,

$y'' = 20x^3 - 42x,$

$y''' = 60x^2 - 42.$

Пример 2 Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = arctgx.$

Решение:

$$dy = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d^2y=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'(dx)^2=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}(dx)^2.$$

Пример 3 Найти приближенное значение функции

$$f(x)=2x^3-3x+5 \quad \text{при } x=3{,}001.$$

Решение: Представим *x* в виде суммы $x = 3 + 0{,}001$. Приняв $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}001$, найдем $f(x_0)=f(3)=2\cdot 3^3-3\cdot 3+5=50$.

Найдем производную и вычислим ее значение в $x_0 = 3$:

$$f'(x)=6x^2-3, \quad f'(x_0)=f'(3)=6\cdot 3^2-3=51,$$

$$f(3{,}001)=f(3+0{,}001)\approx 50+51\cdot 0{,}001=50{,}051.$$

Пример 4 Найти приближенное значение степени $5{,}013^3$.

Решение: Представим данную степень в виде $(5 + 0{,}013)^3$.

Приняв $x_0 = 5$ и $\Delta x = 0{,}013$ по формуле:

$$(x+\Delta x)^n \approx x_0^n + n x_0^{n-1}\Delta x.$$

Найдем:

$$5{,}013^3=(5+0{,}013)^3\approx 5^3+3\cdot 5^2\cdot 0{,}013=125{,}975.$$

Пример 5 Найти приближенное значение корня $\sqrt{0{,}96}$.

Решение: Представим данный корень в виде $\sqrt{0{,}96}=\sqrt{1-0{,}04}$. Приняв $x_0 = 1$ и $\Delta x = -0{,}04$ по формуле $\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx \sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x$.

Имеем $\sqrt{0{,}94}=\sqrt{1-0{,}04}\approx 1-\frac{0{,}004}{2}=0{,}98$.

Содержание заданий

Вычислить дифференциал функции и производную второго порядка в точке x_0:

1 $y=\sin^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

2 $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x,\ x_0=0.$

3 $y=\ln(2+x^2),\ x_0=0.$

4 $y=e^x\cos x,\ x_0=0.$

5 $y=e^x\sin 2x,\ x_0=0.$

6 $y=e^{-x}\cos x,\ x_0=0.$

7 $y=\ln(1+x),\ x_0=2.$

8 $y=arctgx,\ x_0=1.$

9 $y=\arcsin x,\ x_0=0.$

10 $y=(5x-4)^5,\ x_0=2.$

11 $y=x\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

12 $y=x^2\ln x,\ x_0=\dfrac{1}{3}.$

13 $y=x\sin 2x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{4}.$

14 $y=x\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

15 $y=x^4\ln x,\ x_0=1.$

16 $y=x+arctgx,\ x_0=1.$

17 $y=\ln^3 x,\ x_0=1.$

18 $y=\ln(x^2-4),\ x_0=3.$

19 $y=x^2\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

20 $y=\arccos x,\ x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Вычислить приближенно с помощью дифференциала

21 $y=\sqrt[3]{x},\quad x=7,76.$

22 $y=\arcsin x,\quad x=0,08.$

23 $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\quad x=0,97.$

24 $y=\sqrt[3]{x},\quad x=1,21.$

25 $y=\sqrt{4x-1},\quad x=2,56.$

26 $y=\sqrt[5]{x^2},\quad x=1,03.$

27 $y=\sqrt{x^2+5},\quad x=1,97.$

28 $y=x^6,\quad x=2,01.$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 18 Решение задач дифференциального исчисления в пакете MathCad

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач дифференциального исчисления. Приобретение навыков вычисления производных и дифференциалов средствами пакета.

Студент должен:

Знать:

- определение производной, ее геометрический и механический смысл;
- правила и формулы дифференцирования функций;
- определение производной *n-го* порядка, дифференциала функции, его геометрический и механический смысл;
- правила вычисления дифференциала.

Уметь:

- дифференцировать функции, используя правила и формулы дифференцирования;
- вычислять производные высших порядков
- находить дифференциал функции;

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Краткие теоретические сведения

Для вычисления производных в Mathcad используется панель Calculus (рисунок 3). Открыть панель Calculus можно, щелкнув мышкой по изображению интеграла на панели инструментов Math .

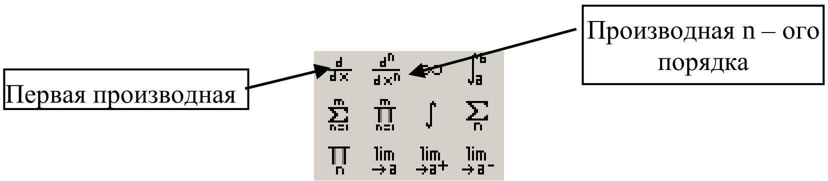


Рисунок 3 - Вычисления

Установите курсор в то место, где вы будете находить первую производную и активизируйте кнопку (Первая производная) (рисунок 3).

Создайте запись: $\frac{d}{dx}y(x)$

Установите курсор в конец введенной формулы (рисунок 4).

$$\frac{d}{dx}y(x)$$

Рисунок 4 – Первая производная

Вызовите на экран панель инструментов Выражения(рисунок 5)

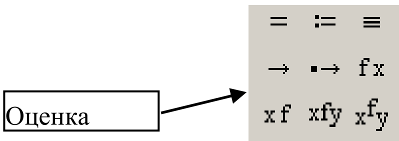


Рисунок 5 - Выражения

На данной панели инструментов активизируйте кнопку (Оценка). Нажмите кнопку Enter.

Для нахождения второй производной на панели инструментов Вычисления активизируйте кнопку Производная n- ого порядка (рисунок 3). Создайте запись (рисунок 6). Нажмите Enter.

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \rightarrow$$

Рисунок 6– Вторая производная

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1

символьный метод	численный метод
$\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\right) \rightarrow x^2\cdot\cos(x)^2 - x^2\cdot\sin(x)^2 + 2\cdot x\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$ $\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2\cdot\cos(x)\right) \rightarrow x^2\cdot\sin(x) - 6\cdot\sin(x) - 6\cdot x\cdot\cos(x)$ $t := 1$ $\frac{d}{dt}\left(t\cdot\operatorname{asin}\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) \rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$t := 1$ $\frac{d}{dt}\left(t\cdot\operatorname{asin}\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) = 0.812$ $\frac{d^2}{dt^2}\left(3\cdot t^3 + t + 1\right) = 18$

Пример 2 Составить уравнение касательной и нормали к линии, которая задана уравнением $y(x)=x^4 -3x^3+4x^2-5x+1$ в точке M(0,1).

Решение:

1 Задать значения x0 и y0 в точке M: x0:=0, y0:=1.

2 Записать уравнения лини $y(x):= x^4 -3x^3+4x^2-5x+1$.

3 Определить производную от функции y(x) $\frac{d}{dx}y(x)\rightarrow$, использовав панель вычислений и панель символов. Присвоить значение производной функции $yy(x):= \frac{d}{dx}y(x)$.

4 Записать уравнение касательной в виде

$$tang(x) := yy(x0)\cdot(x - x0) + y0,$$

$$tang(x) \rightarrow -5\cdot x + 1$$

5 Аналогично записать уравнение нормали

$$norm(x) := \frac{-1}{yy(x0)}\cdot(x - x0) + y0$$

$$norm(x) \rightarrow \frac{1}{5}\cdot x + 1$$

6 Построить графики касательной и нормали.

7 Отформатировать графики.

