

С.А.Попов, В.А.Андреев, М.А.Хусаинов, А.Б.Бондарев

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВЫПУКЛЫХ СЕГМЕНТОВ ИЗ СПЛАВОВ TiNi С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

A least-squares method for constructing the surface of allowable geometric parameters is used. On the basis of the model of the clap force dependence of these parameters and the obtained allowable surface the optimal parameters providing the maximum clap force value has been defined.

Введение

В статье [1] рассмотрена задача моделирования зависимости силы хлопка P (или силы удара) выпуклых сегментов с памятью формы от геометрических размеров — диаметра (D), толщины круглой пластинки (h) и радиуса кривизны (R) срединной поверхности. Полученная по результатам обработки наблюдений модель зависимости силы хлопка от геометрических размеров имеет вид

$$P = b_0 + b_1x_1 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2, \quad (1)$$

где x_1, x_2, x_3 — геометрические параметры D, h и R соответственно (в мм). Оценки коэффициентов этой модели и соответствующие им t -статистики приведены в табл. 1.

Таблица 1
Оценки коэффициентов модели
и абсолютные величины
их t -статистик

$b_0/ t_0 $	-19/2,97
$b_1/ t_1 $	2,17/3,93
$b_{12}/ t_{12} $	-4,46/2,20
$b_{13}/ t_{13} $	-8,72·10 ⁻² /2,71
$b_{23}/ t_{23} $	2,93/2,04
$b_{11}/ t_{11} $	9,16·10 ⁻² /2

Оценка коэффициента b считается статистически значимой, если соответствующая t -статистика по абсолютной величине превышает квантиль распределения Стьюдента $t_{1-\alpha, f}$, т.е. $|t| \geq t_{1-\alpha, f}$, где f — число степеней свободы ($f = n - 1$, n — объем выборки), α — уровень значимости, который в технических задачах обычно принимается равным 0,05. Для $n = 41$ $t_{1-0,05,40} = 1,68$, поэтому все коэффициенты значимы.

Полученная модель (1) позволяет рассчитать величину силы хлопка при заданных геометрических параметрах. Однако хлопок выполняется не при всех комбинациях этих параметров, поэтому для расчета силы хлопка кроме функции (1) необходимо построить область допустимых значений геометрических параметров. В данной работе используется метод построения разделяющей поверхности, позволяющий оптимизировать геометрические параметры в целях реализации эффекта хлопка максимальной силы.

Построение разделяющей поверхности

Использование параметров распределения вероятностей классов при построения дискриминанта Фишера и статистического моделирования для уточнения разделяющей поверхности приводит к большим погрешностям ввиду недостаточной информации о классах. В этих условиях можно использовать метод наименьших квадратов [2], в соответствии с которым можно строить разделяющую поверхность $f(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = 0$, обеспечивающую минимум суммы

квадратов отклонений в виде $\sum_{i=1}^n [f(\mathbf{A}, \mathbf{X}_i) - y_i]^2$, где

$\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}^T$ — вектор коэффициентов разделяющей поверхности; $\mathbf{X} = \{D, h, R\}^T = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ — вектор геометрических параметров. При $y = 1$ хлопок реализуется, а при $y = -1$ его нет.

Однако при таком подходе вклад в сумму отклонений будут давать объекты с большими значениями $f(\mathbf{A}, \mathbf{X})$, что приводит к значительным ошибкам распознавания, особенно при сложном виде разделяющей функции, характерном для рассматриваемого случая.

Следует считать, что для каждого объекта существует вероятность эффекта хлопка с ударом q_1 и вероятность его отсутствия q_2 ($q_1 + q_2 = 1$). Факт реализации хлопка ($y = 1$) или его отсутствие ($y = -1$) дает оценку величины $q = q_1 - q_2$. Аппроксимация зависимости величины q от геометрических параметров записывается в виде

$$q(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \text{sign}[g(\mathbf{X}, \mathbf{A})] \{1 - \exp[-|g(\mathbf{X}, \mathbf{A})|]\}, \quad (2)$$

где функция $g(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ представляется полной квадра-

тичной функцией $g(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \mathbf{X} = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i +$

$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j = 0$, $i, j = \overline{1, m}$. Тогда разделяющая

поверхность определяется уравнением

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = 0. \quad (3)$$

Для расчета оценок коэффициентов разделяющей функции можно использовать метод наименьших квадратов. В нашем случае этот расчет выполняется с помощью следующей итерационной процедуры:

$$A^{s+1} = A^s + \left[\sum_{i=1}^n P(X_i, A^s) P^T(X_i, A^s) \right]^{-1} \times \sum_{i=1}^n P(X_i, A^s) [y_i - q(X_i, A)], \quad (4)$$

где s — номер итерации; $P(X, A) = \frac{\partial q(X, A)}{\partial A} = \text{sign}[g(X, A)] \exp[-|g(X, A)|] \frac{\partial g(X, A)}{\partial A}$, а $\frac{\partial g(X, A)}{\partial A} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_3^2\}^T$.

