

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

С.И.Эминов, А.В.Сочилин

NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING PHASED ANTENNA ARRAYS

S.I.Eminov, A.V.Sochilin

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Stefan.eminov@novsu.ru

Предложен новый, математически корректный, метод электродинамического анализа бесконечных антенных решеток. В основе метода лежит изучение свойств функции Грина бесконечной периодичной решетки. На первом этапе двумерное интегральное уравнение сведено к одномерному интегральному уравнению. Затем путем выделения главной части, непрерывно обратимого оператора, выявлена структура уравнения. Впервые показано, что главный оператор такой же, как и в задаче электродинамического анализа одиночного излучателя. Предложен численно-аналитический метод расчета фазированных антенных решеток.

Ключевые слова: линейная антенная решетка, условие периодичности Флоке, двумерное уравнение, одномерное интегральное уравнение, главный оператор, аналитическое обращение, численно-аналитический метод

Для цитирования: Эминов С.И., Сочилин А.В. Численно-аналитический метод расчета фазированных антенных решеток // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2022. №3(128). С.111–113. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3\(128\).111-113](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3(128).111-113)

A new, mathematically correct method of electrodynamic analysis of infinite antenna arrays is proposed. The method is based on the study of the properties of the Green's function of an infinite periodic array. At the first stage, the two-dimensional integral equation is reduced to a one-dimensional integral equation. Then, by isolating the main part, a continuously reversible operator, the structure of the equation is revealed. It is shown for the first time that the main operator is the same as in the problem of electrodynamic analysis of a unit radiator. A numerical-analytical method for calculating phased antenna arrays is proposed.

Keywords: linear antenna array, Floquet periodicity condition, two-dimensional equation, one-dimensional integral equation, main operator, analytical inversion, numerical-analytical method

For citation: Eminov S.I., Sochilin A.V. Numerical-analytical method for calculating phased antenna arrays // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2022. №3(128). P.111–113. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3\(128\).111-113](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3(128).111-113)

Введение

Электродинамический анализ фазированных антенных решеток основан на решении интегральных уравнений. Ядра интегральных уравнений представлены в виде плохо сходящихся рядов. К настоящему времени разработаны приближенные методы решения интегральных уравнений, в основе которых лежит замена ряда на конечную сумму. Это равносильно замене сингулярного ядра на непрерывное, что приводит к значительной погрешности. Представляется актуальной разработка строгих методов, позволяющих находить решения интегральных уравнений с необходимой точностью. Поскольку ряды аналитически вычислить не удастся, их целесообразно представлять в виде суммы двух рядов, один из которых находится аналитически, а другой является хорошо сходящимся. Иными словами, необходимо выделить главную часть, допускающую аналитическое обращение. После выделения главной части можно использовать численно-аналитический метод, ранее разработанный для одиночных вибраторных антенн.

Вывод двумерного интегрального уравнения

Рассмотрим линейную решетку излучателей из вибраторных антенн с общей осью, совпадающей с осью OZ , и с периодом d . Пронумеруем излучатели,

давая нулевой номер центральному излучателю. Пусть на решетку падает первичная волна под углом θ к оси. В результате на излучателе с номером n наводятся аксиальные токи j_z^n , которые возбуждают вторичное электрическое поле $E_z^n(j_z^n)$ во всем пространстве. Суммарное электрическое поле обращается в нуль на поверхности центрального излучателя; откуда получаем уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_z^n(j_z^n) = -E_{0z}, \quad (1)$$

где E_{0z} — первичное поле. Вторичные поля $E_z^n(j_z^n)$ представляют собой интегральные операторы от поверхностных токов [1], поэтому имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_z^n(j_z^n) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int j_z^n G(z_0, z'_n) ds = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(i n d h) \int j_z^0 G(z_0, z'_0 + n d) ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь z'_n — координата точки излучения на n -м излучателе, $h = k \cos(\theta)$, k — волновое число, s — поверхность излучателя. Равенство (2) получено с учетом условия периодичности Флоке [2] о связи поверхностных токов на соседних излучателях: $j_z^{n+1} = j_z^n \exp(i d h)$.