Пример оформления в MathCad представлен на рисунке 7

$x0 := 0 \qquad y0 := 1$

$y(x) := x^4 - 3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 5\cdot$ $\qquad \frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 4\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 8\cdot x - 5$

$yy(x) := \frac{d}{dx}y(x)$

$tang(x) := yy(x0)\cdot(x - x0) +$ $\qquad tang(x) := yy(x0)\cdot(x - x0) + y0$

$norm(x) := \frac{-1}{yy(x0)}\cdot(x - x0) +$ $\qquad norm(x) \rightarrow \frac{1}{5}\cdot x + 1$

Рисунок 7 - Оформления в MathCad

Содержание заданий

Найти производные первого, второго и четвертого порядка следующих функций:

1 $y = 8x^3 - 10x^2 + 12x + 10;$

2 $y = e^{\arccos x^3};$

3 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}};$

4 $y = \log_5(3x^4 - 1);$

5 $y = x^3 \cdot e^x;$

6 $y = \sin\frac{1}{x};$

7 $y = x\sqrt{x}(2\ln 5x - 6);$

8 $y = \cos^3 4x;$

9 $y = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + 4};$

10 $y = \sqrt{tg\,\dfrac{x^3}{3}};$

11 $y = \dfrac{\arcsin x}{x};$

12 $y = ctg\sqrt[3]{1 + x^3};$

13 $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x};$

14 $y = -\dfrac{1}{\sin^2 \sqrt[3]{1 + x^3}} \cdot \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1 + x^3)^2}};$

15 $y = (5x^3 + x^2 - 4)^5;$

16 $y = arctg^3 2x;$

17 $y = \sqrt{(x^2 + x + 2)^3};$

18 $y = \ln arcctg\sqrt{x};$

19 $y = 5^{\sin^2 x};$

20 $y = \sqrt[3]{x - 1}.$

Найти производную данной функции и вычислить ее частное значение при указанном значении:

1 $y = \dfrac{(1 - \sqrt{x})^2}{x}$ при $x = 0{,}01;$

2 $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ при $x = \dfrac{\pi}{6};$

3 $y = \dfrac{a + b}{3 - 2x} + \dfrac{5x^4 - 1}{a - b}$ при $x = 0;$

4 $y = \left(\dfrac{x}{2x + 1}\right)^{10}$ при $x = -1;$

5 $y = \sin^3 2x - \cos^3 2x$ при $x = \dfrac{\pi}{8};$

6 $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$ при $x = 0;$

7 $y = arctg\,\dfrac{m}{x} - arcctg(mctgx);$ при $y'(0), y'(\pi).$

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0

1 $y = \sin\frac{1}{2}x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2 $y = tg\frac{1}{4}x$ в точке $x_0 = \pi$.

3 $y = x^3 - x$ в точке $x_0 = 2$.

4 $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x_0 = 2$.

5 $y = x^2 + 3x + 2$ в точке $x_0 = 2$.

6 $y = x^2 + 5x + 6$ в точке $x_0 = -1$.

7 $y = x^2 - 5x + 6$ в точке $x_0 = -1$.

8 $y = \cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

9 $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x_0 = 2$.

10 $y = x^2 + 5x + 6$ в точке $x_0 = -1$.

Тема 6.2 Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

Практическое занятие 19 Исследование функции (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об исследовании функции;
- формирование умений по нахождению экстремумов функции, интервалов выпуклости и вогнутости функции, точек перегиба, асимптот графика функции.

Студент должен:

Знать:

- признаки постоянства и монотонности функции, существование экстремума;
- достаточные признаки выпуклости функции, необходимое и достаточное условия перегиба;
- виды асимптот графика функции.

Уметь:

- применить производную для нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции;
- находить наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;
- применять производную для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости функции, точек перегиба;
- находить асимптоты графика функции.

Краткие теоретические сведения

Точка x_0 называется ***точкой минимума (максимума)*** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума функции называются ***точками экстремума***.

Теорема (***необходимое условие экстремума функции***):

Если в точке экстремума функция $f(x)$ имеет производную, то производная равна нулю.

Теорема ***(Достаточное условие экстремума)***:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$, то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f'(x) > 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0;b)$, то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$;

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен выше любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется ***вогнутой*** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется ***выпуклой*** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка: $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

Функцию называют ***возрастающей (убывающей) в точке*** x_0, если она непрерывна в этой точке и возрастает (убывает) в некоторой ее окрестности.

Если $f''(x) > 0$ на промежутке $(a;b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ вогнута. Если $f''(x) < 0$ на промежутке $(a;b)$, то на этом промежутке функция $f(x)$ выпукла.

Схема исследования функции:

1) Найти область определения функции $D(x)$;

2) Исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;

3) Найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;

4) Найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;

5) Найти асимптоты графика функции;

6) Построить график, используя результаты предыдущих исследований;

Пример 1 Исследовать функцию $y=\frac{1}{4}\,(x^3+9x^2+15x-9)$ и построить ее график.

1) Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, то есть $D(x)=(-\infty,\infty)$.

2) Функция непрерывна на всей числовой прямой и ее график не имеет вертикальных асимптот.

3) Исследуем функцию на экстремум и интервалы монотонности. С этой целью найдем ее производную и приравняем к нулю:

$$y'=\frac{1}{4}\,(3x^3+18x+15);\;\; \mathrm{x}^2+6x+5=0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение. Функция имеет две критические точки 1 рода $x_1=-5$, $x_2=-1$.

Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению знака производной в них выявляем промежутки монотонности и наличие экстремума:

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$y_{\max}=y(-5)=\frac{1}{4}\left[(-5)^3+9(-5)^2+15(-5)-9\right]=4;$$

$$y_{\min}=y(-1)=\frac{1}{4}\left[(-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9\right]=-4.$$

4) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y''=\frac{1}{4}(6x+18);\quad \mathrm{x}+3=0;\;\; x=-3.$$

Итак, функция имеет одну критическую точку II рода $x = -3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которых установим знак второй производной:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	$\cap$	т.п.	$\cup$

Значение $x = -3$ является абсциссой точки перегиба графика функции, а ордината этой точки

$$y\ (-3) = \frac{1}{4}\left[(-3)^3 + 9(-3)^2 + 15(-3) - 9\right] = 0;$$

5) Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты *y=kx+б* воспользуемся формулами

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad \mathrm{b} = \lim_{x\to\infty}(\mathrm{f(x) - kx}).$$

Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}(\mathrm{x}^2 + 9\mathrm{x} + 15 - \frac{9}{\mathrm{x}}) = \infty.$$

Таким образом, у графика заданной функции наклонных асимптот нет.

6) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точки максимума $A_1(-5;\ 4)$, минимума $A_2\ (-1;\ -4)$, перегиба $A_3\ (-3;\ 0)$ и точку пересечения графика с осью *Oy* $A_4\left(0;-\frac{9}{4}\right)$.

С учетом результатов предыдущих исследований построим кривую (рисунок 8).

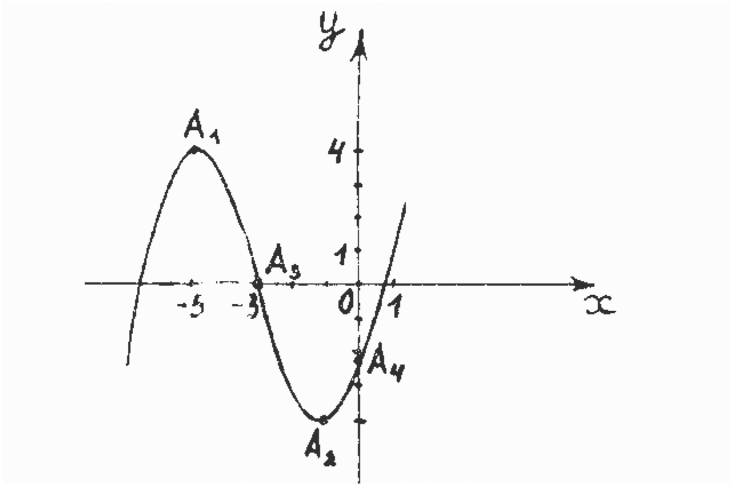


Рисунок 8- График функции $y=\frac{1}{4}\left(x^3+9x^2+15x-9\right)$.

Пример 2 Исследовать функцию $y=\frac{x^2+20}{x-4}$ и построить ее график.

1) Область определения.

$$D(x)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$$

2) Исследование на непрерывность и классификацию точек разрыва.

Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 4$.

Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to 4-0} \frac{x^2+20}{x-1} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 4+0} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to 4+0} \frac{x^2+20}{x-4} = +\infty.$$

Таким образом, точка $x = 4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ − вертикальной асимптотой графика.

