Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
ГУМАНИТАРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность: 38.02.07 Банковское дело
Квалификация выпускника: специалист банковского дела

ПРИНЯТО:
Предметной (цикловой) комиссией общеобразовательных, общегуманитарных, социально-экономических, математических и естественнонаучных дисциплин колледжа

Протокол № 1
от «31» августа 2021 г.

Председатель предметной (цикловой) комиссии

______________ Н.Х. Федорова
(подпись) (ФИО)

Разработчик:
преподаватель ГЭК НовГУ

______________ Т.Н. Ефимова
(подпись) (ФИО)

«31» августа 2021 г.

Содержание

Пояснительная записка

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы, являющиеся частью учебно-методического комплекса по дисциплине ЕН.01 «Элементы высшей математики» составлены в соответствии с:

1. Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 38.02.07 Банковское дело;
2. Рабочей программой учебной дисциплины;
3. Локальными актами НовГУ.

Методические рекомендации включают внеаудиторную работу студентов, предусмотренную рабочей программой учебной дисциплины в объёме 2 часов.

Формами внеаудиторной самостоятельной работы являются: изучение теоретического материала, выполнение домашних проверочных и контрольных работ, написание реферата.

В результате выполнения самостоятельной работы обучающийся должен **уметь:**

- решать системы линейных уравнений;
- производить действия над векторами, составлять уравнения прямых и определять их взаимное расположение;
- вычислять пределы функций;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- моделировать и решать задачи линейного программирования.

В результате выполнения самостоятельной работы обучающийся должен **знать:**

- основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы математического анализа;
- виды задач линейного программирования и алгоритмы их моделирования.

Тематический план и содержание учебной дисциплины
«Элементы высшей математики»

Наименование разделов и тем	**Содержание учебного материала, лабораторные работы и практические занятия, самостоятельная работа обучающихся**	**Объем часов**	**Коды компетенций, формированию которых способствует элемент программы**
1	*2*	*3*	*4*
Раздел 1. Элементы линейной алгебры		**12**	
Тема 1.1. Матрицы и определители	**Содержание учебного материала** Понятие матрицы, элемента матрицы. Действия с матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, транспонирование матриц, умножение матриц. Понятие определителя квадратной матрицы. Свойства определителей.	2	*ОК 1*
	Практическое занятие № 1: выполнение действий с матрицами. **Практическое занятие № 2:** вычисление определителей.	2 2	
Тема 1.2. Решение систем линейных уравнений	**Содержание учебного материала** Понятие системы линейных уравнений, решения систем линейных уравнений. Методы решения систем линейных уравнений.	2	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 3: решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	4	
Раздел 2. Элементы аналитической геометрии		**6**	
Тема 2.1. Элементы линейной алгебры (векторы, операции над векторами)	**Содержание учебного материала** Понятие вектора, модуля; коллинеарные, компланарные вектора. Действия с векторами.	1	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 4: выполнение действий над векторами.	2	
Тема 2.2. Уравнение прямой	**Содержание учебного материала** Уравнение прямой. Взаимное расположение прямых в пространстве.	1	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 5: составление уравнений прямых.	2	
Раздел 3. Линейное программирование		**4**	
Тема 3.1. Понятие и сущность линейного программирования	**Содержание учебного материала** Понятие и сущность линейного программирования.	1	*ОК 1,2*
Тема 3.2. Системы линейных неравенств с двумя перемен-	**Содержание учебного материала** Системы неравенств с двумя переменными.	1	

