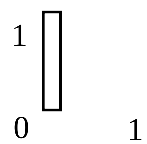
1. Отношения
1.1. Основные определения

Определение. Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество, состоящее из упорядоченных пар (a,b), где $a \in A, b \in B$.
Прямое произведение A, B обозначается как $A \times B$, то есть $A \times B = \{\,(a,b) \mid a \in A, b \in B\,\}$.
Пример 1.
Пусть $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3\}$, тогда $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.
Пример 2:
Если A, B= [0, 1], то
$A \times B$– квадрат, как на рис. 1



Определение. Бинарным отношением из множества A в B называется любое подмножество их прямого произведения.
Отношения будем обозначать заглавными латинскими буквами: R, S, U, V, …., $R \subset A \times B$.
Если $A = B$, то R называется отношением на множестве A.
Пример 3. Пусть $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3\}$. Тогда, $R = \{(1,2),(2,2),\ (3,2)\}$ –отношение на множествах A и B.
Функция— частный случай отношения.
Принадлежность пары (a,b) отношению Rобычно задают одним из следующих способов:
$(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow a\rho b \Leftrightarrow b = \rho(a)$– пара находится в отношении.

Определение. Отношение $I = I_A = \{(a,a) \mid \forall a \in A\}$называется тождественным.

Определение. Отношение $U = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = A \times B$называется универсальным.

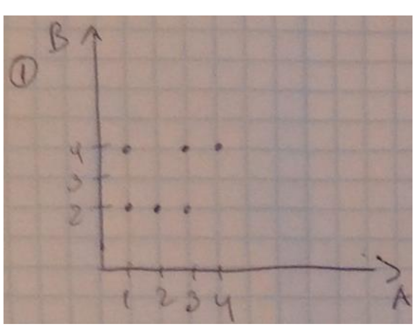
Определение. Областью определения отношения R называется множество $\{a \mid (a,b) \in R\} = D_R = D(R)$.

Определение. Областью значения отношения R называется множество $\{b \mid (a,b) \in R\} = E_R = E(R)$.

Изображение отношений

1. Каждой паре (a,b) отношения R ставим в соответствие точку на плоскости с координатами (a,b) }(Рис. 2).
2. Каждую пару (a,b) отношения R изображаем стрелкой, как на рисунке 4.
   Пример 4.

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,4\}, R = \{(1,2),(1,4),(2,2),(3,2),(3,4),(4,4)\}$.



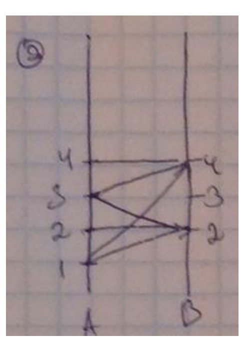


Рис. 2. Рис. 3.

3. Частный случай: A = B = {1,2,3,4}(Рис. 4)
$R = \{(1,1),(2,1),(3,4),(4,2),(4,3)\}$.

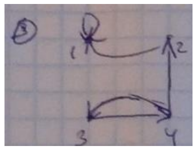
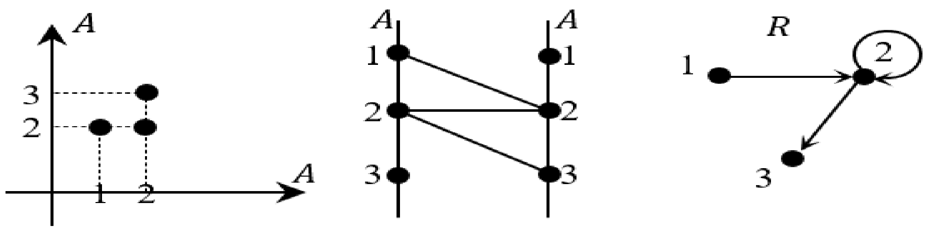


Рис. 4.

Пример 5.
R – отношение на A, $A = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,2),(2,2),(2,3)\}$



<u>Определение. О</u>тношением обратным к Rназывается $\{(b;a) \mid (a;b) \in R\}$=$R^{-1}$.

Пример 6. Пусть $R = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,1)\}$. Тогда $R^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,3),(1,3)\}$.

<u>Определение</u>. Пусть R - отношение на A. Тогда R называется:

1) рефлексивным, если $\forall a \in A$ пара $(a,a) \in R$;
– на диаграмме для любой точки должна быть стрелка в саму себя (Рис. 5)

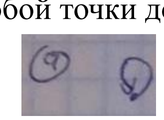


Рис. 5.

