

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Юридический институт
Отделение среднего профессионального образования

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Специальность:

40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Квалификация выпускника: юрист
(базовая подготовка)

.

Рассмотрена:

Предметной (цикловой) комиссией
общеобразовательных,
общегуманитарных, социально-
экономических, математических и
естественнонаучных дисциплин

Разработчик:

Преподаватель отделения СПО
Юридического института НовГУ
Кор- О. Е. Королёва
«31» августа 2022 г.

Протокол №1

От «31» 08 2022 г.

Председатель предметной (цикловой)
комиссии

А. П. Капустина А. П. Капустина

Содержание

1	Пояснительная записка.....	2
2	Тематический план.....	3
2.1	Содержание практических занятий.....	7
	Практическое занятие № 1.....	7
	Практическое занятие № 2.....	19
	Практическое занятие № 3.....	21
	Практическое занятие № 4.....	27
	Практическое занятие № 5.....	27
3	Лист внесения изменений к методическим рекомендациям по практическим занятиям	37

Пояснительная записка

Методические рекомендации по практическим занятиям, являющиеся частью учебно-методического комплекса по учебной дисциплине ЕН.01 «Математика» составлены в соответствии с:

- 1 Федеральным государственным образовательным стандартом по специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения;
- 2 Рабочей программой учебной дисциплины;
- 3 Локальными актами НовГУ.

Методические рекомендации включают 5 практических занятий, предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины (профессионального модуля) в объёме 10 часов.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **знать**:

- основные понятия и методы линейной алгебры;
- основные понятия дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.

В результате выполнения практических заданий обучающийся должен **уметь**:

- использовать методы линейной алгебры;
- производить действия над элементами комбинаторики;
- вычислять вероятность события;
- определять математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

На практических занятиях обучающиеся совместно с преподавателем разбирают методы решения типовых задач и самостоятельно выполняют расчётно-графические работы. Расчётно-графическая работа выполняется студентами по прикладным задачам в области профессиональной деятельности. Обучающийся решает задачи самостоятельно, используя литературу и полученные знания. Примеры задач в аудитории не разбираются.

Критерии оценки практических работ:

- оценка 5 (отлично) ставится, если все задания выполнены верно и сданы в срок;
- оценка 4 (хорошо) ставится, если все задания выполнены верно, но работа сдана не в срок или работа сдана в срок, но часть заданий были выполнены не верно (в этом случае работа возвращается на доработку);
- оценка 3 (удовлетворительно) ставится, если не все задания выполнены верно и работа сдана не в срок (в этом случае работа возвращается на доработку);
- оценка 2 (неудовлетворительно) ставится, если работа была не сдана спустя две недели после срока сдачи

Знания и умения проверяются во время выполнения индивидуальных домашних заданий, тестов и контрольных работ.

2.2 Тематический план и содержание учебной дисциплины
ЕН.01 Математика

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Коды компетенций, формированию которых способствует элемент программы
1	2	3	4
Раздел 1. Линейная алгебра		12	
Тема 1.1. Определители и матрицы	Содержание учебного материала Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры. Матрицы и действия над ними	2	ОК1, ОК 3, ОК 4
Тема 1.2. Системы линейных уравнений	Содержание учебного материала Решение систем линейных уравнений методом Крамера.		ОК 3, ОК 4,
	Практическое занятие № 1 Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений различными методами.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 1 Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений с тремя неизвестными. Определенные и неопределенные системы линейных уравнений	8	
Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа		16	
Тема 2.1. Функция	Содержание учебного материала Аргумент и функция. Область определения и область значения функции. Способы задания функции: табличный, графический, аналитический, словесный. Свойства функции: четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность. Основные элементарные функции, их свойства и графики.	2	ОК 2, ОК 3,

	Самостоятельная работа обучающихся № 2 Изучение материала по учебно-методической литературе, выполнение домашних заданий по теме «Функция».	2	
Тема 2.2. Пределы и непрерывность	Содержание учебного материала Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва первого и второго рода.	2	ОК 5, ОК 6
	Практическое занятие № 2 Вычисление пределов функции	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 3: решение задач на вычисление пределов функций	8	
Раздел 3. Дифференциальное исчисление		18	
Тема 3.1 Производная функции	Содержание учебного материала Определение производной. Производные основных элементарных функций. Производные высших порядков.		ОК 3, ОК 4,
	Самостоятельная работа обучающихся № 4: вычисление производной сложной, обратной функции	8	
Тема 3.2. Приложение производной	Содержание учебного материала Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Асимптоты. Исследование функций.	2	ОК 1, ОК 2,
	Практическое занятие № 3 Решение задач по производным основных элементарных функций. Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Составление уравнения касательной к графику функций.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 5 Исследование функции, построение графика функции	6	
Раздел 4. Интегральное исчисление		10	