3) Исследование на экстремум и промежутки монотонности.

$$y' = \frac{2x(x-4)-\left(x^2+20\right)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2};$$

$$\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}=0;$$

$$x^2-8x-20=0,$$

$$x_1=-2, \quad x_2=10.$$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,\,4)$	4	$(4,\,10)$	10	$(10,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	Не сущ.	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$$y_{\max}=y(-2)=-4;\quad y_{\min}=y(10)=20.$$

4) Исследование графика на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

$$y''=\frac{(2x-8)(x-4)^2-2(x-4)(x^2-8x-20)}{(x-4)^4}=\frac{2(x-4)\left[(x-4)^2-(x^2-8x-20)\right]}{(x-4)^4}=\frac{36}{(x-4)^3}.$$

Так как $y''\neq 0$, то график заданной функции точек перегиба не имеет. Остается выяснить вопрос об интервалах его выпуклости и вогнутости:

x	$(-\infty,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f''(x)$	−	Не сущ.	+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

5) Исследование графика на наличие наклонных асимптот.

$$k=\lim_{x\to\infty 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+20}{x-4}=4.$$

Таким образом, прямая $y=x+4$ − наклонная асимптота графика.

6) Построение графика.

Очевидно график заданной функции пересекает ось Oy в точке $(0;-5)$ и на основе обобщения результатов всех предыдущих исследований имеет вид, представленный на рисунке 9.

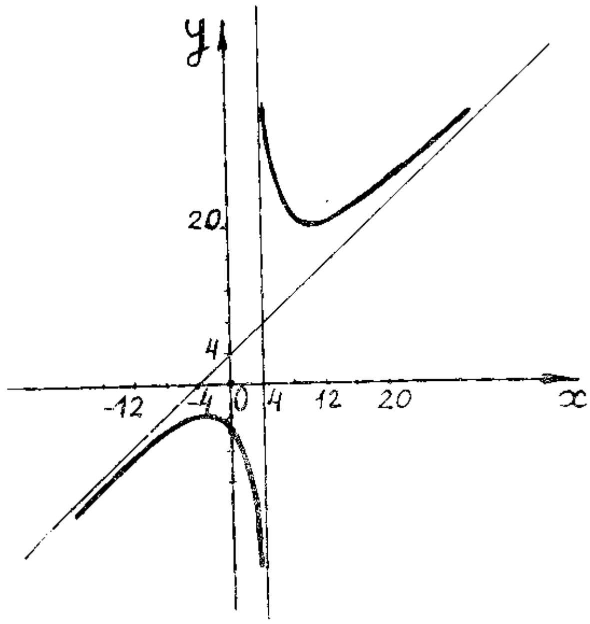


Рисунок 9 - График функции $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$.

Содержание заданий

1 Исследовать функцию на монотонность и экстремум

а) $f(x) = 1/3x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

б) $y = 5 + 12x - x^3$

в) $y = x^4 - 4x^3$

г) $f(x) = 6 - x - x^2$

д) $y = 6x^2 - x^3 - 9$

е) $y = x - \sin 2x$

ж) $y = (x - 5)\cdot e^x$

з) $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$

и) $f(x) = (x + 1)^3\cdot(5 - x)$

к) $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$

л) $y = x + \sqrt{3-x}$

2 Исследовать функцию на выпуклость. Найти точки перегиба.

а) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$

б) $y = -x^4 - 2x^3 + 15x - 6$

в) $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

3 Исследовать функцию и построить ее график.

а) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

б) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 3$

в) $y = 4x^2 - x^4$

г) $y = x^3 + 3x + 2$

д) $y = 2x^3 - 6x^2 + 4$

е) $y = (x - 1)^3 - 3(x - 1)$

ж) $y = x^4 - 2x^3 - 3$

з) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - \dfrac{9}{4}$

и) $y = 3x - x^3$

к) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$

л) $y = 3x^2 - 2x^3 + 6$

м) $y = 6x^2 - 9x - x^3$

н) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

о) $y = 0{,}1(x^4 - 8x^2 - 9)$

п) $y = x^4 - 4x$

р) $y = x \ln x$

с) $y = 3x^4 - 4x^3$

т) $y = x^2 e^x$

у) $y = -3x^3 + 6x^2 - 5x$

ф) $y = \dfrac{(1-3)^3}{1-2x}$

х) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3$

ц) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

ч) $y = x^3(1 + x)$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 20 Исследование функций и построение графиков в пакете MathCad (2ч.)

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при исследовании функций и построении их графиков. Приобретение навыков исследования средствами пакета.

Студент должен:

*Знать***:**

- признаки постоянства и монотонности функции, существование экстремума;
- достаточные признаки выпуклости функции, необходимое и достаточное условия перегиба;
- виды асимптот графика функции.

Уметь:

- применить производную для нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции;
- находить наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;
- применять производную для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости функции, точек перегиба;
- находить асимптоты графика функции.

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Рекомендации по выполнению заданий

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 + 32}{x + 2}$ и построить её график, а также график всех её асимптот (если таковые имеются).

1 Найти первую производную данной функции;

2 Найти критические точки функции;

3 Найти вторую производную данной функции;

4 Найти точки перегиба;

5 Найти область определения данной функции;

6 Определить поведение функции в граничных точках области определения;

7 Найти все асимптоты функции.

8 Построить график функции и графики всех найденных асимптот.

Решение:

1 Запишите функцию в виде: $y(x) := \frac{x^2 + 32}{x + 2}$.

С помощью меню **Вид - Панели инструментов - Вычисления** вызовите на экран панель инструментов, предназначенную для нахождения производных и интегралов (рисунок 10).

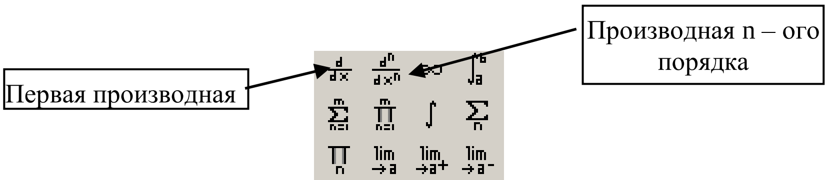


Рисунок 10 - Вычисления

Установите курсор в то место, где вы будете находить первую производную и активизируйте кнопку (Первая производная) (рисунок 11).

Создайте запись: $\frac{d}{dx}y(x)$

Установите курсор в конец введенной формулы рисунок 19.

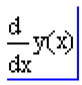


Рисунок 11 – Первая производная

Вызовите на экран панель инструментов Выражения(рисунок 12)

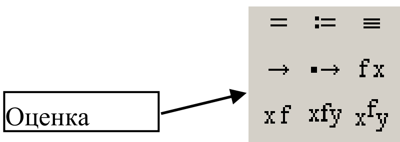


Рисунок 12- Выражения

На данной панели инструментов активизируйте кнопку Оценка. Нажмите кнопку Enter. Первая производная будет иметь вид рисунок 13:

$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow \boxed{2\cdot\frac{x}{(x+2)} - \frac{\left(x^2+32\right)}{(x+2)^2}}$$ Первая производная

Рисунок 13 – Первая производная

2 Для нахождения критических точек необходимо найти значения переменной x, при которых первая производная будет равняться 0. Для этого скопируйте выражение полученной первой производной ниже всех записей и с помощью панели инструментов Булевы операторы приравняйте первую производную к 0. Получите следующую запись (рисунок 14)

$$2\cdot\frac{x}{(x+2)} - \frac{\left(x^2+32\right)}{(x+2)^2} = 0$$

Рисунок 14 – Нахождение критических точек

Далее курсором выделите ту переменную, относительно которой необходимо разрешить уравнение. В данном случае этой переменной будет являться переменная x (рисунок 15).

$$2\cdot\frac{x}{(x+2)} - \frac{\left(x^2+32\right)}{(x+2)^2} = 0$$

Рисунок 15 - Нахождение критических точек

Выполните последовательность действий меню Символы – Переменные – Вычислить. После выполнения данной последовательности действий на экране, ниже записи первой производной, будут вычислены корни первой производной. Корни первой производной являются критическими точками исследуемой функции.