2) симметричным, если $\forall(a,b)$: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ (Рис. 6)

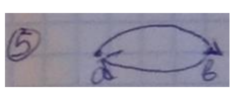


Рис. 6.

3) транзитивным, если $\forall(a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ (Рис. 7)

Рис. 7.

4) антисимметричным, если $\forall(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow a = b$ (Рис. 8)

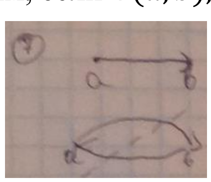


Рис. 8.

5) полным, если $\forall a, b \in A, a \neq b (a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$ (между любыми двумя точками всегда должна быть хотя бы одна стрелка)

Если отношение R симметрично и антисимметрично одновременно, то $R \subset I$

Пример 6. Пусть A=***N*****,** $R = \{(m, n) \mid m \vdots n\}$**.** Тогда

1. $\forall m \in N: m \vdots m \Rightarrow (m, m) \in R$– рефлексивное
2. $(6,3) \in R, (3,6) \notin R \Rightarrow$не симметричное
3. $(m, n), (n, k) \in R \Leftrightarrow \begin{cases} m \vdots n \\ n \vdots k \end{cases} \Rightarrow m \vdots k \Rightarrow (m, k) \in R$– транзитивное
4. $(m, n), (n, m) \in R \Rightarrow \begin{cases} m \vdots n \\ n \vdots m \end{cases} \Rightarrow m = n$– антисимметричное
5. $(2,3) \notin R, (3,2) \notin R$– неполное

Пример 7. Пусть $A = \{2$ брата, сестра$\}$ и отношение $R = \{(a, b) \mid a -$ брат $b\}$(Рис.8)

Тогда:

1) R– не рефлексивное, так как $(\text{с}, \text{с}) \notin R$;
2) R –не симметричное;
3) R –не транзитивное;
4) R –не является антисимметричным;
5) R –полное.

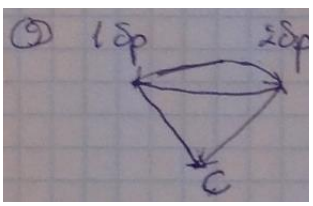


Рис. 8.

Пример 8. Пусть отношение R определено, как на рис. 9.

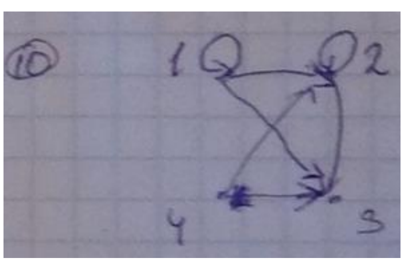


Рис. 9.

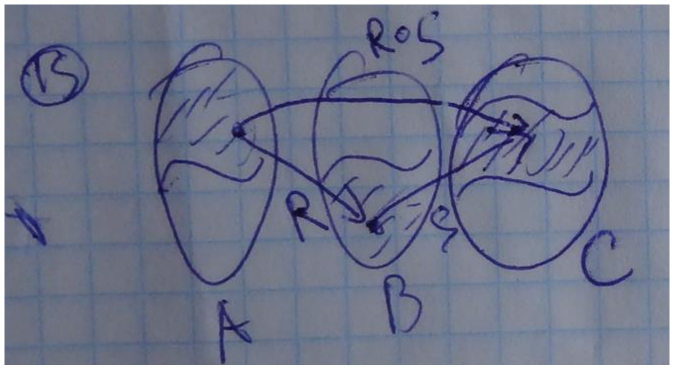
Тогда:

1. $(3,3) \notin R$– не рефлексивное
2. $(1,2) \in R, (2,1) \notin R$– не симметричное
3. $\begin{cases} (1,2), (2,3) \in R, (1,3) \in R \\ (4,2), (2,3) \in R, (4,3) \in R \end{cases}$ $\Rightarrow$транзитивное
4. антисимметрично — нет симметричных пар
5. $\begin{matrix} (4,1) \notin R \\ (1,4) \notin R \end{matrix}$ $\Rightarrow$не полное

1.2. Композиция отношений. Теорема о свойствах отношений.

Определение. Композицией отношений R на $A \times B$ и S на $B \times C$ называется $\{(a,c) \mid (a,b) \in R, (b,c) \in S\} = S \circ R$.