ными			
Тема 3.3. Решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом	**Практическое занятие № 6:** решение простейших задач линейного программирования геометрическим методом.	2	
Раздел 4. Основы математического анализа		**22**	
Тема 4.1. Теория пределов	**Содержание учебного материала** Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	1	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 7: вычисление пределов функций.	2	
	Самостоятельная работа № 1: решение задач на вычисление пределов функций.	2	
Тема 4.2. Производная и дифференциал	**Содержание учебного материала** Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Дифференциал функции.	1	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 8: вычисление производной сложной, обратной функции.	2	
Тема 4.3. Исследование функций и построение графиков	**Содержание учебного материала** Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.	2	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 9: исследование функции, построение графика функции.	4	
Тема 4.4. Неопределённый интеграл	**Содержание учебного материала** Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Методы интегрирования.	2	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 10: вычисление неопределённых интегралов методом непосредственного интегрирования; вычисление неопределённых интегралов методом подстановки и по частям.	2	
Тема 4.5. Определённый интеграл	**Содержание учебного материала** Понятие определённого интеграла. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.	2	*ОК 1,2*
	Практическое занятие № 11: вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла.	2	
	Всего:	**44**	

Содержание самостоятельной работы

Раздел 4. Основы математического анализа
Тема 4.1. Теория пределов *(1 час)*
Самостоятельная работа № 1
Решение задач на вычисление пределов функций

Цель: научиться вычислять пределы функций.
Студент должен
иметь представление:
- об условиях существования пределов;
- о двух замечательных пределах;
- о бесконечно малых и бесконечно больших функциях

знать:
- символику и определение предела функции (в точке, на бесконечности);
- основные теоремы о пределах;
- определение непрерывной функции(в точке, на промежутке)
- свойства непрерывных функций;
- типы точек разрыва.

уметь:
- вычислять пределы элементарных функций;
- избавляться от неопределенности вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, и др.
- устанавливать непрерывность функций, находить точки разрыва функций.

Указание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом
Краткие теоретические положения:
Основные понятия

Определение. Пусть D — некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому *каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное определенное число y,* то будем говорить, что на множестве D задана функция, которую назовём f. Число y — это значение функции f в точке x, что обозначается формулой $y = f(x)$.

Определение. Число x называется *аргументом* функции, множество D — *областью определения* функции, а все значения y образуют множество E, которое называется *множеством значений* или областью изменения функции.

Определение. Функция f называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве G, если для любых чисел x_1 и x_2 из множества G, таких что $x_1 < x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Пусть ε — некоторое положительное число. ε-*окрестностью* точки x_0 называется множество всех точек x, принадлежащих промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, кроме самой точки x_0. Принадлежность точки x ε-окрестности точки x_0 можно выразить с помощью двойного неравенства

$0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

Число ε называется *радиусом окрестности.*

Предел и непрерывность функции

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно выбрать какое-либо положительное число ε и построить ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Очевидно, что найдется такая окрестность точки $x_0 = 2$ (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус δ) , что если x будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение y, равное x^2, попадет в ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа ε. Здесь точка $x_0 = 2$ выбрана произвольно.

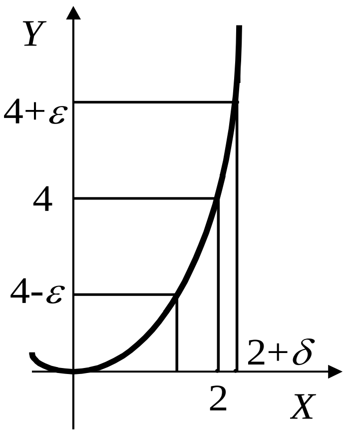

Рис. 1

Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию $y = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 2}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 2$. При $x_0 \neq 2$ её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{x-2} = 2x - 1 \cdot$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке $x_0 = 2$ и естественно не равна 3 в этой точке, точка $y_0 = 3$ имеет характерную особенность. Выбрав положительное число ε, можно утверждать, что если рассматривать значения x, расположенные достаточно близко к точке $x_0 = 2$ (или лежащие в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, причем радиус этой окрестности зависит от ε), то соответствующие значения y попадут в ε-окрестность точки $y_0 = 3$. Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число ε.