3 Для нахождения второй производной на панели иструментов Вычисления активизируйте кнопку Производная n- ого порядка (Рисунок 10). Создайте запись как на рисунке 16:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \rightarrow$$

Рисунок 16– Вторая производная

Нажмите Enter.

Вторая производная будет иметь вид как на рисунке 17

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) \rightarrow \boxed{\frac{2}{(x+2)} - 4\cdot\frac{x}{(x+2)^2} + 2\cdot\frac{\left(x^2+32\right)}{(x+2)^3}}$$

Вторая производная

Рисунок 17 - Вторая производная

4 Для нахождения точек перегиба необходимо найти значения переменной x, при которых вторая производная будет равняться 0. Выполнить самостоятельно аналогично пункту 2.

5 Область определения для данной функции $D \in (-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$. (В MathCad никуда не записывать).

6 Граничными точками области определения для данной функции являются точки: $-\infty, -2, +\infty$. Чтобы определить поведение функции в граничных точках области определения функции необходимо найти пределы функции во всех граничных точках области определения. Для этого установите курсор в ту область, где хотите найти предел и активизируйте на панели инструментов Вычисления кнопку Двусторонний предел (рисунок 18)

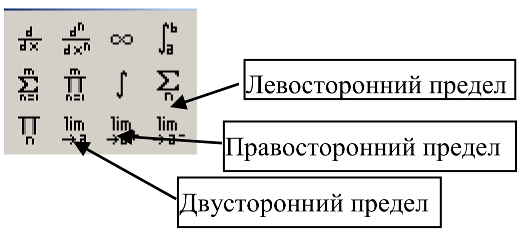


Рисунок 18- Пределы

Создайте запись (рисунок 19)

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \to$$

Рисунок 19 - Предел

Нажмите Enter.

Предел в граничной точке области определения будет найден (рисунок 20)

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \to -\infty$$

Рисунок 20 - Результат

Аналогично найдите пределы во всех граничных точках области определения, с учетом того, что в точках разрыва (для данной функции точкой разрыва является x=-2) необходимо находить левосторонний и правосторонние пределы (Рисунок. 26).

7 Для нахождения асимптоты необходимо построить следующую функцию: $f(x) := k \cdot x + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y(x) - x)$. Для нахождения переменных k и b создайте в MathCad следующие записи (рисунок 21)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} \to 1 \qquad \lim_{x \to \infty} (y(x) - x) \to -2$$

$$k := 1 \qquad b := -2$$

Рисунок 21 - Нахождение переменных k и b

Следовательно, функция асимптоты будет иметь вид: $f(x) := 1x - 2$ – уравнение асимптоты. Задайте в MathCad уравнение асимптоты. Если какой-то из пределов на рисунке 21 не существует, значит, данная функция $y(x)$ асимптот не имеет.

8 Для построения графиков функций $y(x)$ и асимптоты $f(x)$ (если она есть) установите курсор в ту область, где вы хотите построить графики и

активизируйте кнопку (Декартовы координаты) на панели инструментов Графики (рисунок 22).

Рисунок 22– Декартовы координаты

Заполните пустые слоты графика следующим образом, рисунок 23

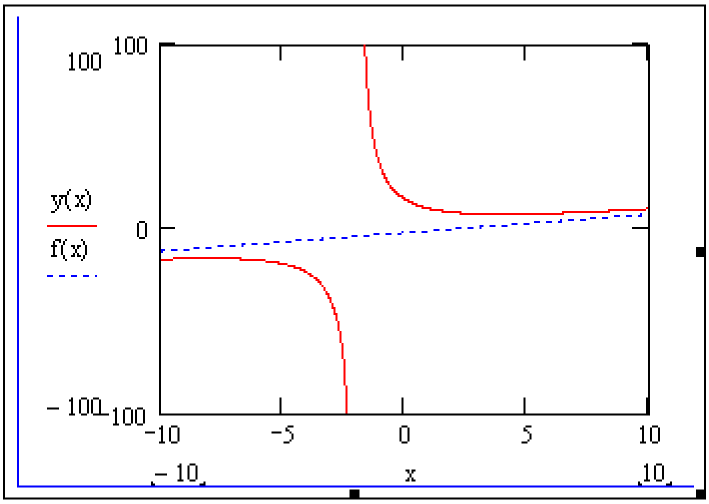


Рисунок 23 – График функции

Содержание заданий

Исследовать функцию f(x), построить её график, а также график всех её асимптот (если таковые имеются).

1 Найти первую производную данной функции;

2 Найти критические точки функции;

3 Найти вторую производную данной функции;

4 Найти точки перегиба;

5 Найти область определения данной функции;

6 Определить поведение функции в граничных точках области определения;

7 Найти все асимптоты функции.

8 Построить график функции и графики всех найденных асимптот.

1

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3 \cdot x - 6}{2 \cdot x}$

б) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + x} + \sqrt[3]{e^x}$

2

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 32}{x - 2}$

б) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + x} - \sqrt[3]{\dfrac{e^x}{x^2}}$

3

а) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7 \cdot x + 9}{2 \cdot x - 3}$

б) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 7 \cdot x} - \sqrt[3]{\dfrac{e^x}{x}} \cdot \ln\left(x^2\right)$

4

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 32}{x^2 - 2}$

б) $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 7 \cdot x + 5} - \sqrt[3]{\dfrac{e^x}{x}} \cdot \ln\left(x^4\right)$

5

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 32}{x - 2} + \dfrac{1}{x}$

б) $f(x) = \sqrt[2]{x + 5} - \sqrt[3]{\dfrac{e^x}{x}} \cdot \dfrac{1}{x}$

6

а) $f(x) = \dfrac{x - 32}{x - 2} + \dfrac{1}{x^2}$

б) $f(x) = \sqrt[2]{x + 5} - \sqrt[3]{\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}}$

7

а) $f(x) = \dfrac{x - 32}{x^2 - 2} + \dfrac{2 \cdot x - 1}{x^2}$

б) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 5 \cdot x - \dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}}$

8

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 32}{x^2 - 2} + \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

б) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x - \dfrac{5^x}{x^2}}$

9

а) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9}{2 \cdot x - 14} - \dfrac{1}{x - 7}$

б) $f(x) = \sqrt[2]{x^4 - x} - \sqrt[4]{\dfrac{5^x}{x^3}}$

10

а) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9 \cdot x}{x^2 + 5} - \dfrac{x^2}{x^2 - 7}$

б) $f(x) = \sqrt[2]{x^4 - \ln\left(x^2\right)} - \sqrt[4]{\dfrac{4^x \cdot x}{x^5 - 3}}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

РАЗДЕЛ 7 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 7.1 Неопределенный интеграл

Практическое занятие 21, 22 Методы вычисления неопределенного интеграла (4ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о неопределенных интегралах, их свойствах;
- формирование умений по вычислению неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной.

Студент должен:

*Знать***:**

- определение первообразной;
- определение неопределенного интеграла и его свойства;
- формулы интегрирования;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод замены переменной.

Уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования;
- находить неопределенные интегралы методом замены переменной.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Функцию *F(x)* называют первообразной (или примитивной) для функции *f(x)* на промежутке *X*, если для $\forall x \in X$ $F'(x) = f(x)$ или то же самое, что $dF(x) = f(x) \cdot dx$.

Действие нахождения первообразной называется интегрированием – операция, обратная для дифференцирования.

Если функция имеет первообразную *F(x)*, то она имеет бесконечное множество первообразных $F(x) + C$, где $C \in R$.

Совокупность всех первообразных для функции *f(x)* на *X* называется неопределённым интегралом функции *f(x)*.

Обозначение: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$,

где *F(x)* – одна из первообразных для функции на *X*,

f(x) – подынтегральная функция;

$f(x) \cdot dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования;

$\int$ - знак интеграла.