Пусть R – отношение на A. Тогда $\underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ раз}} = R^n$; $R^0 = I$.



Пример 1.

Пусть $R = \{\,(m,n) \mid n = m+1\,\}$; $S = \{\,(m,n) \mid n = m-1\,\}$. Тогда $\underset{2}{S} \circ \underset{1}{R} = \{(a,c) \mid \exists b\colon (a,b) \in R, (b,c) \in S\} = \{(a,c) \mid \exists b\colon b = a+1; c = b-1\} = \{(a,c) \mid a = c\}$– тождественное отношение.

Пример 2:

$R = \{(m,n) \mid n = m+1\}$

$R^2 = R \circ R = \{(m,k) \mid \exists n\colon (m,n),(n,k) \in R\} = \{(m,k) \mid \exists n\colon n = m+1, k = n+1\} = \{(m,k) \mid k = m+2\}$

Для 3й степени: $k = m+3$;

4й — $k = m+4$;

Пример 3:

Пусть $A = \{a,b,c,d\}$,

$R = \{(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$,

$S = \{(c,a),(b,c),(d,d),(d,a)\}$,

Найдем

$S \circ R = ?$

$(a,b) \in R, (b,c) \in S \to (a,c) \in S \circ R$,

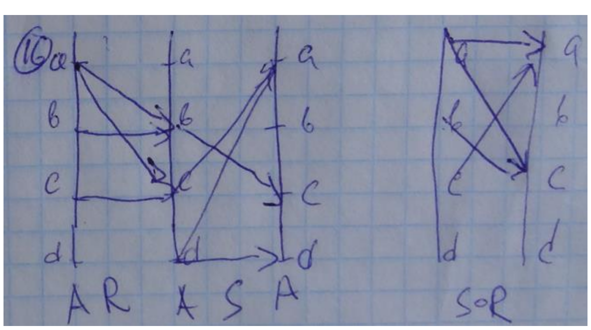
$(a,c) \in R, (c,a) \in S – (a,a) \in S \circ R$,

$(b,b) \in R, (b,c) \in S – (b,c) \in S \circ R$,

$(c,c) \in R, (c,a) \in S – (c,a) \in S \circ R$.

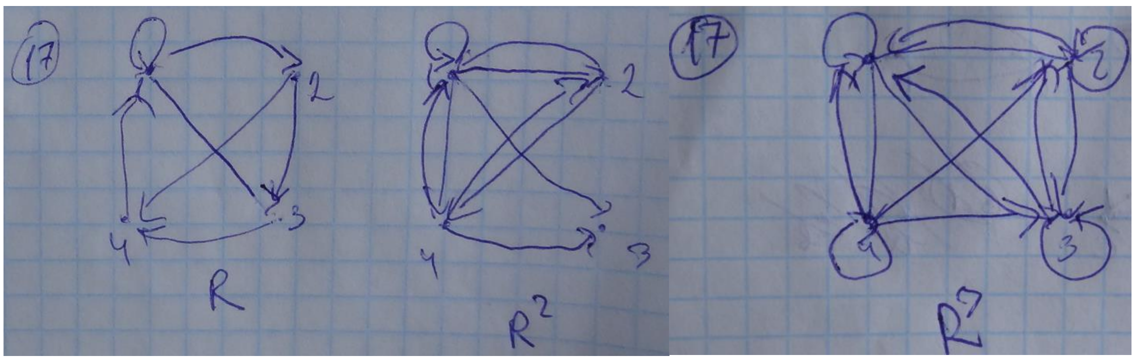
Следовательно,

$S \circ R = \{(a,c),(a,a),(b,c),(c,a)\}$

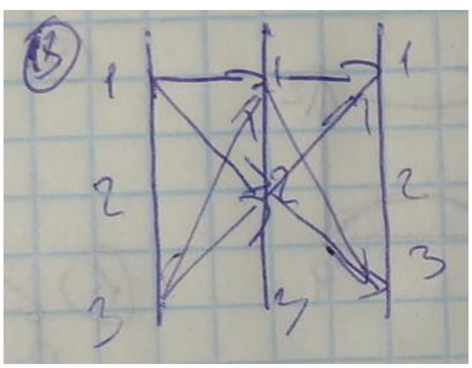


Найдем $R \circ S$, аналогично:
$(c, a), (a, b) – (c, b)$
$(c, a), (a, c) – (c, c)$
$(b, c), (c, c) – (b, c)$
$(d, a), (a, b) – (d, b)$
$(d, a), (a, c) – (d, c)$
Таким образом,
$R \circ S = \{(c, b), (c, c), (b, c), (d, b), (d, c)\}$.