Тема 4.1. Неопределённый интеграл	Содержание учебного материала Первообразная и интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование дробно-рациональных функций.	2	ОК 4, ОК8
Тема 4.2. Определённый интеграл	Содержание учебного материала Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона- Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади.		ОК 4
	Практическое занятие № 4 Вычисление определенных интегралов, площади фигуры при помощи определенного интеграла, нахождение длины пути по данной скорости.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 6 Решение задач по вычислению определенных интегралов.	6	
Раздел 5. Комплексные числа		8	
Тема 5.1. Комплексные числа	Содержание учебного материала Определение комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа.		ОК 1, ОК 3
	Практическое занятие № 5 Решение задачи по выполнению арифметических операций над комплексными числами, нахождение модуля и аргумента комплексного числа	2	
	Самостоятельная работа обучающихся № 7 Решение задачи по выполнению арифметических операций над комплексными числами, нахождение модуля и аргумента комплексного числа	6	
Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика		6	
Тема 6.1. Теория вероятностей	Содержание учебного материала Случайные события и их вероятность. Случайная величина и ее закон распределения, основные характеристики распределения случайных величин.		ОК 2- ОК 4

	Самостоятельная работа обучающихся № 8 Решение задачи по теме размещения, перестановки.	6	
Раздел 7. Дискретная математика		6	
Тема 7.1. Дискретная математика	Содержание учебного материала Предмет дискретной математики. Место и роль дискретной математики в системе математических наук и в решении задач, связанных с обеспечением информационной безопасности.		ОК 2- ОК 4
	Самостоятельная работа обучающихся № 9 Решение задачи по теме Место и роль дискретной математики	6	
Раздел 8. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности		6	
Тема 8.1. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности	Содержание учебного материала Прикладные задачи в области профессиональной деятельности.		ОК 2- ОК 4
	Самостоятельная работа обучающихся № 10 Решение прикладных задач в области профессиональной деятельности	6	
Всего:		82	

Содержание практических занятий

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

Практическое занятие № 1

Выполнение действий над матрицами, вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений различными методами

Объем времени: 2 часа

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу, научиться решать системы линейных уравнений тремя методами: по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса

Студент должен:

знать: правила выполнения операций над матрицами; правило вычисления определителя второго порядка; правило вычисления определителя третьего порядка; определение обратной матрицы, методы решения систем линейных уравнений: матричный, по правилу Крамера, метод Гаусса

уметь: применять правила выполнения операций над матрицами при решении задач; выполнять операции над матрицами; применять правило вычисления определителя второго порядка при решении задач; вычислять определители третьего порядка; находить обратную матрицу; решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, матричным методом, методом Гаусса

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Определители и их вычисление. Свойства определителей. Миноры. Матрицы и действия над ними. Различные способы вычисления обратных матриц. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Найти матрицу $5A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение. Используем определения линейных операций над матрицами:

$$\begin{aligned} 5A &= \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ -6 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10-8 & -15-6 & 5-4 \\ -5+6 & 0-2 & -10+8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $5A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -21 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти x , y и m , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Указание. Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их соответствующим элементам матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Если $A + mB = \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, то
$$\begin{cases} 1 - 2m = -5 \\ 6 + mx = 21 \\ -1 + my = 8 \\ 2 - m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ 6 + 3x = 21 \\ -1 + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $x = 5, y = 3, m = 3$.

Задача 3. Найти AB и BA , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение. Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность.

$A[2 \times 4]$, $B[4 \times 2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2 \times 2]$, $BA[4 \times 4]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B :

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B ; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A , второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$

$$c_{21} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$

$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно, $C = AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$.

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A :

$$\begin{aligned} d_{11} &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0; d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4; d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1; d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2; \\ d_{21} &= -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2; d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2; d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1; d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0; \\ d_{31} &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1; d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1; d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0; d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1; \\ d_{41} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8; d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0; d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2; d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, $D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Если произведение существует, вычислить его.

Указание. Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение. Сравним размерности матриц A и B : $A[3 \times 2]$, $B[2 \times 2]$. Следовательно, $n = l$, $m \neq k$, поэтому произведение $AB[3 \times 2]$ существует, а произведение BA – нет.

Найдем элементы AB :

$$(ab)_{11} = 0 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 21; (ab)_{12} = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24; (ab)_{21} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 6;$$

$$(ab)_{22} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 8; (ab)_{31} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = -2; (ab)_{32} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 8 = -2.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, BA не существует.

Задача 5. Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Указание. Найдите произведение AA и матрицу $-3A$, а затем сложите полученные матрицы.

Решение. Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.

Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$c_{11} = -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = -4; \quad c_{12} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$

$$c_{21} = 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 0; \quad c_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Итак, $C = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Теперь вычислим элементы матрицы $D = -3A$. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3 : $D = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Следовательно, $A^2 - 3A = C + D = \begin{pmatrix} -4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Указание. Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение. 1-й способ (правило треугольников).

Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:

$$\Delta = 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) = 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$$

2-й способ (разложение по строке).

Применим свойство определителя: $\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$.

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22} , так как произведение $a_{22} A_{22} = 0$.
Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij} , получается вычеркиванием из исходного определителя i -й строки и j -го столбца).

Тогда $\Delta = a_{21} A_{21} + a_{23} A_{23} = 1 \cdot 2 + (-4)(-8) = 34$.

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 7. Используя свойства определителя, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.

Указание. Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение. Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство б):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 8. Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}.$$

Указание. Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтите удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение. Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 9. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40$.

Указание. Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x .

Решение. Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4x) = 9 - 4x;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (15 - x) = x - 15;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (20 - 3) = 17.$$

$$\text{Тогда } \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 5 & 3 & x \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot (9 - 4x) + 1 \cdot (x - 15) + 3 \cdot 17 = -4x^2 + 10x + 36,$$

и требуется решить квадратное уравнение $-4x^2 + 10x + 36 = 40$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = 2$, $x = \frac{1}{2}$.