Читается: неопределённый интеграл *f(x)dx*.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1° Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x) \cdot dx\right)' = f(x).$$

2° Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\int f(x)dx = f(x) \cdot dx.$$

3° $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

4° Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и константы С

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

5° Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$$\forall c \in R,\ c \neq 0 \quad \int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx\,.$$

6° Интеграл от суммы равен сумме интегралов, т.е. для ∀ *f(x)* и *g(x)*

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx\,.$$

7° Если *F(x)* первообразная для *f(x)* на *X*, то

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + C\,.$$

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C$	9 $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
2 $\int 0dx = C$	10 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg^x + C$
3 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	11 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg(x) + C$
4 $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	12 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	13 $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
6 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\quad a > 0,\ a \neq 1$	14 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
7 $\int e^x dx = e^x + C$	15 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + C$
8 $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	16 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$

Вычисление неопределенного интеграла:

1 *Непосредственное интегрирование.*

Вычисление интеграла путём непосредственного использования таблицы простейших интегралов и их основных свойств.

2 *Метод замены переменной (метод подстановки)*.

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула

$$\int \varphi(t)\cdot\varphi'(t)\cdot dt = \int f(x)dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Вычислить интеграл $\int\left(3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + \frac{4}{x}\right)dx$.

Решение: Используя 5^0, 6^0 свойства и таблицу интегралов, имеем

$$\int\left(3x^4 - 7x^3 + 6x^2 + \frac{4}{x}\right)dx = 3\int x^4dx - 7\int x^3dx + 6\int x^2dx + 4\int\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{3x^5}{5} - \frac{7x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + 4\ln|x| + C = \frac{3x^5}{5} - \frac{7x^4}{4} + 2x^3 + 4\ln|x| + C$$

Пример 2 Вычислить $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$.

Решение:

$$\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{5x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + 5\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Пример 3 Вычислить $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Решение: $\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = x - arctgx + C$.

Пример 4 Вычислить интеграл $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx$.

Решение: $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx = \int\left(2\cdot 3^2\cdot 5^3\right)^x dx = \int 2250^x dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C$.

Пример 5 Вычислить интеграл $\int \sin 5x dx$.

Решение: По 7^0 свойству $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cdot \cos 5x + C$.

Пример 6 Вычислить интеграл $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$.

Решение: $\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x) dx =$

$= \int (1 + \sin 2x) dx = \int dx + \int \sin 2x dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Пример 7 Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение: Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$ или $x = t^2$. Тогда $dx = 2tdt$.

Следовательно, $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1 + t} = 2\int \frac{t^2 dt}{1 + t} = 2\int \frac{(t^2 - 1) + 1}{1 + t} dt =$

$= 2\int \left(t - 1 + \frac{1}{1 + t} \right) dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - 1 + \ln|1 + t| \right) + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|1 + \sqrt{x}\right| + C$

Пример 8 Вычислить $\int x^2 (3 + 2x^3)^4 dx$.

Решение: Положим $3 + 2x^3 = t$.

Дифференцируем обе части равенства: $d(3 + 2x^3) = dt$, $6x^2 dx = dt$.

Отсюда $x^2 dx = \frac{dt}{6}$.

Следовательно, $\int x^2 (3 + 2x^3)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{(3 + 2x^3)^5}{30} + C$.

Пример 9 Найти $\int \frac{3xdx}{\sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}}$.

Решение: Положим $x^2 - 3 = t$.

Дифференцируем обе части равенства: $d(x^2 - 3) = dt$, $2xdx = dt$.

Отсюда $xdx = \frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}} = \int \frac{3 \cdot \frac{dt}{2}}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{3}{2} \int t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{t} + C = \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3} + C.$$

Пример 10 Найти $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-5}}$.

Решение: Положим $x^4 = t$.

Дифференцируем обе части равенства $d\left(x^4\right) = dt$, $4x^3dx = dt$.

Отсюда $x^3dx = \frac{dt}{4}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-5}} = \int \frac{\frac{dt}{4}}{\sqrt{t^2-5}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \frac{1}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8-5}\right| + C.$$

Пример 11 Вычислить $\int \frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}$.

Решение: Положим $1+2\sin x = t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(1+2\sin x) = dt$, $2\cos xdx = dt$.

Отсюда $\cos xdx = \frac{dt}{2}$.

Следовательно, $\int \frac{3\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \int \frac{3\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 3\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 3\sqrt{t} + C = 3\sqrt{1+2\sin x} + C$.

Пример 12 Вычислить $\int \frac{2\sin xdx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение: Положим $\cos x = t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(\cos x) = dt$, $-\sin xdx = dt$.

Отсюда $\sin xdx = -dt$.

Следовательно,

$$\int \frac{2\sin xdx}{\sqrt{3+\cos^2 x}} = \int \frac{2\cdot(-dt)}{\sqrt{3+t^2}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} = -2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right| + C = -2\ln\left|\cos t+\sqrt{3+\cos^2 x}\right| + C$$

Пример 13 Вычислить $\int \frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+4}}$.

Решение: Положим $e^{2x} = t$.

Дифференцируем обе части равенства $d\left(e^{2x}\right) = dt$, $2e^{2x}dx = dt$.

Отсюда $e^{2x}dx=\frac{dt}{2}$.

Следовательно,

$$\int\frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+4}}=\int\frac{3\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}\sqrt{e^{4x}+4}\right|+C.$$

Пример 14 Вычислить $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx$.

Решение: Положим $2\ln x+3=t$.

Дифференцируем обе части равенства $d(2\ln x+3)=dt$, $\frac{2dx}{x}=dt$.

Отсюда $\frac{dx}{x}=\frac{dt}{2}$.

Следовательно, $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{(2\ln x+3)^4}{8}+C$.

Содержание заданий

Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

1 $\int\left(2x+4x^3+\frac{1}{x}+3\right)dx$;

2 $\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

3 $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

4 $\int\left(2^x+3^x\right)dx$;

5 $\int\left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$;

6 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

7 $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$;

8 $\int\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\right)dx$;

9 $\int e^x\left(2-\frac{l^{-x}}{x^3}\right)dx$;

10 $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos x^2 x}\right)dx$;

11 $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

12 $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

13 $\int (3-2x)^4 dx$

14 $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$;

15 $\int e^{-3x} dx$;

16 $\int \sqrt{4x-1} dx$;

17 $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) dx$;

18 $\int \sqrt[3]{5-6x} dx$;

19 $\int (3-2x)^4 dx$;

20 $\int \frac{dx}{5x+2}$.

Применяя метод замены переменной, вычислить интегралы:

21 $\int \sqrt{2x-3} dx$;

22 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$;

23 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$;

24 $\int (x^4+3)^5 \cdot x^3 dx$;

25 $\int \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+5}}$;

26 $\int \frac{3x^2 dx}{(2-x^3)^4}$;

27 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3-5}}$;

28 $\int \frac{4x dx}{5+x^2}$;

29 $\int \frac{x^3 dx}{3x^4-2}$;

30 $\int \frac{2\cos x dx}{3\sin x+5}$;

31 $\int \frac{3\cos x dx}{\sqrt[3]{1+2\sin x}}$;

32 $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2 (x^3-2)}$;

33 $\int e^{-x^3+2} \cdot x^2 dx$;

34 $\int x \sin(x^2+4) dx$;

35 $\int 5^{2x^2} x dx$;

36 $\int e^{2x} \sqrt{e^{2x}-1} dx$;

37 $\int \frac{2e^x dx}{(5+e^x)^2}$;

38 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-9}}$;

39 $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^4}}$;

40 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;

41 $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

42 $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[7]{3+5\sin 3x}} dx$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 23 Метод интегрирования по частям (2ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний о неопределенных интегралах, их свойствах;
- формирование умений по вычислению неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.

Студент должен:

*Знать***:**

- определение первообразной;
- определение неопределенного интеграла и его свойства;
- формулы интегрирования;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод подстановки;
- метод интегрирования по частям.

Уметь:

- находить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования;
- вычислять неопределенные интегралы методом замены переменных;
- вычислять интегралы методом интегрирования по частям.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Известно, что дифференциал произведения $u \cdot v$ вычисляется по формуле $d(uv) = udv + vdu$.