Найдем степени отношения R , применяя диаграмму:



При нахождении R^2 делаем два хода по диаграмме R, для R^3
Пример 4. Пусть
$R = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,1)\}$. Тогда $R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (2,3), (1,3)\}$



(Рис 18)
Следовательно, $R^{-1} \circ R = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$.
Аналогично получаем, что $R \circ R^{-1} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

<u>Теорема о свойствах отношений.</u> Пусть R- отношение на A. Тогда:

1. R – рефлексивное $\Leftrightarrow I \subset R$;
2. R – симметричное $\Leftrightarrow R = R^{-1}$;
3. R – транзитивное $\Leftrightarrow R^2 \subset R$;
4. R – антисимметричное $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I$;
5. R – полное $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$.

Доказательство 4.

Необходимость. Пусть R – антисимметрично. Возьмем произвольную пару $(a,b) \in R \cap R^{-1}$. Так как $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R$. Следовательно,

$$\begin{cases}(a,b) \in R \\ (b,a) \in R\end{cases} \Rightarrow a = b \Rightarrow R \cap R^{-1} \subset I$$

Достаточность. Пусть $R \cap R^{-1} \subset I$. Возьмем пары $(a,b),(b,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \cap R^{-1} \subset I \Rightarrow a = b \Rightarrow R$– антисимметрично

Док-во 5°.

Необходимость.

Пусть R – полное. $\forall a,b: a \neq b \Rightarrow \left.\begin{matrix}1.\,(a,b) \in R, \\ 2.\,(a,b) \notin R \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R^{-1}.\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow (a,b) \in R \cup R^{-1} \Rightarrow U = R \cup I \cup R^{-1}$.

Достаточность.

Пусть $U = R \cup I \cup R^{-1}$. Рассмотрим $\forall (a,b): a \neq b$. Всегда $(a,b) \in U \Rightarrow (a,b) \in R \cup R^{-1} \Rightarrow (a,b) \in R$ или $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (a,b) \in R$ или $(b,a) \in R$.
Таким образом, R – полное.

1.3. Представление отношений. Теорема о матрице композиции отношений

Пусть A — конечное множество, занумеруем его элементы $A = \{a_{1,}.., a_n\}$.

Определение. Матрицей отношения R на A называется матрица n-го порядка, элементы которой $r_{ij} = \begin{cases}1, \text{если} \left(a_i, a_j\right) \in R, \\ 0, \text{если} \left(a_i, a_j\right) \notin R.\end{cases}$

Матрица отношения R также обозначается R или (R).
Пример 1. Пусть $A = \{1,..,4\}$ и $R = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,2),(4,3)\}$. Тогда

$$(R) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Далле,

$$(R^{-1}) = (R)^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

В этом подразделе и следующем действия с матрицами будем выполнять по логическим правилам, т. е. сложение — дизъюнкция, умножение — конъюнкция: $a + b = a \vee b$, $a * b = a \wedge b$.
Пример 2.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Теорема о матрице композиции. Пусть R, S – отношения на A. Тогда $(S \circ R) = (R)(S)$.

Док-во. Обозначим $T = S \circ R$.

Пусть $t_{ij} = 1 \Rightarrow (a_i, a_j) \in S \circ R \Rightarrow \exists a_k, (a_i, a_k) \in R, (a_k, a_j) \in S \Rightarrow r_{ik}, s_{ik} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_{ik} * s_{kj} = 1 \Rightarrow \sum_{f=1}^{n} r_{if} * s_{fj} = 1 \Rightarrow (R)(S)_{ij} = 1$$

Аналогично можно показать, что, если справа элемент =1⇒ слева соответствующий элемент =1.

Лемма о матрице объединения отношений.

$$(R \cup S) = (R) + (S)$$

Пример 3. Пусть $A = \{1,2,3\}$ и $R = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$, $S = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$. Тогда

$$(S \circ R) = (R) \cdot (S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Рефлексивное и транзитивное замыкания отношений.

Определение. Пусть R – отношение на A. Транзитивным замыканием R называется $R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^m \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$ = (обозначается) R^+.

R^+ − транзитивное отношение.