Задача 10. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ x & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} > -3$.

Указание. Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение. Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > -3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4,5.$$

Ответ: (2; 4,5).

Задача 11. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и проверить выполнение

условий $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

*Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам **транспонированной** матрицы!*

Найдем произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} - \frac{4}{3} & \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} + \frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} & \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Задача 12. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0$. Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 13. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Следовательно, обратная матрица для матрицы } A \text{ существует.}$$

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит, $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 14. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Указание. Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение. $\Delta_A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0.$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} ..$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 15. При каких x, y, z матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$ является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание. Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение. Проверим невырожденность матрицы A :

$$\Delta_A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x+2y+3z \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix}.$

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x+3z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-\frac{4}{3}x \\ x-\frac{4}{3}x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \\ z=4 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: $x = -3, y = -3, z = 4$.

Задача 16. Решить систему по правилу Крамера
$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание. Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x, Δ_y и Δ_z .

Решение. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, следовательно, система имеет

единственное решение. Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x, Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

Отсюда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$

Ответ: $x = 1, y = 4, z = 2$.

Задача 17. Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях a система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \text{ имеет бесконечно много решений.}$$

Указание. Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Решение. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$. Разложением по первой строке получим:

$$\begin{aligned} \Delta &= a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = \\ &= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = \\ &= (a - 1)^2(a + 2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.

Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.

Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.

1) При $a = 1$ система имеет вид:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \text{ и } \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.

2) При $a = -2$ получаем систему $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$ для которой

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0. \text{ Следовательно, при этом случае решений нет.}$$

Ответ: $a = 1$.

Задача 18. Решить систему с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}$.

Указание. Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

Решение. Составим матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$.

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем матрицу A^{-1} :

$$A_{11} = -11 \quad A_{21} = -25 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = 9 \quad A_{22} = -12 \quad A_{32} = 3$$

$$A_{13} = -13 \quad A_{23} = -11 \quad A_{33} = 7$$

$$\text{Тогда } A^{-1} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то исходная система превращается в матричное уравнение $AX =$

$$X = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

B , решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$= -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -11 - 150 + 8 \\ 9 - 72 + 12 \\ -13 - 66 + 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51} \begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3, y = 1, z = 1$.

Ответ: $x = 3, y = 1, z = 1$.

Задача 19. Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Указание. Для решения по правилу Крамера найдите определители $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение. 1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$.

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы: $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 11 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -12 + 18 + 10 \\ 42 - 15 + 5 \\ 66 - 3 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Задача 20. Решить систему методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание. Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение. Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим x из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3 \\ -11y + z = 3 \end{cases}$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 4 \\ -13y - z = -3. \\ -24y = 0 \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3, x = 1$.

Ответ: $x = 1, y = 0, z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 21. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}.$$

Указание. Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 .

Решение. Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469433> (дата обращения: 20.08.2021).

2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471452> (дата обращения: 30.08.2021).

Раздел 2. Основные понятия и методы математического анализа

Тема 2.2. Пределы и непрерывность

Практическое занятие № 2

Вычисление пределов функции

Объем времени: 2 часа

Цель практического занятия: научиться вычислять предел числовой последовательности и предел функции.

Студент должен:

знать: теоремы о пределах; первый замечательный предел; второй замечательный предел; алгоритм вычисления предела при неопределенности $\frac{0}{0}$; алгоритм вычисления пре-

дела при неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

уметь: вычислять предел числовой последовательности; уметь вычислять предел функции

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Числовая последовательность и ее предел. Предел функции на бесконечности и в точке. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Точки разрыва первого и второго рода.

Теоретический материал

«Предел и его свойства»

Предел функции (предельное значение функции) — одно из основных понятий математического и функционального анализ. **Предел** - это значение, к которому функция в определенном смысле приближается при приближении аргумента к определенной точке.

1. Ограниченность функции

Функция $f(x)$ называется **ограниченной на данном отрезке** (a,b) , если существует некоторые числа m и M такие, что

$$m \leq f(x) \leq M \text{ при } x \in (a, b).$$

Число $m_0 = \inf\{f(x)\} = \max(m)$ при $x \in (a, b)$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\{f(x)\} = \min(M)$ при $x \in (a, b)$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b) . Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b) .

2. Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a . Запись

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \dots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два *замечательных предела*:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Свойства предела

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a , причем $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

то

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B},$$

если $B \neq 0$ и если $g(x) \neq 0$ в δ -окрестности точки a .

$$4. \quad \lim k \cdot f(x) = k \cdot \lim f(x).$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

1. Повторите теоретический материала см. лекцию «Предел и его свойства».
2. Выполните задания по вариантам:

1 вариант

Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 10}{x^2 + 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 21}$;
г) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$; д) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{2}} \frac{x + \sqrt[3]{2}}{x^3 + 2}$.

2 вариант

Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 5x^2 - 2x + 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x - 12}$; в) $\lim_{\sqrt{x} \rightarrow 2} \frac{2x - x\sqrt{x}}{4 - x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$.

3. Поменяться вариантами и решить задания.
4. Сравнить ответы.

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469433> (дата обращения: 20.08.2021).

2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471452> (дата обращения: 30.08.2021).