Проинтегрируем данное равенство $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$. Используя свойства интеграла, будем иметь $u \cdot v = \int udv + \int vdu$, отсюда

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu.$$

Данная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Эта формула применяется чаще всего к интегрированию выражений, которые можно представить в виде произведения двух сомножителей u и dv, причем за dv принимают такой множитель, от которого можно найти интеграл.

Основные виды интегралов, которые берутся по частям, представлены в таблице ($P_n(x)$ – многочлен степени n).

Таблица 1 – Основные виды интегралов, которые берутся по частям

	Интеграл	$u = u(x)$	dv
1	2	3	4
I	$\int P_n(x)\sin x\,dx$ $\int P_n(x)\cos x\,dx$ $\int P_n(x)\,e^x\,dx$ $\int P_n(x)\,a^x\,dx$	$u = P_n(x)$	$dv = \sin x\,dx$ $dv = \cos x\,dx$ $dv = e^x\,dx$ $dv = a^x\,dx$
II	$\int P_n(x)\ln x\,dx$ $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$ $\int P_n(x)\arccos x\,dx$ $\int P_n(x) arctg\ x\,dx$ $\int P_n(x) arcctg\ x\,dx$	$u = \ln x$ $u = \arcsin x$ $u = \arccos x$ $u = arctg\ x$ $u = arcctg\ x$	$dv = P_n(x)\,dx$
III	$\int e^x \sin x\,dx$ $\int e^x \cos x\,dx$ $\int a^x \sin x\,dx$	В данных интегралах за u можно принять любую функцию. Интегрируют два раза и приводят подобные интегралы	

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Найти $\int x \sin x dx$.

Решение: Положим $u=x$, $dv = \sin x dx$.

Тогда $du=dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$.

Используя формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x \sin x dx = -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 2 Найти $\int arctgx dx$.

Решение: Положим $u = arctgx$, $dv = dx$.

Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \int dx = x$.

Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^2}$ применим метод замены переменной.

Положим $1+x^2 = t$.

Тогда $d(1+x^2) = dt$, $2xdx = dt$, $xdx = \frac{dt}{2}$.

По формуле метода подстановки

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Итак, $\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$.

Пример 3 Найти $\int \ln x dx$.

Решение: Пусть $u = \ln x$, $dv = dx$.

Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$.

По формуле получим $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = s\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

Пример 4 Найти $\int(2x-3)e^{3x}dx$.

Решение: Пусть $u=2x-3$, $dv=e^{3x}dx$.

Тогда $du=2dx$, $v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}$.

По формуле имеем $\int(2x-3)e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}(2x-3)-\frac{2}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}(2x-3)-\frac{2}{9}e^{3x}+C$.

Пример 5 Найти $\int\left(3x^2+2x-5\right)\ln(x)dx$.

Решение: Положим $u=\ln x$, $dv=\left(3x^2+2x-5\right)dx$.

Тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x^3+x^2-5x$.

По формуле получаем

$$\int\left(3x^2+2x-5\right)\ln(x)dx=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x-\int\frac{x^3+x^2-5x}{x}dx=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x-\int\left(x^2+x-5\right)dx=$$
$$=\left(x^3+x^2-5x\right)\ln x--\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+C$$

Пример 6 Найти $\int x^2e^xdx$.

Решение: Положим $u=x^2$, $dv=e^xdx$.

Тогда $du=2xdx$, $v=e^x$.

Согласно формуле интегрирования по частям, имеем:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Для вычисления интеграла $\int xe^xdx$ снова применим формулу интегрирования по частям.

Положим $u=x$, $dv=e^xdx$.

Тогда $du=dx$, $v=e^x$.

Окончательно получим

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C.$$

Пример 7 Найти $\int e^x\sin xdx$.

Решение: Положим $u=e^x$, $dv=\sin xdx$.

Тогда $du=e^xdx$, $v=-\cos x$.

Применяя формулу метода интегрирования по частям, получаем:

$$\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx .$$

Полученный интеграл снова вычисляем методом интегрирования по частям.

Положим $u = e^x$, $dv = \cos xdx$.

Тогда $du = e^x dx$, $v = \sin x$.

По формуле имеем:

$$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx .$$

Таким образом, $\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$,

мы пришли к исходному интегралу. Перенося интеграл из правой части этого равенства в левую, получим:

$$2\int e^x \sin xdx = e^x (\sin x - \cos x);$$

$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Содержание заданий

Вычислить следующие интегралы:

1 $\int x\, arctg\, x\, dx$ **2** $\int x^3 e^{-x} dx$;

3 $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ **4** $\int \arcsin xdx$;

5 $\int xe^{-x} dx$ **6** $\int e^x \cos xdx$;

7 $\int arctg\sqrt{7x-1}dx$ **8** $\int e^{2x} \cos 3xdx$;

9 $\int x\ln(3x+2)dx$ **10** $\int x\ln xdx$;

11 $\int e^x \sin 2xdx$ **12** $\int (x^3+1)\cos xdx$;

13 $\int (4x^3+6x-7)\ln xdx$ **14** $\int \arccos 5xdx$;

15 $\int (x^2+3x+2)\ln xdx$ **16** $\int \arcsin 2xdx$;

17 $\int xe^{5x}dx$ **18** $\int e^{2x}\sin 4xdx$.

Тема 7.2 Определенный интеграл

Практическое занятие 24, 25 Методы вычисления определенного интеграла (4ч.)

Цель:

- обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об определенных интегралах, их свойствах;
- формирование умений по вычислению определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница, методом замены переменной, методом интегрирования по частям.

Студент должен:

Знать:

- определение определенного интеграла, его геометрический смысл и свойства;
- способы вычисления определенного интеграла.

Уметь:

- вычислять определенный интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница;
- вычислять определенный интеграл с помощью метода замены переменной и метода интегрирования по частям.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $\left[a,b\right]$. Разобьем отрезок $\left[a,b\right]$ с помощью точек $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ на более мелкие отрезки $\left[x_i\ ,x_{i+1}\right]$. Внутри каждого из последних отрезков выберем точку c_i . Тогда число, равное $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$, называется соответствующей *интегральной суммой.*

Предел интегральных сумм для последовательности разбиений отрезка $\left[a,b\right]$, когда $\max\limits_{0 \le i < n}\left|x_{i+1} - x_i\right|$ стремится к нулю, (если таковой предел существует и не зависит от выбора разбиений отрезка $\left[a,b\right]$ и точек c_i) называется *определенным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ на отрезке $\left[a,b\right]$.

Свойства определенного интеграла:

1^0 Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx.$$

2^0 Определенный интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых:

$$\int\limits_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$$

3^0 Если на отрезке $\left[a,b\right]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

4^0 *Теорема о среднем.* Если функция $f(x)$ непрерывна на $\left[a,b\right]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

5^0 Для любых трех чисел *a, b, c* имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если только все эти интегралы существуют.

6^0 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Вычисление определенного интеграла:

1 *Формула Ньютона-Лейбница.*

Если F(x) - произвольная первообразная для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2 *Замена переменных в определенном интеграле.*

Пусть $f(x)$ - некоторая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$. Пусть $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b,$ функции $\varphi(t), \varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

3 *Интегрирование по частям.*

Для любых непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

или, в обозначениях $\begin{vmatrix} u = f(x) & dv = g'(x)dx \\ du = f'(x)dx & v = g(x) \end{vmatrix}$, $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Геометрические приложения определенного интеграла

1 *Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольной системе координат*

а) Область D ограничена кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, причем $f(x) \ge g(x)$ для $x \in [a;b]$

$$S_D = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx .$$

б) Область D ограничена кривыми $x = f(y)$ и $x = g(y)$, прямыми $y=c$ и $y=d$, причем $f(y) \ge g(y)$ для $y \in [c;d]$.

$$S_D = \int_c^d \left(f(y) - g(y) \right) dy .$$

2 *Вычисление объема тела вращения*

а) Объем тела, образованного вращением *вокруг оси* Ox криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$ вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

б) Объем тела, образованного вращением *вокруг оси* Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$, $y = d$, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy .$$

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Вычислить $\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 7 \right) dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение: $\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+7\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+7x\right)_{-1}^{2}=$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+7\cdot 2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}+7\cdot(-1)\right)=\frac{8}{3}-6+14+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+7=19{,}5.$$

Пример 2 Вычислить $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$.