Теперь воспользуемся тем, что ядро интегрального оператора на центральном излучателе в (2) можно представить в виде преобразования Фурье [1]

$$G(z_0, z'_0) = \int F(\chi) \exp(i \chi (z_0 - z'_0)) d\chi. \quad (3)$$

С учетом этого представления преобразуем (2)

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} E_z^n(j_z^n) = \int_{j_z^0} F(\chi) \exp(i\chi(z_0 - z'_0)) \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(\text{ind}(h - \chi)) d\chi ds. \quad (4)$$

Применяя известное выражение [2,3]

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(\text{ind}(h - \chi)) = \frac{2\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\chi - h - \frac{2\pi n}{d}\right)$$

и используя свойство дельта-функции Дирака $\delta(\chi)$, найдем аналитически интегралы, входящие в [4]. В результате получим двумерное интегральное уравнение

$$\int_{j_z^0} \hat{G}(z_0 - z'_0) ds = -E_{0z}, \quad (5)$$

где ядро представлено в виде ряда

$$\hat{G}(z_0 - z'_0) = \frac{2\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\alpha_n) \exp(i\alpha_n(z_0 - z'_0)), \\ \alpha_n = h + \frac{2\pi n}{d}. \quad (6)$$

Функцию (6) называют функцией Грина бесконечной решетки [2]. Интегральное уравнение (5) широко используется после выхода монографии [4]. Разработаны численные методы решения интегрального уравнения [2,5]. Однако остается неизученной структура этого уравнения, характер особенности. Знание структуры позволит построить математически корректный, эффективный метод решения интегральных уравнений, как и для одиночного излучателя [1].

Сведение к одномерному интегральному уравнению

Развитый выше метод применим к решетке из произвольных криволинейных, импедансных вибраторов, щелевых излучателей, а также микрополосковых антенн на диэлектрической подложке. Здесь рассмотрим идеально проводящие линейные вибраторы длины $2l$ и радиуса a . Используя представление ядра одиночной вибраторной антенны [1] из уравнения (5), выведем интегральное уравнение относительно тока на поверхности центрального излучателя в безразмерных величинах

$$\frac{l}{\pi d} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \beta_n^2 I_0(\beta_n ka) K_0(\beta_n ka) \int_{-1}^{+1} I(t) \exp(i\alpha_n l(\tau - t)) dt = \\ = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{k} E^0(l\tau), \quad (7)$$

где $\beta_n = \sqrt{\left(\frac{\alpha_n}{k}\right)^2 - 1}$, I_0 и K_0 , — модифицированные функции Бесселя и Макдональда, $I(t)$ — неизвестная функция тока.

Чтобы привести уравнение (7) к стандартному виду, перейдем от функции $I(t)$ к новой функции $u(t) = I(t) \exp(-ihl\tau)$. Одновременно умножим уравнение (7) на функцию $\exp(-ihl\tau)$ и обозначим всю правую часть как $f(\tau)$. В результате получим стандартное одномерное интегральное уравнение

$$\frac{l}{\pi d} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \beta_n^2 I_0(\beta_n ka) K_0(\beta_n ka) \int_{-1}^{+1} u(t) \exp\left(i \frac{2\pi l}{d} n(\tau - t)\right) dt = \\ = f(\tau), -1 \leq \tau \leq 1. \quad (8)$$

Полученное уравнение (8) можно решать прямыми численными методами: методом Галеркина, методом коллокаций, методом моментов и т.д.

Выделение главного оператора и сведение к стандартному уравнению

Используя асимптотику функций Бесселя и Макдональда [6]

$$I_0(x) K_0(x) \approx \frac{1}{2x} \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

получим

$$\beta_n^2 I_0(\beta_n ka) K_0(\beta_n ka) \approx \frac{\pi}{(ka)(kd)} |n| \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Если в уравнении (8) применить асимптотику (9), получим главный оператор в виде

$$(\tilde{A}u)(\tau) = \frac{\gamma}{\pi(ka)(kd)} \sum_{n=1}^{n=+\infty} n \int_{-1}^{+1} u(t) \cos(\gamma n(\tau - t)) dt = \\ = \frac{\gamma}{2\pi(ka)(kd)} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |n| \int_{-1}^{+1} u(t) \exp(i\gamma n(\tau - t)) dt, \gamma = \frac{2\pi l}{d}. \quad (10)$$

Оператор $\tilde{A}$ является положительным: $(\tilde{A}u, u) > 0$, если $u \neq 0$. Для выяснения других свойств сведем оператор $\tilde{A}$ к ранее исследованному оператору на основе бесконечной суммы [6]

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\cos(\gamma n(\tau - t))}{n} = \ln \frac{1}{2 \sin \left| \frac{\gamma(\tau - t)}{2} \right|} = \\ = \ln \frac{1}{|\tau - t|} + \ln \frac{|\tau - t|}{2 \sin \left| \frac{\gamma(\tau - t)}{2} \right|}. \quad (11)$$

Второе слагаемое в (11) является непрерывной функцией. Следовательно, рассматриваемый ряд имеет логарифмическую особенность. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} n \cos(\gamma n(\tau - t)) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\cos(\gamma n(\tau - t))}{n} = \\ = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \ln \frac{1}{|\tau - t|} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \ln \frac{|\tau - t|}{2 \sin \left| \frac{\gamma(\tau - t)}{2} \right|}. \quad (12)$$