Раздел 3. Дифференциальное исчисление

Тема 3.2. Приложение производной

Практическое занятие № 3

Решение задач по производным основных элементарных функций. Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Составление уравнения касательной к графику функций

Объем времени: 2 часа

Цель практического занятия: научиться находить производные функций и их значения в точке; находить производные сложных функций; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; исследовать функцию при помощи дифференциального исчисления

Студент должен:

знать: основные правила и формулы дифференцирования; правило нахождения производной сложной функции; основные правила и формулы дифференцирования; понятие дифференциала; правило отыскания экстремумов функции; правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции

уметь: применять основные правила и формулы дифференцирования при решении задач; находить производные сложных функций; находить производные функций и их значения в точке; применять дифференциал для нахождения приближенного значения функции; находить точки экстремумов функции и экстремумы функции; находить наибольшее и наименьшее значения функции

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Исследование функции с помощью производной: интервалы монотонности и экстремумы функции. Асимптоты. Исследование функций.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить производную функции $y = 3 \sin x - 2 \ln x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной линейной комбинации функций.

Решение. $y' = 3(\sin x)' - 2(\ln x)' = 3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Ответ: $3 \cos x - \frac{2}{x}$.

Задача 2. Вычислить производную функции $y = \sqrt[5]{x} \cdot \operatorname{tg} x$.

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной произведения функций.

Решение. $y' = (\sqrt[5]{x})' \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} \cdot \operatorname{tg} x + \sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Ответ: $\frac{\operatorname{tg} x}{5x^{\frac{4}{5}}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\cos^2 x}$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y = \frac{x + e^x}{x \cos x}$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулы производных линейной комбинации и отношения функций.

Решение. $y' = \frac{(x + e^x)' x \cos x - (x + e^x)(x \cos x)'}{(x \cos x)^2} = \frac{(1 + e^x)x \cos x - (x + e^x)(\cos x - x \sin x)}{x^2 \cos^2 x}$

Ответ: $\frac{e^x \cos x(x - 1) + (x + e^x)x \sin x}{x^2 \cos^2 x}$.

Задача 4. Вычислить производную функции $y = \cos \ln(3x^2 - 2)$

Указание. Примените таблицу основных производных и формулу производной сложной функции.

Решение.

$$y' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot (\ln(3x^2 - 2))' = -\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot \frac{1}{3x^2 - 2} \cdot (3x^2 - 2)' = -\frac{\sin \ln(3x^2 - 2) \cdot 6x}{3x^2 - 2}$$

Задача 5. Найти вторую производную от функции $y = \sqrt{3 - x^2}$

Указание. Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что $f''(x) = (f'(x))'$.

Решение. $y' = \left((3-x^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}(3-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{3-x^2} - \frac{x \cdot (-2x)}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2} = -\frac{3}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$.

Задача 6. Найти вторую производную от функции $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ при $x = 1$.

Указание. Найдите вторую производную по формуле $f''(x) = (f'(x))'$, а затем вычислите ее значение при $x = 1$.

Решение. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{(1+1^2)^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 7. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x-5)^7 + 4x - 7$.

Указание. Функция выпукла при условии $f''(x) < 0$.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 5(x-5)^4 + 4, \quad y'' = 20(x-5)^3 < 0 \Rightarrow x < 5.$$

Ответ: $(-\infty, 5)$.

Задача 8. Найти интервалы вогнутости функции $y = \frac{x^2}{9} - \sqrt[3]{x-2}$.

Указание. Границами интервалов выпуклости и вогнутости могут быть не только точки, в которых вторая производная равна нулю, но и точки, в которых она не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'' = \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) (x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}.$$

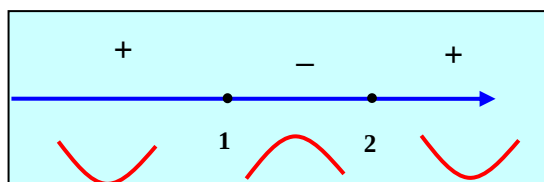
Представим вторую производную в виде:

$$y'' = \frac{2}{9} \left(1 + \frac{1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{5}{3}} + 1}{(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

и исследуем знак полученного выражения. Корень знаменателя: $x = 2$. Найдем корень числителя.

$$(x-2)^{\frac{5}{3}} = -1, \quad x-2 = (-1)^{\frac{3}{5}} = -1, \quad x = 1.$$

Знак второй производной:



Следовательно, интервалы вогнутости: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, 1), (2, +\infty)$.

Задача 9. Найти точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$.

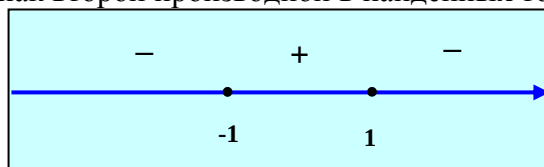
Указание. В точках перегиба вторая производная меняет знак, то есть требуется найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0, \quad x = \pm 1.$$

Проверим, меняется ли знак второй производной в найденных точках.



Значит, $x = \pm 1$ – точки перегиба.

Ответ: $x = \pm 1$.

Задача 10. При каких значениях a и b точка $(-2, 0)$ служит точкой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2 + 5x - 6$?

Указание. Для определения a и b требуется решить систему $\begin{cases} y''(-2) = 0 \\ y(-2) = 0 \end{cases}$.

Решение. $y' = 3ax^2 + 2bx + 5, \quad y'' = 6ax + 2b$.