Ковариационная матрица оценок коэффициентов (4) рассчитывается по формуле

$$V_A = \sigma_e^2 \left[\sum_{i=1}^n P(X_i, A) P^T(X_i, A) \right]^{-1}, \quad (5)$$

где σ_e^2 — дисперсия ошибки наблюдения классов:

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^n [q(X_i, A) - y_i]^2 \quad (l — \text{число коэффициентов в модели (2)}).$$

Диагональные элементы матрицы V_A (5) представляют дисперсии оценок соответствующих коэффициентов, что позволяет рассчитать их t -статистики и, таким образом, проверить их значимость.

В результате расчетов по выборке из 41 сегмента получена разделяющая поверхность (3) с десятью коэффициентами в виде

$$a_0 + a_1 D + a_2 h + a_3 x R + a_{12} x D x h + a_{13} x D x R + a_{23} h x R + a_{11} D^2 + a_{22} h^2 + a_{33} R^2 = 0. \quad (6)$$

Расчет вектора оценок коэффициентов в выражении (6) и ковариационной матрицы этих оценок (5) выполнялся по разработанной программе в соответствии с итерационной процедурой (4). Получены следующие значения коэффициентов: $a_0 = 1$; $a_1 = -4,12$; $a_2 = -3,42$; $a_3 = -8,09 \cdot 10^{-3}$; $a_{12} = 0,384$; $a_{13} = 3,48 \cdot 10^{-3}$; $a_{23} = -6,72 \cdot 10^{-2}$; $a_{11} = -5,74 \cdot 10^{-3}$; $a_{22} = -2,4$; $a_{33} = -7,73 \cdot 10^{-4}$. Все коэффициенты статистически значимы.

Данная разделяющая поверхность правильно

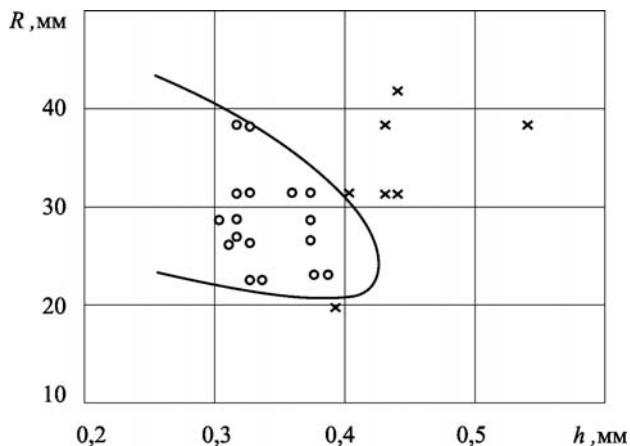


Рис.1. Разделяющая поверхность для диаметра хлопкуна $D = 17$ мм и объекты с хлопком (кружок) и без хлопком (крестик)

распознает все объекты, как с хлопком, так и без хлопком (см. рис.1).

Расчет оптимальных значений

Оптимальные значения параметров определялись методом статистических испытаний [3]. Для этого генерировался вектор коэффициентов B модели (1) с ковариационной матрицей V_B , вектор коэффициентов разделяющей функции (3) с коэффициентами A и с ковариационной матрицей V_A . Далее в заданном интервале генерировался вектор параметров X . Если этот вектор принадлежал области допустимых значений, определяемой неравенством $g(X, A) > 0$, то рассчитывалось значение отклика P . В результате статистических испытаний при заданном диаметре D определялось максимальное значение силы хлопком P_{\max} и соответствующие ему значения параметров — h_{\max} и R_{\max} .

Дисперсия σ^2 оценки силы хлопком в процессе статистических испытаний по определению максимального значения (внутренний цикл) рассчитывается по формуле

$$\sigma_{j+1}^2 = [(P_j - \bar{P}_j)(P_j - \bar{P}_j) + (j-1)\sigma_{P,j}^2] / j,$$

где $\bar{P}_{j+1} = [P_j + (j-1)\bar{P}_j] / j$, а j — номер статистического испытания.

Относительная погрешность вычислений силы \bar{P} методом статистических испытаний рассчитывается по формуле

$$T = \sigma_{P,j} / \sqrt{j \bar{P}_j}. \quad (7)$$

Аналогично определялись значения параметров \bar{h}_{\max} и \bar{R}_{\max} , обеспечивающих наибольшую силу удара, и дисперсии оценок этих параметров σ_h^2 и σ_R^2 во внешнем цикле статистических испытаний.