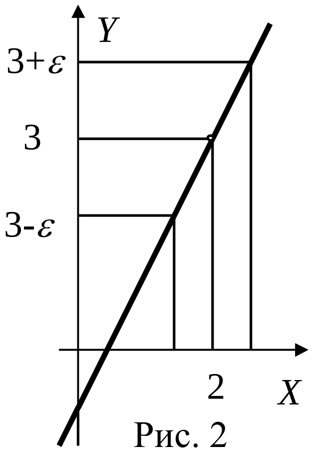

Рис. 2

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 (иногда говорят, при x, стремящемся к x_0), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения y попадают в ε- окрестность точки $y = A$.

Можно сформулировать определение предела функции по-другому.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется условие $|y - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что A есть предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, записывается формулой

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \cdot$$

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке $x = x_0$, не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

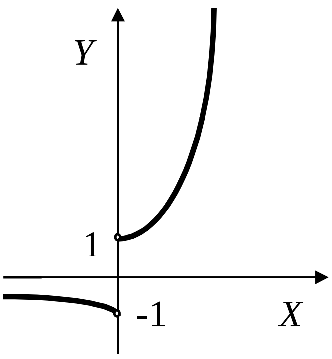

Рис. 3

Рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x} 2^x$. Очевидно, что если $x > 0$, то $y = 2^x$; если $x < 0$, то $y = -2^x$; при $x = 0$ функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$, как и во всех точках числовой оси. Функция $y = \frac{2x^2-5x+2}{x-2}$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \frac{|x|}{x}2^x$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется *непрерывной на этом промежутке*.

Свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, если C — постоянная функция.
3. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и C — постоянная функция, то

$$\lim_{x\to x_0} (Cf(x)) = C\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot$$

4. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существует

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)/ \lim_{x\to x_0} g(x),$$ если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,

Односторонние пределы

Определение. Число B называется *пределом функции f(x) в точке a справа* (это записывается в виде формулы $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что из из условия $0 < x - a < \delta$ будет следовать $|B - f(x)| < \varepsilon$.

Согласно приведенному определению $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$. Отметим, что обыкновенного предела функция $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не имеет.

Определение. Число C называется *пределом функции f(x) в точке b слева* (это записывается в виде формулы $C = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что из условия $0 < b - x < \delta$ будет следовать $|C - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция $y(x) = \frac{|x|}{x}2^x$ (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} y(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0-} y(x) = -1.$$

Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A;\quad \lim_{x\to x_0-} f(x)=A$$

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности: $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$,

если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число M (зависящее от ε), что для всех чисел x, превосходящих M, выполняется условие:

$|f(x)-A| < \varepsilon$.

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полубесконечном промежутке $(-\infty;\, x_0)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к минус бесконечности: $A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,

если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число M (зависящее от ε), что для всех чисел x, меньших, чем $-M$, выполняется условие:

$|f(x)-A| < \varepsilon$.

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая $y=x$ является касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке $x=0$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$. Здесь e — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Указание 2. Рассмотрите примеры.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2-6x+8=0$; $x^2-8x+12=0$;

$D=36-32=4$; $D=64-48=16$;

$x_1=(6+2)/2=4$; $x_1=(8+4)/2=6$;

$x_2=(6-2)/2=2$; $x_2=(8-4)/2=2$;

Тогда $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение к числителю:

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$, т.к.

Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$$

Указание 3.
Ответьте на вопросы:

1. Что называется пределом функции?
2. Перечислите свойства пределов.
3. Дайте определение предела функции на бесконечности.
4. Какая функция называется непрерывной?
5. Перечислите свойства непрерывных функций.
6. Назовите способы нахождения пределов функции.

Указание 4.
Решите задачи:
Вариант 1
Найдите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-10}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+3x-1}{x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$.

Вариант 2
Найдите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5+2x^2-x}{x^2+3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2+x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$.

Вариант 3
Найдите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x+6}{\sqrt{x+6}}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

Вариант 4
Найдите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+3x-5}{4x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

Методические рекомендации: номер варианта указывает преподаватель. При выполнении задания используйте основные алгоритмы нахождения пределов, формулы и свойства пределов.

Требования к результатам работы: письменная работа в тетради.

Сроки выполнения задания. 7 дней с момента выдачи задания.