Для того чтобы $(-2, 0)$ была точкой перегиба, нужно, чтобы $y'(-2) = 0$.

$$6a(-2) + 2b = 0, \quad b = 6a.$$

При этом точка $(-2, 0)$ лежит на кривой, то есть $y(-2) = 0$. Подставим в это равенство $b = 6a$:

$$-8a + 24a - 10 - 6 = 0, \quad 16a - 16 = 0, \quad a = 1, \quad b = 6.$$

Ответ: $a = 1, b = 6$.

Задача 11. Сколько асимптот имеет график функции $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad (|k| < \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b \quad (|b| < \infty).$$

Решение. Исследуем функцию на наличие асимптот разных видов.

1) $x = \pm 1$ – точки разрыва 2-го рода, поэтому прямые $x = \pm 1$ – горизонтальные асимптоты графика.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2 < \infty.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ – горизонтальная асимптота графика на обоих концах оси Ox . При этом наклонных асимптот у функции быть не может. Итак, график имеет 3 асимптоты (две вертикальных и одну горизонтальную).
 Ответ: 3.

Задача 12. Асимптоты какого вида имеет график функции $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$?

Указание. График имеет вертикальные асимптоты, если $\exists x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Условие наличия горизонтальной асимптоты – конечный предел $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$.

Если этот предел бесконечен, функция может иметь наклонную асимптоту при условии, что

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

Решение. 1) Точка разрыва функции: $x=0$. При этом

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t}}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^{2t})'}{(t)'} = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{2t}}{1} = \infty$$

Если хотя бы один из односторонних пределов в данной точке бесконечен, через точку проходит вертикальная асимптота. Значит, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика.

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 \right) = \infty$, следовательно, горизонтальных асимптот нет.

$$3) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 1 \right) = 2 + 1 = 3$$

Значит, прямая $y = x + 3$ – наклонная асимптота графика.

Ответ: график имеет вертикальную и наклонную асимптоту.

Задача 13. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 1$, где знаменатель дроби обращается в нуль.

2) График данной функции пересекает координатную ось Oy в точке $M_0(0, -2)$, т.к. $y = -2$ при $x = 0$.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox , необходимо решить уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$. Но данное уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, у графика данной функции нет точек пересечения с осью Ox .

3) Данная функция непрерывна во всей области своего определения. Для исследования функции на четность проверим выполнение условия $f(-x) = f(x)$; для исследования функции на нечетность проверим выполнение условия $f(-x) = -f(x)$. Имеем:

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то, следовательно, данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Исходная функция не периодична, т.к. $f(x + T) \neq f(x)$ для любого $T \neq 0$.

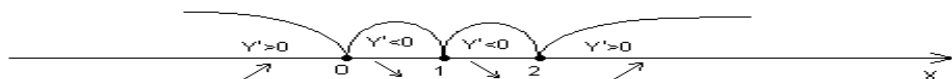
4) Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x-1) - (x^2 - 2x + 2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Определим стационарные точки. Для этого приравняем $y' = 0$. Получим:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Производная y' не существует в точке $x = 1$. Но точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Следовательно, стационарными точками данной функции являются точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Отметим все три точки на числовой оси:



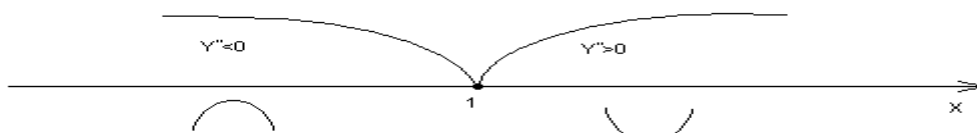
Определим знак производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить в производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке. Следовательно, исходная функция убывает на интервале $(0,1) \cup (1,2)$, возрастает на интервале $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ (что показано на рисунке).

5) Так как производная меняет знак при переходе через стационарные точки, то эти точки являются точками экстремума. А именно, $x = 0$ - точка максимума, $x = 2$ - точка минимума. Максимальное значение функции равно $y(0) = -2$, минимальное значение $y(2) = 2$.

6) Вычислим вторую производную данной функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, но y'' не существует при $x = 1$. Точка $x = 1$ не принадлежит области определения данной функции. Отметим эту точку на числовой оси:



Определим знак второй производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить во вторую производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке.

Следовательно, график данной функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1, +\infty)$ (что показано на рисунке).

Так как вторая производная нигде не обращается в нуль и точка $x = 1$, где y'' не существует, не принадлежит области определения данной функции, то у исходной функции нет точек перегиба.

а. Найдем предел данной функции при $x \rightarrow 1$ слева и справа:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