С учетом (12) интегральное уравнение (8) можно записать в виде

$$\beta(Au)(\tau) + (Ku)(\tau) = f(\tau), \quad (13)$$

где

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^{+1} u(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt, \\ \beta = \frac{2}{\gamma(ka)(kd)}.$$

Численно-аналитический метод решения уравнения

Оператор A является положительно определенным [1] в пространстве квадратично суммируемых функций $L_2[-1, 1]$. В энергетическом пространстве H_A [7] оператор A обратим. Обратный оператор A^{-1} задается формулой [8]

$$(A^{-1}f)(\tau) = \frac{1}{n} \int_{-1}^{+1} f(t) \ln \left| \frac{1 - \tau t + \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - \tau^2}}{\tau - t} \right| dt, \quad (14)$$

ограничен и даже вполне непрерывен. Воздействуя на обе части (13) оператором A^{-1} , получим

$$\beta u(\tau) + (A^{-1}Ku)(\tau) = (A^{-1}f)(\tau). \quad (15)$$

Уравнение оказывается уравнением Фредгольма второго рода в пространстве H_A . Как и для одиночных

вибраторов, для фазированных решеток уравнение (13) предлагается решать численно-аналитическим методом. В этом методе решение ищется в виде суммы двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2. \quad (16)$$

Первое слагаемое в (16) находится аналитически по формуле

$$u_1(\tau) = \beta^{-1}(A^{-1}f)(\tau) = \frac{\beta^{-1}}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln \left| \frac{1 - \tau t + \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\tau^2}}{\tau - t} \right| dt, \quad (17)$$

а второе слагаемое находится численно из решения уравнения

$$\beta u_2(\tau) + (A^{-1}Ku_2)(\tau) = (A^{-1}Ku_1)(\tau). \quad (18)$$

Уравнение (18) получено из (15) после подстановки (16). Последнее уравнение можно решать различными численными методами, например, разбитыми в [1,8].

Заключение

Таким образом, в работе развит общий метод вывода стандартных интегральных уравнений. Вначале, с учетом условия периодичности Флоке, формируется двумерное интегральное уравнение относительно неизвестной функции поверхностных токов на центральном излучателе. Затем, как и для одиночного излучателя, двумерное интегральное уравнение сводится к одномерному. Наконец анализируется ядро одномерного интегрального уравнения или функция Грина бесконечной периодичной решетки. В основе анализа лежит исследование асимптотики членов ряда, входящего в ядро интегрального уравнения. Этот подход применим не только к решетке излучателей с общей осью, но также к решетке параллельно расположенных излучателей и к двумерной решетке, расположенной на плоскости.

1. Эминов С.И., Сочили А.В. Численно-аналитический метод решения интегральных уравнений вибраторных антенн // Радиотехника и электроника. 2008. №5(53). С.553–558.
2. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974. 458 с.
5. Кудин В.П. Фазированная антенная решетка из конических вибраторов // Доклады БГУИР. 2005. №1. С.43–47.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
7. Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики. Симферополь: ООО «Форма», 2008. 142 с.
8. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн // Дифференциальные уравнения. 2005. №1(41). С.121–137.

References

1. Eminov S.I., Sochilin A.V. Chislenno-analiticheskiy metod resheniya integral'nykh uravneniy vibratornykh antenn [Numerical-analytical method for solving integral equations of vibrator antennas]. Radiotekhnika i elektronika, 2008, no. 5(53), pp.553–558.
2. Vasiliev E.N. Vozbuzhdeniye tel vrashcheniya [Excitation of bodies of revolution]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1987. 272 p.
3. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p.
4. Amitey N., Galindo V., Vu Ch. Teoriya i analiz fazirovannykh antennoykh reshetok [Theory and analysis of phased antenna arrays]. Moscow, Mir Publ., 1974. 458 p.
5. Kudin V.P. Fazirovannaya antennaya reshetka iz konicheskikh vibratorov [Phased antenna array of conical vibrators]. Doklady BGUIR, 2005, no. 1, pp. 43–47.
6. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963. 1100 p.
7. Kopachevsky N.D. Operatornyye metody matematicheskoy fiziki [Operator methods of mathematical physics]. Simferopol, LLC "Forma" Publ., 2008. 142 p.
8. Lifanov I.K., Nenashev A.S. Gipersingulyarnyye integral'nyye uravneniya i teoriya provolochnykh antenn [Hypersingular integral equations and the theory of wire antennas]. Differentsial'nyye uravneniya — Differential Equations, 2005, no. 1(41), pp. 121–137.