Опр. Рефлексивным замыканием R называется $I \cup R \cup \ldots \cup R^m \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k \overset{\text{обозн}}{=} R^* = R^+ \cup I$.

R^* −рефлексивное и транзитивное.

Пример 1

$R = \{(m, k) \mid k = m + 1, k, m \in \mathbb{Z}\}$

$R^2 = \{(m, q) \mid q = m + 2\}$

………..

$R^n = \{(m, l) \mid l = m + n\}$

$R^+ = \{(m, j) \mid j = m + i, i = 1,2, . .\} = \{(m, j) \mid m < j\}$

$R^* = I \cup R^+ = \{(m, j) \mid m \leq j\}$

Теорема. Пусть $|A| = n$. Тогда $R^+ = R \cup \ldots \cup R^n$, $R^* = I \cup R \cup \ldots \cup R^{n-1}$.

Доказательство. $R \cup \ldots \cup R^n \subset R^+$ – очевидно. Покажем, что $R \cup \ldots \cup R^n \supset R^+$.

Пусть это не так, то есть $(a, b) \in R^+$ и $m > n$ – наименьшее число, такое, что $(a, b) \in R^m$. По определению $\exists a_1 = a, a\_2, \ldots, a_{m+1} = b$ такие, что $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_m, a_{m+1}) \in R$.

Так как $m > n \Rightarrow \exists k, j: a_k = a_j \Rightarrow (a, a_2), \ldots, (a_{k-1}, a_k), \ldots, (a_j, a_{j+1}), \ldots, (a_m, b)$ – противоречит тому, что m – наименьшее.

Пример 2. Пусть

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем R^+, R^*.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ —можно было не считать

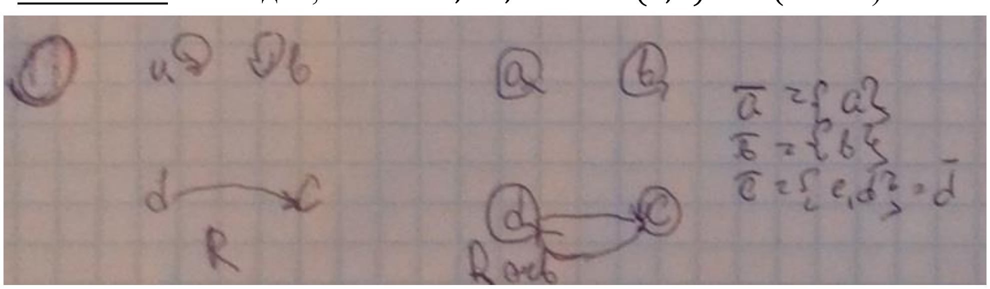
$$R^+ = R + R^2 + R^3 + R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, R^* = E + R + R^2 + R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Две теоремы об отношении эквивалентности

Определение. R называется отношением эквивалентности на A, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
Пример 1. Пусть $A = \mathbb{Z}$ и $R = \{(m,n) \mid (m-n) \vdots 3, m,n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда:
1. $\forall m: (m-m) \vdots 3 \Rightarrow (m,m) \in R$– рефлексивное
2. если$(m-n) \vdots 3 \Rightarrow (n-m) \vdots 3 \Rightarrow (n,m),(m,n) \in R$– симметричное
3. $(m,n),(n,k) \in R \Rightarrow \begin{cases}(m-n) \vdots 3 \\ (n-k) \vdots 3\end{cases} \Rightarrow (m-k) \vdots 3 \Rightarrow (m,k) \in R$– транзитивное

Определение Классом эквивалентности элемента $a \in A$называется множество элементов b: $(a,b) \in R$, где R – отношение эквивалентности на A. Обозначается $\bar{a} = \{b \mid (a,b) \in R\}$
Пример 2.
$\bar{0} = \{m \mid (0,m) \in R\} = \{m \mid (m-0) \vdots 3\} = \{m \mid m \vdots 3\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ..\} = \{3\text{k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\bar{1} = \{m \mid (1,m) \in R\} = \{m \mid (m-1) \vdots 3\} = \{0,4,-2,7,-5,10,..\} = \{1+3\text{k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\bar{2} = \{2+3\text{k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\bar{3} = \{m \mid (3,m) \in R\} = \{m \mid (m-3) \vdots 3\} = \{m \mid m \vdots 3\} = \bar{0}$
$\bar{4} = \bar{1}; \bar{5} = \bar{2}$