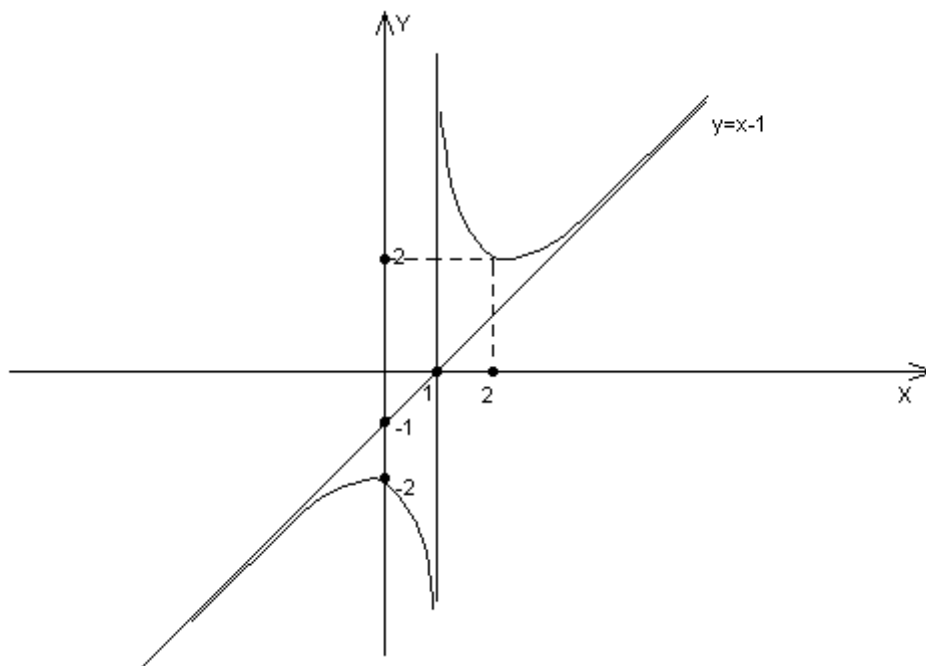
Для нахождения наклонной асимптоты вычислим следующие пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{x-1} = -1.$$

Следовательно, наклонная асимптота графика данной функции имеет вид $y = x - 1$.

8) Используя полученные данные, построим график исходной функции:



Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469433> (дата обращения: 20.08.2021).

2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471452> (дата обращения: 30.08.2021).

Раздел 4. Интегральное исчисление

Тема 4. 2 Определённый интеграл

Практическое занятие № 4

Вычисление определенных интегралов, площади фигуры при помощи определенного интеграла, нахождение длины пути по данной скорости

Объем времени: 2 часа

Цель практического занятия: научиться вычислять определители, выполнять действия с матрицами, находить обратную матрицу

Студент должен:

знать: формулу Ньютона-Лейбница; свойства определенного интеграла; геометрический смысл определенного интеграла; физические приложения определенного интеграла

уметь: применять формулу Ньютона – Лейбница; применять свойства определенного интеграла при вычислениях; вычислять площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла; находить длину пути по данной скорости

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Задача о площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона- Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площади.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Вычислить интеграл $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение. $\int_9^{16} \frac{1+3x}{\sqrt{x}} dx = \int_9^{16} \left(x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_9^{16} = 2 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - \left(9^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} \right) \right) = 76$

Ответ: 76.

Задача 2. Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \right) dx = (-\operatorname{ctgx} - 2x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Указание. Воспользуйтесь формулой замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Решение.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = 4 \quad t = 2 \\ x = 9 \quad t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t}{t-1} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1) dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 7 + 2 \ln 2$$

Ответ: $7 + 2 \ln 2$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, разложив ее в сумму простейших дробей, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_1^5 \frac{3x+7}{x^2+5x+6} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \left(\ln|x+2| + 2 \ln|x+3| \right) \Big|_1^5 = \ln 7 + 2 \ln 8 - \ln 3 - 2 \ln 4 = \ln \frac{28}{3}$$

Ответ: $\ln \frac{28}{3}$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos 9x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18} \sin \frac{9\pi}{2} - 0 = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

Задача 5. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

Указание. Найдите первообразную подынтегральной функции, представив числитель дроби как разность квадратов, а затем воспользуйтесь формулой Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} dx = \int_4^9 (\sqrt{x}-1) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right) \Big|_4^9 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \left(\frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - 4 \right) = \frac{23}{3}.$$

Ответ: $\frac{23}{3}$

Задача 6. Вычислить интеграл $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

Указание. Сделайте замену $t = \sqrt{1+\ln x}$

$$\text{Решение. } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{1+\ln x} \\ t^2 = 1+\ln x \\ 2t dt = \frac{dx}{x} \\ x=1 \quad t=1 \\ x=e^3 \quad t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2t dt}{t} = 2t \Big|_1^2 = 2(2-1) = 2$$

Ответ: 2.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^3 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^3 \quad dv = \cos x dx \\ du = 3x^2 dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = x^3 \sin x \Big|_0^{\pi} - 3 \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= \pi^3 \sin \pi - 3 \left((-x^2 \cos x) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos x dx \\ du = dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = 3\pi^2 \cos \pi - 6 \left((x \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) = \\ &= -3\pi^2 - 6 \cos x \Big|_0^{\pi} = -3\pi^2 - 6 \cos \pi + 6 \cos 0 = 12 - 3\pi^2 \end{aligned}$$

Ответ: $12 - 3\pi^2$

Задача 8. Вычислить интеграл $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Указание. Примените формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = (e-1) \ln e - 0 - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1 dx}{x+1} = \\ &= e-1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = e-1 - (x - \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} = e-1 - (e-1-1) = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.

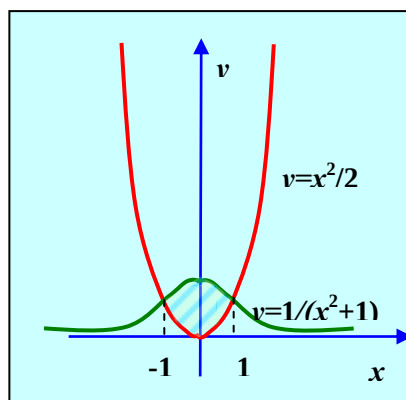
Задача 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$

Указание. Постройте графики функций, ограничивающие фигуру, и найдите абсциссы точек их пересечения. Затем вычислите площадь фигуры по формуле $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$,

где $f_1(x)$ – функция, график которой является нижней границей фигуры, а $f_2(x)$ – функция, задающая верхнюю границу.