Во внутреннем цикле статистических испытаний для определения максимального значения силы P при заданной величине X задавалось 10^7 испытаний, погрешность определения силы T (7) не более $1,1 \cdot 10^{-4}$. Во внешнем цикле — для определения максимального значения P и соответствующих ему параметров X задавалось 10^5 испытаний, погрешность определения оптимальных параметров составила $5,4 \cdot 10^{-4}$.

Зависимость наибольшей силы хлопком P_{\max} от диаметра сегмента D , а также получаемые оптимальные значения толщины h_{\max} и радиуса прогиба R_{\max} показаны в табл.2, где под косой чертой приводятся соответствующие стандартные отклонения (σ).

Таблица 2
Оптимальные параметры h_{\max} и R_{\max}
в зависимости от диаметра D

D	$\bar{P}_{\max} / \sigma_P$	$\bar{h}_{\max} / \sigma_h$	$\bar{R}_{\max} / \sigma_R$
17	11,5/0,9	0,25/3,7·10 ⁻³	22,6/2,2
20	10,3/1,1	0,46/4,7·10 ⁻³	23,1/2,9
30	22,5/2,1	0,68/6·10 ⁻³	18,8/3,2
40	31,8/4,3	0,81/8,1·10 ⁻³	23,8/4,7

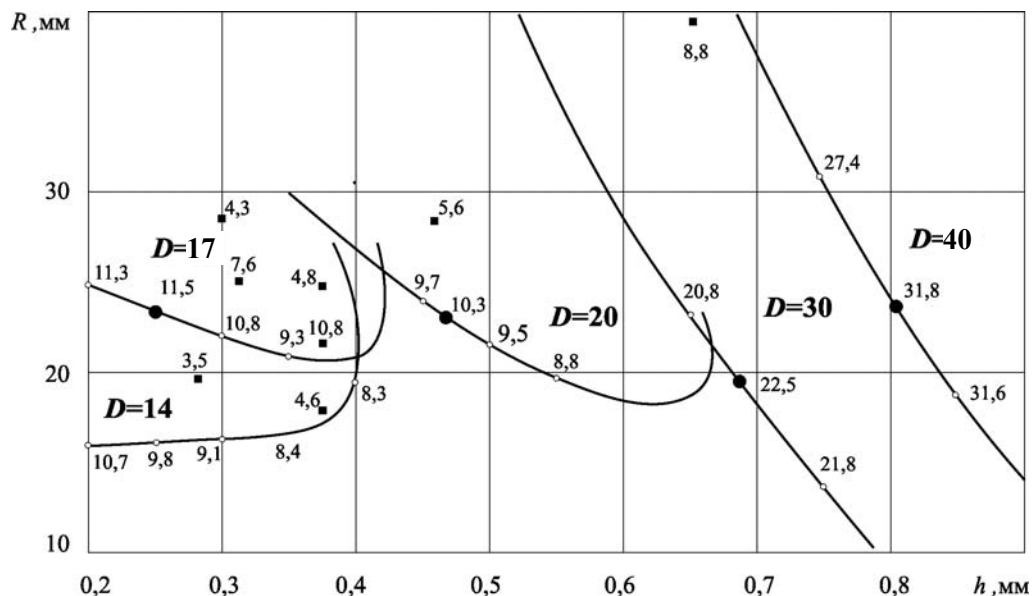


Рис.2. Сила хлопка и области допустимых параметров. \circ — точки, соответствующие расчетным значениям параметра R , обеспечивающим наибольшую силу хлопка, при заданном диаметре D и заданной толщине h , изменяющейся через 0,05 мм; \bullet — точки, соответствующие расчетным значениям параметров R и h , обеспечивающим наибольшую силу хлопка для данного диаметра D ; \blacksquare — точки, показывающие значения параметров R и h экспериментальных сегментов с хлопком для соответствующего диаметра D . Соответствующее значение силы хлопка в килограммах приводится рядом с точкой

На рис.2 показаны области допустимых значений параметров, экспериментальные значения и оптимальные параметры сегментов.

Вывод

Приведенный график (рис.2) позволяет определить оптимальные параметры сегмента, обеспечивающие максимальную силу удара P_{\max} , в следующих ситуациях:

- при заданном диаметре D и расчетных значениях h_{\max} и R_{\max} ;
- при заданных диаметре D , толщине h и расчетном значении R_{\max} ;
- при заданных диаметре D , радиусе R и рас-

четном значении h_{\max} .

Полученные результаты позволяют существенно оптимизировать геометрические размеры выпуклых сегментов.

1. Попов С.А., Хусаинов М.А., Бондарев А.Б., Андреев В.А.

// Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2005. №34. С.12-16

2. Л.Хартман и др. Планирование экспериментов в исследовании технологических процессов. М.: Мир, 1977. 552 с.
3. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 349 с.