Решение: Воспользуемся методом интегрирования по частям.

Положим $u=x,\quad dv=e^{-x}dx$.

Тогда $du=dx,\ v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$.

Следовательно, $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=-x\cdot e^{-x}\Big|_0^1+\int_{0}^{1}e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1=\frac{e-2}{e}$.

Пример 4 Вычислить $\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx$.

Решение: Положим $x^2-7=t$. Тогда $d\left(x^2-7\right)=dt, 2xdx=dt, xdx=\frac{1}{2}dt$;

Если $x=2\sqrt{2}$, то t=1; если x=4, то t=9.

Следовательно,

$$\int_{2\sqrt{2}}^{4}3x\sqrt{x^2-7}dx=\int_{1}^{9}3\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{3}{2}\int_{1}^{9}\sqrt{t}dt=\frac{3}{2}\int_{1}^{9}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9=t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=t\cdot\sqrt{t}\Big|_1^9=9\sqrt{9}-1\sqrt{1}=26$$

Пример 5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x$, y=x+4 (рисунок 24).

Решение: Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу непрерывными линиями $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, пересекающими в точках абсциссами $x=a$ и $x=b$, определяется по формуле S=$\int_{a}^{b}\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx$ (1)

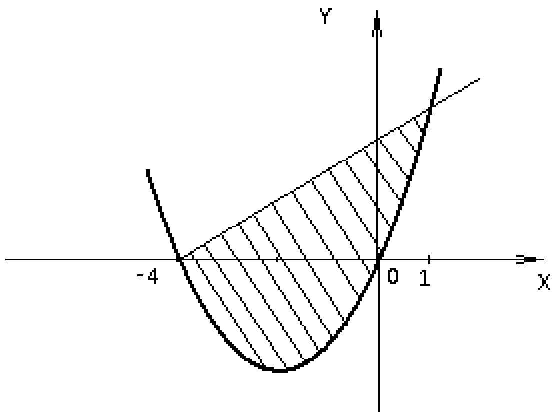


Рисунок 24 – Чертёж графика

Для нахождения точек пересечения данных линий решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases} \qquad x^2 + 4x = x + 4, \qquad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

Применяя формулу (1), получим:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(x + 4 - x^2 - 4x\right) dx = \int_{-4}^{1} \left(4 - 3x - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-4}^{1} = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} =$$

$=20\frac{5}{6}$ (кв. ед.)

Содержание заданий

Вычислить определенные интегралы:

1 $\int_{-1}^{3} \left(1 - 2x + 3x^2\right) dx$;

2 $\int_{1}^{4} \left(2x^2 - 3x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

3 $\int_{-1}^{1} \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;

4 $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$;

5 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x + \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$;

6 $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$;

7 $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 - x^2}$;

8 $\int_{0}^{2} (2x - 1)^3 dx$;

9 $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}dx$;

10 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx$;

11 $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$;

12 $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{3dx}{2\cos^2 3x}$;

13 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

14 $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

15 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$;

16 $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$;

17 $\int\limits_{-1}^2 \left(x^2+1\right)^3 xdx$;

18 $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{128xdx}{(x^2+1)^5}$;

19 $\int\limits_0^{\sqrt{3}} 6\sqrt{x^4+16x}x^3dx$;

20 $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$;

21 $\int\limits_2^4 \frac{15xdx}{(x^2-1)^3}$;

22 $\int\limits_0^1 \frac{6x^2dx}{1+2x^3}$;

23 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$;

24 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}$;

25 $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+5}$;

26 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\cdot \sin xdx$.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

1 $y=x^3$; $y=\sqrt{x}$.

2 $y=\frac{5}{x}$; $y=6-x$.

3 163. $y=\frac{1}{2}x^2$; $y=4-x$.

4 $y=x^2+2$; $y=4-x^2$.

5 $y=-x^2+1$; $y=x-1$

6 $y=x^2 - 4x + 4$; $y=x$.

7 $x=\frac{1}{4}\cdot x^2$; $y^2=4x$.

8 $y=\frac{6}{x}$; $y=7-x$.

9 $y=3x^2+1$;$y=3x+7$.

10 $y=2x-x^2$; $y=-x$.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

11 $y^2 = x$; $y = x^2$.

12 $xy = 4$; $x = 1$; $x = 4$; $y = 0$.

13 $y = \sin x$ (одна полуволна); $y = 0$.

14 $y = x^2 + 1$; $y = 3x – 1$.

15 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

16 $y^2 = 4 – x$; $x = 0$.

17 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

18 $x + y – 2 = 0$; $x = 0$; $y = 0$.

19 $xy = 2$; $x = 0$; $y = 4$.

20 $y = - x^2 + 4$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 3$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Тема 7.3 Несобственные интегралы

Практическое занятие 26 Несобственный интеграл (2ч.)

Цель:

– обобщение, систематизация, углубление, закрепление знаний об определенных интегралах, их свойствах;
– формирование умений по вычислению определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница, методом замены переменной, методом интегрирования по частям.

Студент должен:

Знать:

– определение определенного интеграла, его геометрический смысл и свойства;
– способы вычисления определенного интеграла.

Уметь:

– вычислять определенный интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница;
– вычислять определенный интеграл с помощью метода замены переменной и метода интегрирования по частям.

Средства обучения: доска, мел, калькулятор.

Краткие теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ или $(-\infty;a]$ или $(-\infty;+\infty)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется ***несобственным интегралом первого рода*** или ***несобственным интегралом от f (x) на бесконечном промежутке*** $[a;+\infty)$, обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и в этом случае говорят, что интеграл ***сходится.***

Если $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует или равен ∞, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***расходятся.***

Аналогично определяются интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_b^a f(x)dx + \lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$$

Если пределы конечные, то соответствующий интеграл считают ***сходящимся,*** а если хотя бы один из пределов не существует или бесконечный, то интеграл считают ***расходящимся.***

1) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, а в точке $x=b$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x=b$ будем называть ***особой точкой*** функции $f(x)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** от функции f (x) на отрезке [a;b] и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***сходится*** и пишут равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если конечный предел не существует или он бесконечный, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***расходится.***

2) Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, а в точке $x=a$ либо не определена, либо имеет разрыв. Такую точку $x=a$ называют особой точкой функции $f(x)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***сходится*** и пишут равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$.

Если конечный предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***расходится.***

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x=c$ *внутри* отрезка $[a;b]$, то по определению полагают:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right)$$

при условии, что *оба* предела в правой части существуют, и ε и δ не зависят друг от друга. Этот интеграл также называют ***несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Сходимость или ***расходимость*** такого интеграла зависит от существования или не существования конечного предела.

Рекомендации по выполнению заданий

Пример 1 Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$.

Решение: $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b xe^{-2x}dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right] =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x}\Bigg|_1^b + \frac{1}{2}\int\limits_1^b e^{-2x} \right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{+2b}} + \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Bigg|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{2e^{2b}} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2b} + \frac{1}{4}e^{-2} \right) = -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{2e^{2b}} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{2b}} + \frac{3}{4e^2} =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4e^{2b}} - 0 + \frac{3}{4e^2} = \frac{3}{4e^2}$$

Так как получили конечное число, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-2x}dx$ сходится и равен $\frac{3}{4e^2}$.

Пример 2 Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \ln x dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx \right) = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dV = dx & V = x \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Bigg|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx \right) =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Bigg|_{\varepsilon}^{1}-x\Bigg|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln 1}{1}-\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}-1+\varepsilon\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(0+\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^{2}}}-1+0\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon-1)=0-1=-1$$

Так получили конечное число, то $\int_0^1 \ln x dx$ сходится и равен «-1».

Пример 3 Исследовать на сходимость:

Решение:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0)=\lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon))=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

Так как получили конечное число, то $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Пример 4 Исследовать на сходимость:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2}+\int_0^1\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1}\right)=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right)=\infty+\infty=\infty$$

Так получили бесконечность, то $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$ расходится.