Замечание. Очевидно, что $a \in \bar{a}, \forall b,c \in \bar{a} \Rightarrow (b,c) \in R$ (Рис 11)



Лемма Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.
Доказательство. Предположим противное, пусть $\bar{a}, \bar{b}$: $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in \bar{a} \cap \bar{b}$.
Выберем $\forall d \in \bar{a} \Rightarrow (a,d) \in R, (a,c) \in R \Rightarrow (d,a),(a,c) \in R \Rightarrow (d,c) \in R$
т. к. $c \in \bar{b} \Rightarrow (c,b) \in R \Rightarrow (d,b) \in R \Rightarrow (b,d) \in R \Rightarrow d \in \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \subset \bar{b}$.
Аналогично показываем, что $\bar{b} \subset \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$
Определение. Множества $A_1, \dots, A_n$образуют разбиение A, если $A = A_1 \cup \dots \cup A_n, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
Теорема 1 Если R – отношение эквивалентности на A, то различные классы эквивалентности образуют разбиение A, т.е. $A = \bar{a_1} \cup \dots \cup \bar{a_n}$

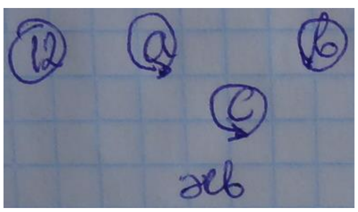
Док-во. Пусть $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}$– все различные классы эквивалентности. По лемме $\overline{a_i} \cap \overline{a_j} = \emptyset,\ i \neq j$
$\forall a \in A \Rightarrow a \in \overline{a} \qquad \exists k\colon \overline{a} = \overline{a_k} \Rightarrow \overline{a} \in \overline{a_k} \Rightarrow A = \overline{a_1} \cup \dots \cup \overline{a_m}$

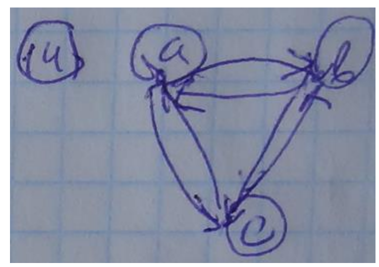
Теорема 2. Пусть $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$– разбиение. Тогда это разбиение порождает отношение эквивалентности по правилу: $R = \{(a,b) |\ \exists k\colon a,b \in A_k\}$.

Очевидны:

- Рефлексивность,
- Симметрия,
- транзитивность: $\begin{cases} (a,b) \in R\ \exists k a,b \in A_k \\ (b,c) \in R\ \exists j b,c \in A_j \end{cases} \Rightarrow k = j, a,c \in A_k \Rightarrow (a,c) \in R$– транзитивно

Пример 3. Пусть $A = \{a,b,c,d\}; R = I.$ Тогда $A = \bar{a} \cup \bar{b} \cup \bar{c} \cup \bar{d}, \bar{a} = \{a\}, ..$
Пример 4. Пусть $A = \mathbb{Z}; R = \{(m,n) \mid (m-n) \vdots 3\}$. Тогда $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$
Пример 5. Пусть отношение R — два студента сидят на одном ряду. Какое получаем разбиение?
- По рядам.
Пример 6. Пусть $A = \{a,b,c\}$. Привести примеры отношения эквивалентности на этом множестве (рис 12) (рис 13) (рис 14).

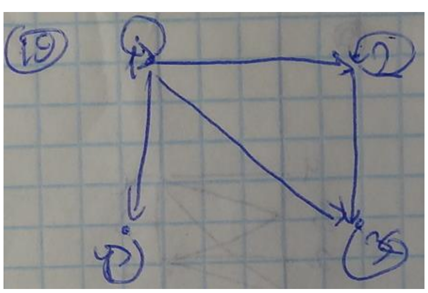




Определение. Отношение Rназывается порядком на A, если оно рефлексивное, транзитивное, антисимметричное, называется полным порядком, если оно полное.

Пример

1. $R = \{(a,b) \mid a \leq b,\ a,b \in \mathbb{Z}\}$.
2. $R = \{(a,b) \mid a \leq b (a \prec b)\}$– рефлексивное, транзитивное (Рис 19).



Оно рефлексивное, антисимметричное, транзитивное.
$1 \prec 3, 1 \prec 2 \prec 4$

Придумать другой порядок для $\mathbb{Z}$