Критерии оценки.

Оценка “**5**” (отлично) ставится, если:

- задание выполнено аккуратно, в полном объёме, в указанные сроки;
- задачи решены математически грамотно, приведены краткие обоснования процесса решения со ссылкой на соответствующие вопросы теории.

Оценка “**4**” (хорошо) ставится, если:

- задание выполнено аккуратно, в полном объёме, в указанные сроки, но работа содержит незначительные помарки;
- задачи решены верно, но допущены недочёты и негрубые ошибки, к которым относятся описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

Оценка “**3**” (удовлетворительно) ставится, если:

- нарушены сроки, задание выполнено не в полном объёме;
- решение задач содержит недочёты и негрубые ошибки.

Оценка “**2**” (неудовлетворительно) ставится, если:

- нарушены сроки, задание выполнено небрежно, не в полном объёме;
- решение задач содержит грубые ошибки, которые обнаруживают незнание студентами основных понятий математической статистики и неумение их применять, незнание приёмов решения задач, а также вычислительные ошибки.

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469433 (дата обращения: 20.08.2021).
2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471452 (дата обращения: 30.08.2021).

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.2. Производная и дифференциал *(1 час)*

Самостоятельная работа № 2

Вычисление производных высших порядков

Цель: научиться вычислять производные функций высших порядков.

Студент должен

знать:

- символику и определение производной, второй производной и производных высших порядков;
- табличные значения производных элементарных функции, в том числе, обратных тригонометрических функций;
- правила дифференцирования функций;

уметь:

- находить производную сложной функции;
- находить дифференциал функции;
- находить вторую производную и производные высших порядков;
- дифференцировать элементарные функции.

Указание 1. Ознакомьтесь с теоретическим материалом.

Краткие теоретические положения:

Производная

Рассмотрим функцию y=f(x), непрерывную в некоторой окрестности точки x.

Пусть Δx — приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное f(x+Δx) – f(x).

Отметим здесь, что функция непрерывна в точке x, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δf.

Отношение Δf /Δx, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой y = f(x) с положительным направлением горизонтальной оси координат.

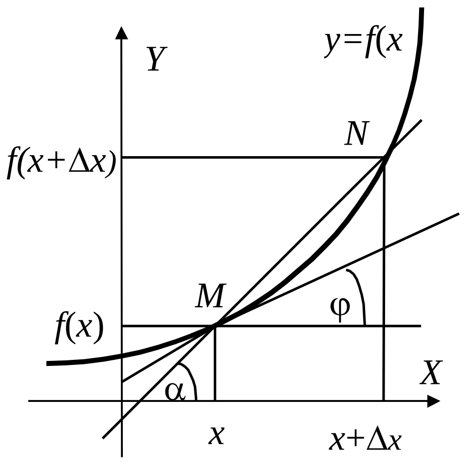

Рис. 1

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой y = f(x), приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x.

Все сказанное относится к случаю, когда график функции y = f(x) не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение Δy / Δx или, что то же самое (f(x + Δx) – f(x)) / Δx, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке Δx = 0. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения (f(x + Δx) – f(x)) / Δx в точке Δx = 0, то он называется производной функции y = f(x) в точке x и обозначается y′ или f′(x):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Нахождение производной функции y = f(x) называется дифференцированием.

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить f′(x), то функция f(x) называется дифференцируемой на промежутке (a, b).

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции f(x) в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Производная — это скорость изменения функции в точке x.

Производная функции f(x) не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной.