Содержание заданий

Вычислить несобственный интеграл или установить расходимость.

1 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

2 2 а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^5}}$; б) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

3 а) $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$; б) $\int\limits_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

4 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+3)^4}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

5 а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$ б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6 а) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

7 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+2)^3}$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

8 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

9 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-4}$.

10 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^5}}$.

11 а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} tgx\,dx$.

12 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2 \ln x\,dx$.

13 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-8x+17}$; б) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

14 а) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

15 а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^3}$.

16 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctgx\,dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

17 а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$; б) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$.

18 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$; б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

19 а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

20 а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

Практическое занятие 27 Решение задач интегрального исчисления в пакете MathCad (2ч.)

Цель:

Изучение возможностей пакета MathCad при решении задач интегрального исчисления. Приобретение навыков вычисления интегралов средствами пакета.

Студент должен:

Знать:

- определение определенного интеграла, его геометрический смысл и свойства;
- способы вычисления определенного интеграла.

Уметь:

- вычислять определенный интеграл с помощью основных свойств и формулы Ньютона-Лейбница;
- вычислять определенный интеграл с помощью метода замены переменной и метода интегрирования по частям.

Средства обучения: компьютер, математический пакет MathCad.

Краткие теоретические сведения

Для вычисления интегралов в Mathcad используется панель Calculus (рисунок 25).

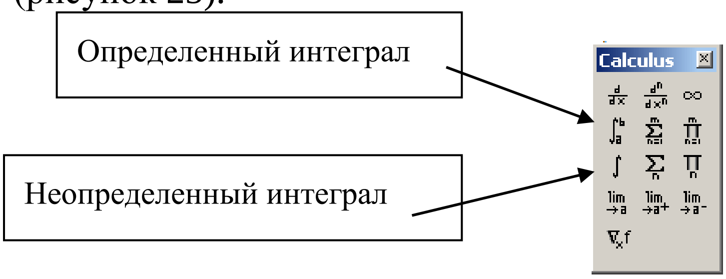


Рисунок 25 - Панель инструментов Calculus

Рекомендации по выполнению заданий

Пример1 Вычисление неопределенного интеграла

$$\int (\tan(x))^2 dx \to \tan(x) - x \qquad \int x\cdot e^{-x} dx \to -e^{-x}\cdot(x+1)$$

Пример 2 Вычисление определенного интеграла в символьном и численном виде

символьный метод	численный метод
$\int_0^{\pi} \cos(x)^2 dx \to \frac{\pi}{2}$	$\int_0^{\pi} \cos(x)^2 dx = 1.571$

Пример 3 Вычисление несобственного интеграла в символьном и численном виде

символьный метод	численный метод
$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \to \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \to \sqrt{\pi}$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.772$

Содержание заданий

Найти интегралы:

1

а) $\int \frac{x^3dx}{1+x^8}$

б) $\int \frac{x^3-3}{x^2+6x+7}dx$

в) $\int \left(3x+8\sqrt[3]{x}-1\right)dx$

г) $\int \arcsin x dx$

д) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

2

а) $\int \left(8x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+9\right)dx$

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+3}}$

в) $\int \frac{x^3+4}{x^2+4x+4}dx$

г) $\int x^2 \ln x dx$

д) $\int \cos^4 x dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

3

а) $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

в) $\int \arccos 2x dx$

д) $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$

б) $\int \frac{x^3-2}{x^2-3x+2}dx$ г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-5}}$ е) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

4 а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ в) $\int x\cos 3x\,dx$ д) $\int \sin^4 x\,dx$

б) $\int \frac{x^3}{x^2+x+1}dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$ е) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

5 а) $\int \frac{e^{2x}dx}{4+e^{2x}}$ в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$ д) $\int \sin 5x \sin 6x\,dx$

б) $\int \frac{x^3-4}{x^2+5x+6}dx$ г) $\int \arcsin 2x dx$ е) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

6 а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx$ в) $\int xe^{-4x}dx$ д) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

б) $\int \frac{x^3+1}{x^2-7x+10}dx$ г) $\int e^{x^3}x^2dx$ е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

7 а) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-3}}$ в) $\int arctgxdx$ д) $\int \sqrt{1-3x}dx$

б) $\int \frac{x^3-2}{x^2-4x+3}dx$ г) $\int \sin^3 xdx$ е) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$

8 а) $\int \sin x\cos^2 x\,dx$ в) $\int x^3 \ln xdx$ д) $\int \cos 4x \cos 7xdx$

б) $\int \frac{x^3+2}{x^2+2x+4}dx$ г) $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$ е) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x+1}}$

9 а) $\int e^{x^2}xdx$ в) $\int x\sin 2xdx$ д) $\int \frac{dx}{x^2+5x}$

б) $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx$ г) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$ е) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$

10 а) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ в) $\int xe^{3x}dx$ д) $\int \sqrt[3]{1+3x}dx$

б) $\int \frac{x^3+2}{x^2+4x+5}dx$ г) $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$ е) $\int \frac{dx}{x^3+8}$

Вычислить интегралы:

1 а) $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2dx$ б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos xdx$

2 а) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x}{x}dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

3 а) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$ б) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

4 а) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}}$ б) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ в) $\int_1^2 \frac{x^3dx}{x^4+8}$

5 а) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ б) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ в) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1 а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ б) $\int_2^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

2 а) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$

3 а) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4 а) $\int_0^\infty e^{-3x}dx$ б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$

5 а) $\int_2^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$ б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

6 а) $\int_0^\infty \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ б) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$

7 а) $\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2}$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

8 а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ б) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

9 а) $\int_0^\infty 2^{-x}dx$ б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$

10 а) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$ б) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$

Формы контроля: фронтальный контроль, индивидуальный контроль

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ

Основная литература:

1 Баврин, И. И. Математика для технических колледжей и техникумов [Электронный ресурс]: учебник и практикум для СПО / И. И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 329 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ruhttps://www.biblio-online.ru

2 Богомолов, Н. В. Математика [Электронный ресурс]: учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

3 Высшая математика : учебник и практикум для СПО / М. Б. Хрипунова [и др.] [Электронный ресурс]: под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 472 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

4 Шипачев, В. С. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум для СПО / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 447 с. — Режим доступа: https://www.biblio-online.ru

Интернет –ресурсы:

5 Белых С.В. Карманный справочник по математике [Электронный ресурс]. - Ростов н/Д: Феникс, 2013. - Изд. 2-е. - 224 с. - Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

6 Белых С.В. Памятка по алгебре и геометрии [Электронный ресурс] . - Ростов н/Д: Феникс, 2014. - 96 с. – Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

7 Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа– Режим доступа: http://www.bymath.net

8 Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября» – Режим доступа: http://mat.1september.ru

9 Задачи по геометрии: информационно-поисковая система – Режим доступа: http://zadachi.mccme.ru

10 Интернет-проект «Задачи» – Режим доступа: http://www.problems.ru

11 Луканкин А.Г. Математика [Электронный ресурс] : учеб. для учащихся учреждений сред. проф. образования / А. Г. Луканкин. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014. - 320 с. - Режим доступа: http://www.medcollegelib.ru.

12 Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online) – Режим доступа: http://www.mathtest.ru

13 Математическое образование: прошлое и настоящее. Интернет-библиотека по методике преподавания математики – Режим доступа: http://www.mathedu.ru

14 Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru/collection/matematika

15 Московский центр непрерывного математического образования – Режим доступа: http://www.mccme.ru

16 Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» – Режим доступа: http://www.kvant.info ,http://kvant.mccme.ru

17 Портал Allmath.ru — Вся математика в одном месте – Режим доступа: http://www.allmath.ru

18 Портал Math.ru: библиотека, медиатека, олимпиады, задачи, научные школы,учительская, история математики – Режим доступа: http://www.math.ru

19 Прикладная математика: справочник математических формул, примеры и задачи с решениями – Режим доступа: http://www.pm298.ru

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ

Номер изме-нения	Номер листа				Всего листов в документе	ФИО и подпись ответственного за внесение изменения	Дата внесения изменения	Дата введения изменения
	измененного	замененного	нового	изъятого				