Решение. $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ – найдены пределы интегрирования.

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\arctg x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469433> (дата обращения: 20.08.2021).

2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471452> (дата обращения: 30.08.2021)

Рахдел 5. Комплексные числа

Тема. 5.1 Комплексные числа

Практическое занятие № 5

Решение задачи по выполнению арифметических операций над комплексными числами, нахождение модуля и аргумента комплексного числа

Объем времени: 4 часа

Цель практического занятия: научиться выполнять действия с комплексными числами в алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Студент должен:

знать: определение комплексного числа; понятие сопряженных комплексных чисел; понятие модуля комплексного числа; правила выполнения действий с комплексными числами в алгебраической форме; формулы перехода от алгебраической формы к тригонометрической форме комплексного числа; правила выполнения действий над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

уметь: записывать число, сопряженное заданному комплексному числу; вычислять модуль комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме; находить тригонометрическую форму комплексного числа; выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме; находить корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Перечень необходимых средств обучения: учебник, тетрадь.

Требования по теоретической готовности студентов к выполнению практических занятий: Определение комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа.

Содержание заданий и рекомендации по их выполнению

Задача 1. Заданы комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1+i$; г) $z_4 = -1+2i$; д) $z_5 = -1-i\sqrt{3}$; е) $z_6 = 2-i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение. а) имеем (см. рис. 1) $r = 1$; $\varphi = \pi$,

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

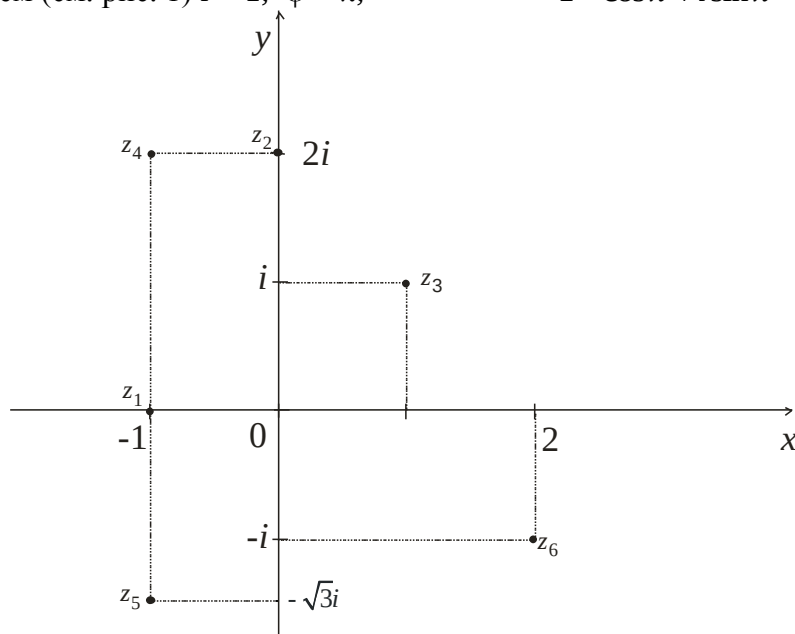


рис. 1

б) имеем (см. рис. 1) $r = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$;

в) имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$; согласно рис. 1 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так что $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;

г) имеем $r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -2$; согласно рис. 1, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} 2$, так что $-1+2i = \sqrt{5} e^{i(\pi - \operatorname{arctg} 2)}$;

д) имеет $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$, согласно рис. 1, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $\varphi = \frac{4}{3} \pi$, так что $-1-i\sqrt{3} = 2 e^{i \frac{4}{3} \pi}$;

е) имеем $r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2}$, согласно рис. 1, точка z_6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому $\varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right)$, $2-i = \sqrt{5} e^{i \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]}$.

Задача 2. Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-1-i3}$.

Решение. а)

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1;$$

$$\text{при } k=0 \quad (\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{при } k=1 \quad (\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$1. \text{ При } k=0: \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2. \text{ При } k=1: \quad z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$3. \text{ При } k=2: \quad z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$1. \text{ При } k=0: \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$2. \text{ При } k=1: \quad z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right);$$

$$3. \text{ При } k=2: \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$4. \text{ При } k=3: \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

Задача 3. Представить в алгебраической форме $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^9$

Решение Пусть $z_1 = 1-i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$. Имеем $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = -1$; точка z_1 принадлежит четвертому квадранту, поэтому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^9 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^9 \left[\cos 9(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin 9(\varphi_1 - \varphi_2) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 \left[\cos \frac{57}{4}\pi + i \sin \frac{57}{4}\pi \right] = \frac{1+i}{32}$$

Задача 4 Дано комплексное число $z_0 = \frac{2}{1+i}$. Требуется:

1) записать данное число в алгебраической и тригонометрической формах;

2) найти все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$.

Решение. 1) Приведем комплексное число z_0 к алгебраической форме: $z_0 = \alpha_0 + \beta_0 i$.