В то же время функция может быть непрерывной в точке x0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

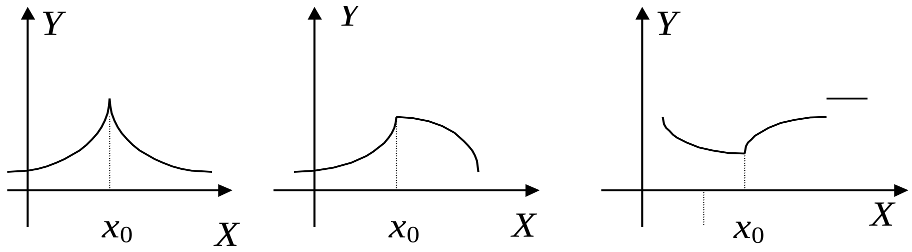

Рис. 2

Так функция y = | x | не имеет производной в точке x = 0, хотя является непрерывной в этой точке.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

$y = c$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = x^n, n \in N$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}, x > 0$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx, x \neq \pi n, n \in Z$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = f(u)$	$y' = f'(u)u'$

Основные свойства производной

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если существует f′ (x) , и C - произвольное число, то функция $Cf(x)$ имеет производную: (Cf(x))′ = Cf′ (x).

3. Если существуют f′ (x) и g′ (x), то функция S(x) = f(x) + g(x) имеет производную: S′ (x) = f′ (x) + g′ (x).

4. Если существуют f′ (x) и g′ (x), то функция P(x) = f(x)g(x) имеет производную: P′ (x) = f′ (x)g(x) + f(x)g′ (x).

5. Если существуют f′ (x) и g′ (x) и при этом g(x) ≠ 0, то функция D(x) = f(x) / g(x) имеет производную: D′ (x) = (f′ (x) g(x) □ f(x) g′ (x)) / g2(x).

Производная сложной функции

Пусть функция g(x) имеет производную в точке x, а функция f(z) имеет производную в точке z = g(x). Тогда сложная функция F(x) = f(g(x)) имеет в точке x производную F′ (x) = f′ (z) g′ (x).

Примеры:

$$F(x) = \sin^2 x,\ F'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x;$$

$$F(x) = \sin x^2,\ F'(x) = 2x\cos x^2;$$

$$F(x) = \ln\cos x, F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg}x;$$

$$F(x) = \cos\ln x, F'(x) = (-\sin\ln x)\frac{1}{x}.$$

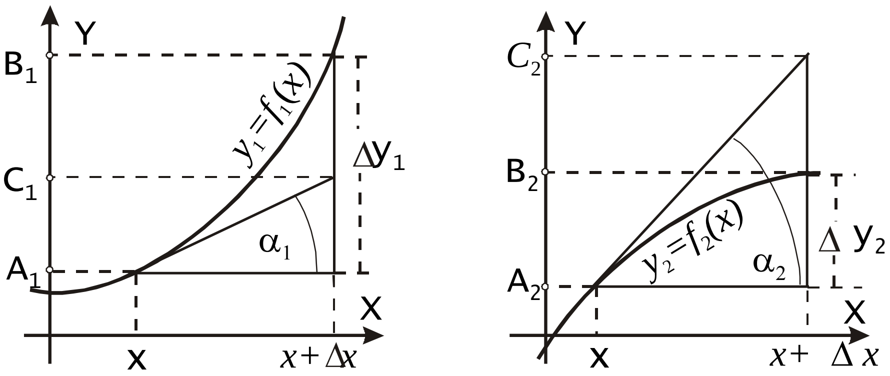

Рис.3

Дифференциал функции

Приращение функции y = f(x) в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta\,(\Delta x)$,

где $\beta\,(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, в точке Δx = 0.

Определение. Главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции y = f(x), равная $f'(x)\,\Delta x$, называется дифференциалом и обозначается dy: $dy = f'(x)\,\Delta x$.
(1)

Если сюда подставить функцию f(x) = x, то, так как x′ = 1, формула (1) примет вид: dx = Δx. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции y = x, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом, для функции y = x приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (1) можно переписать так

$dy = f'(x)\,dx$.

Отсюда следует, что $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. то есть производная функции f(x) равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента x.

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

1). y = 6x3 – 5x5 +cos 3x; dy = (18x2 – 25x4 – 3sin 3x)dx.

2). $y = 4\sqrt[3]{x^5}$; $dy = (4\cdot x^{\frac{5}{3}})'dx = 4\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{20}{3}x^{\frac{2}{3}}dx$

3). $y = \sqrt[4]{5x^6 - 3x^2}$; $dy = \frac{1}{4}(5x^6 - 3x^2)^{-\frac{3}{4}}(30x^5 - 6x)dx$

Производные высших порядков.

Может оказаться что функция f′(x), называемая первой производной, тоже имеет производную (f′(x))′. Эта производная называется второй производной функции f(x) и обозначается f′′(x). Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна f′(t), а ускорение равно f′′(t).

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется третьей производной функции f(x) и обозначается f′′′(x).

Если определена n-я производная f (n)(x) и существует её производная, то она называется (n+1)-й производной функции f(x): f (n + 1)(x) = (f(n)(x))′.

Все производные, начиная со второй, называются производными высших порядков.

Указание 2. Выполните самостоятельно задания.

Найти производные функций:

Вариант 1	Вариант 2
1. $y = tg\,\frac{x}{2}$	1. $y = ctg\,\frac{x}{3}$
2. $y = \sqrt{\cos x}$	2. $y = \sqrt{\sin x}$
3. $y = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$	3. $y = \cos x - \frac{\sin^4 x}{2}$
4. $y = -\frac{\cos 2x}{4}$	4. $y = -\frac{\sin 3x}{3}$
5. $y = \cos(1-3t)$	5. $y = tg(1-3t)$
6. y= e3x+ ln(2x-5)	6. y= e6x+ ln(4x+7)
7. y= 25xcos x	7. y= 75xsin x

Найти вторую и третью производные.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y = \frac{x}{2} + 3x^3 + \sin 3x$	1. $y = \frac{x}{3} - 2x^4 + \cos 5x$
2. $y = \sqrt{x} \ \ - \sqrt[3]{x}$	2. $y = \sqrt[4]{x + \sqrt{x}}$
3. $y = \frac{\sin\ \ 3x}{3}$	3. $y = \frac{\sin\ \ 2x}{2}$

Методические рекомендации: работа выполняется по вариантам. При выполнении заданий используйте основные теоретические положения данной темы, рассмотренные в данном работе.

Требования к результатам работы: письменная работа в тетради.

Сроки выполнения задания. 7 дней с момента выдачи задания.

Критерии оценки.

Оценка “**5**” (отлично) ставится, если:

- задание выполнено аккуратно, в полном объёме, в указанные сроки;

- задачи решены математически грамотно, приведены краткие обоснования процесса решения со ссылкой на соответствующие вопросы теории.

Оценка “**4**” (хорошо) ставится, если:

- задание выполнено аккуратно, в полном объёме, в указанные сроки, но работа содержит незначительные помарки;

- задачи решены верно, но допущены недочёты и негрубые ошибки, к которым относятся описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

Оценка “**3**” (удовлетворительно) ставится, если:

- нарушены сроки, задание выполнено не в полном объёме;
- решение задач содержит недочёты и негрубые ошибки.

Оценка “**2**” (неудовлетворительно) ставится, если:

- нарушены сроки, задание выполнено небрежно, не в полном объёме;
- решение задач содержит грубые ошибки, которые обнаруживают незнание студентами основных понятий математической статистики и неумение их применять, незнание приёмов решения задач, а также вычислительные ошибки.

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469433 (дата обращения: 20.08.2021).
2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471452 (дата обращения: 30.08.2021).

Информационное обеспечение обучения

Основная литература

3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469433 (дата обращения: 20.08.2021).
4. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/471452 (дата обращения: 30.08.2021).

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 340 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10508-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/475746 (дата обращения: 30.08.2021).
2. Сабитов, И. Х. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / И. Х. Сабитов, А. А. Михалев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 258 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08942-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/474730 (дата обращения: 30.08.2021).

Электронные ресурсы:

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).

Лист внесения изменений к методическим рекомендациям по организации и выполнению самостоятельной работы

№	Номер и дата распорядительного документа о внесении изменений	Дата внесения изменений	Ф.И.О. лица, ответственного за изменение	Подпись	Номер и дата распорядительного документа о принятии изменений