Для этого умножим числитель и знаменатель дроби z_0 на число $1-i$, комплексно-сопряженное знаменателю. Получим:

$$z_0 = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1-i.$$

Это и есть алгебраическая форма комплексного числа z_0 , где $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -1$.

Теперь приведем комплексное число $z_0 = 1 - i$ к тригонометрическому виду: $z_0 = \rho_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, где ρ_0 - модуль комплексного числа z_0 , φ_0 - аргумент этого числа.

Для этого найдем $\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} = \sqrt{2}$. Для нахождения φ_0 имеем систему:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \rho_0 \cos \varphi_0 \\ \beta_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos \varphi_0 \\ -1 = \sqrt{2} \sin \varphi_0 \end{cases} \text{ и тогда } \varphi_0 = -\frac{\pi}{4}. \text{ Следовательно, тригонометрическая}$$

форма комплексного числа z_0 имеет вид: $z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$.

3) Найдем теперь все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$, откуда $z = \sqrt[3]{-z_0}$. Тригонометрическая форма комплексного числа $-z_0$ имеет вид: $-z_0 = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$.

По второй из формул Муавра получаем: $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right)$, где

$$k = 0, 1, 2.$$

Тогда корни уравнения имеют вид:

$$5. \text{ При } k = 0: z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$6. \text{ При } k = 1: z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$7. \text{ При } k = 2: z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Задача 5. Для комплексных чисел $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$ найти число, комплексно сопряженное числу $z_1 + z_2$.

Указание. $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$;

$$z = a + b i \Rightarrow \bar{z} = a - b i$$

Решение. $z_1 + z_2 = (3 + 5) + (-2 + 3)i = 8 + i, \quad \overline{(z_1 + z_2)} = 8 - i$

Ответ: $8 - i$.

Задача 6. Для комплексных чисел $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$ найти $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби $\frac{4-i}{3+4i}$ на выражение, сопряженное знаменателю.

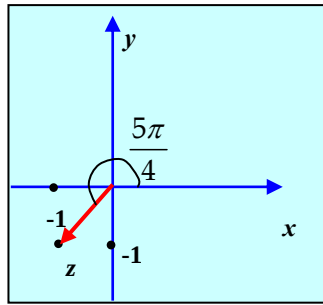
$$\text{Решение. } \frac{z_1}{z_2} = \frac{4-i}{3+4i} = \frac{(4-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{12-19i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{12-19i-4}{9+16} = \frac{8-19i}{25} = 0,32 - 0,76i$$

Ответ: $0,32 - 0,76i$.

Задача 7. Найти аргумент комплексного числа $z = -1 - i$.

Указание. Найдите угол, образованный вектором $(-1, -1)$ и положительным направлением оси абсцисс.

Решение.



Вектор $(-1, -1)$ образует с осью Ox угол $\frac{5\pi}{4}$, который является аргументом числа $-1 - i$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

Задача 8. Найти модуль числа $z_1 z_2 + z_3$, если $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 + 5i$.

Указание. Найдите действительную и мнимую части числа $z_1 z_2 + z_3$ и воспользуйтесь формулой $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Решение. $z_1 z_2 = (1 - 5i)(2 + i) = 2 - 9i - 5i^2 = 7 - 9i$; $z_1 z_2 + z_3 = (7 - 4) + (-9 + 5)i = 3 + 4i$;

$$|z_1 z_2 + z_3| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Ответ: 5.

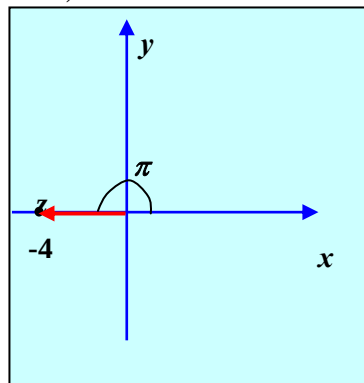
Задача 9. Записать в тригонометрической форме число -4 .

Указание. Рассмотрите на плоскости вектор $(-4, 0)$.

Решение. $a = -4$, $b = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 0} = 4$;

$$\arg z = \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin \varphi = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

Второй способ решения задачи: Задачу можно решить, исходя из геометрических соображений: модуль вектора $(-4; 0)$ равен 4, а угол, который он образует с осью Ox , равен π . Следовательно, $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$.



Ответ: $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Задача 10. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^{20}$

Указание. Представьте данное число в тригонометрической форме.

$$\text{Решение. } |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3 + 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right);$$

$$(\sqrt{3} - i)^{20} = 2^{20} \left(\cos \left(-\frac{20\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{6} \right) \right) = 2^{20} \left(\cos \left(-4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-4\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right) =$$

$$= 2^{20} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{19} (-1 + \sqrt{3}i)$$

Ответ: $2^{19}(-1 + \sqrt{3}i)$

Требования к результатам работы: письменно оформленная расчётно-графическая работа

Форма контроля: индивидуальный.

Критерии оценки: см. пояснительную записку

Список рекомендуемой литературы:

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/469433> (дата обращения: 20.08.2021).

2. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 245 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-9916-9072-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471452> (дата обращения: 30.08.2021).

3 ЛИСТ ВНЕСЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ

№	Номер и дата распоря- дительного документа о внесении изменений	Дата внесе- ния измене- ний	Ф.И.О. лица, от- ветственного за изменение	Подпись	Номер и дата распо- рядительного доку- мента о принятии изменений