

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем
Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭИС

 В.А. Шульцев

«18» 06 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
учебной дисциплины

Функциональный анализ

по направлению подготовки

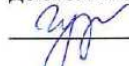
01.03.01 Математика

Направленность (профиль)

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных
исследованиях

СОГЛАСОВАНО

Начальник отдела обеспечения
деятельности ИЭИС

 И. Н. Гуркова

«05» 06 20 24 г.

Разработал

Доцент кафедры АГ НовГУ

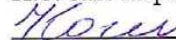
 А.О. Кондюков

«03» 06 20 24 г.

Принято на заседании кафедры

Протокол № 11 от «05» 06 20 24 г.

И.о. зав. кафедрой АГ

 Е.М. Кондрушенко

«05» 06 20 24 г.

1 Цели и задачи освоения учебной дисциплины

Цель освоения учебной дисциплины - формирование компетентности студентов в области функционального анализа и методов использования аппарата данной дисциплины в приложениях при качественном и количественном анализе различных естественнонаучных процессов.

Задачи:

- а) формирование систематизированных теоретических знаний в области функционального анализа;
- б) овладение основополагающими принципами и фактами функционального анализа;
- в) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

2 Место учебной дисциплины в структуре ОПОП

Учебная дисциплина относится к обязательной части учебного плана основной профессиональной образовательной программы направления по направлению подготовки 01.03.01 Математика и направленности (профилю) Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях (далее – ОПОП). В качестве входных требований выступают сформированные ранее компетенции обучающихся, приобретенные ими в рамках следующих дисциплин (модулей, практик): "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения", "Комплексный анализ". Освоение учебной дисциплины является компетентностным ресурсом для дальнейшего изучения дисциплин "Дифференциальная геометрия и топология", "Случайные процессы", а также для написания выпускной квалификационной работы.

3 Требования к результатам освоения учебной дисциплины

Перечень компетенций, которые формируются в процессе освоения учебной дисциплины (модуля):

Профессиональные компетенции:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результаты освоения учебной дисциплины представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты освоения учебной дисциплины

Код и наименование компетенции	Результаты освоения учебной дисциплины (индикаторы достижения компетенций)		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	Знает основные понятия и методы фундаментальных математических дисциплин	Умеет применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Владет умением осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

4 Структура и содержание учебной дисциплины

4.1 Трудоемкость учебной дисциплины

4.1.1 Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения представлена в таблице 2.
Таблица 2 – Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения

Части учебной дисциплины (модуля)	Всего	Распределение по семестрам
		7семестр
1. Трудоемкость учебной дисциплины (модуля) в зачетных единицах (ЗЕТ)	7	7
2. Контактная аудиторная работа в академических часах (АЧ)	84	84
3. Курсовая работа/курсовой проект (АЧ) (при наличии)	-	-
4. Внеаудиторная СРС в академических часах (АЧ)	132	132
5. Промежуточная аттестация (зачет; дифференцированный зачет; экзамен) (АЧ)	Экзамен 36	Экзамен 36

4.2 Содержание учебной дисциплины

Раздел № 1 Метрические пространства

- 1.1 Метрические пространства
- 1.2 Пополнение метрического пространства
- 1.3 Компактные метрические пространства

Раздел № 2 Нормированные пространства

- 2.1 Линейные пространства
- 2.2 Нормированные пространства
- 2.3 Банаховы пространства

Раздел № 3 Гильбертовы пространства

- 3.1 Гильбертовы пространства
- 3.2 Ряды Фурье
- 3.3 Ортогональные разложения и ортогональные суммы

Раздел № 4 Линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах

- 4.1 Линейные непрерывные операторы
- 4.2 Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности
- 4.3 Обратные операторы. Замкнутые операторы

Раздел № 5 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах

- 5.1 Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества
- 5.2 Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов
- 5.3 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах

4.3 Трудоемкость разделов учебной дисциплины (модуля) и контактной работы

Таблица 3 – Трудоемкость разделов учебной дисциплины

№	Наименование разделов (тем) учебной дисциплины (модуля), УЭМ, наличие КП/КР	Контактная работа (в АЧ)					Внеауд. СРС (в АЧ)	Формы текущего контроля
		Аудиторная			В т.ч. СРС	Экз		
		ЛЕК	ПР	ЛР				
Раздел № 1 Метрические пространства								
1.1	Метрические пространства	2	2		0,5		8	Домашняя работа 1
1.2	Пополнение метрического пространства	3	3		1		8	
1.3	Компактные метрические пространства	3	3		1		8	
Рубежная аттестация								Контрольная работа - 1
Раздел № 2 Нормированные пространства								
2.1	Линейные пространства	2	2		0,5		9	Домашняя работа 2
2.2	Нормированные пространства	3	3		1		9	
2.3	Банаховы пространства	3	3		1		9	
Рубежная аттестация								Контрольная работа – 2 Контрольный опрос – коллоквиум 1
Раздел № 3 Гильбертовы пространства								
3.1	Гильбертовы пространства	2	2		1		9	Домашняя работа 3
3.2	Ряды Фурье	3	3		1		9	
3.3	Ортогональные разложения и ортогональные суммы	3	3		1		9	
Рубежная аттестация								Контрольная работа – 3
Раздел № 4 Линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах								
4.1	Линейные непрерывные операторы	3	3		1		9	Домашняя работа 4
4.2	Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности	3	3		1		9	
4.3	Обратные операторы. Замкнутые операторы	3	3		1		9	
Рубежная аттестация								Контрольная работа - 4 Контрольный опрос – коллоквиум 2
Раздел № 5 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах								
5.1	Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества	3	3		1		9	Домашняя работа 5
5.2	Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов	3	3		1		9	

5.3	Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах	3	3		1		9	
<i>Промежуточная аттестация</i>						36		Экзамен
	ИТОГО	42	42	0	14	36	132	

4.4 Лабораторные работы и курсовые работы/курсовые проекты

4.4.1 Перечень тем лабораторных работ:

Лабораторные работы не предусмотрены учебным планом.

4.4.2 Примерные темы курсовых работ/курсовых проектов:

Курсовые работы/курсовые проекты не предусмотрены учебным планом.

5 Методические рекомендации по организации освоения учебной дисциплины

Таблица 4 – Методические рекомендации по организации лекций

№	Темы лекционных занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
Раздел № 1 Метрические пространства		
1.1	Метрические пространства (информационная лекция)	2
1.2	Пополнение метрического пространства (информационная лекция)	3
1.3	Компактные метрические пространства (информационная лекция)	3
Раздел № 2 Нормированные пространства		
2.1	Линейные пространства (информационная лекция)	2
2.2	Нормированные пространства (информационная лекция)	3
2.3	Банаховы пространства (информационная лекция)	3
Раздел № 3 Гильбертовы пространства		
3.1	Гильбертовы пространства (информационная лекция)	2
3.2	Ряды Фурье (информационная лекция)	3
3.3	Ортогональные разложения и ортогональные суммы (информационная лекция)	3
Раздел № 4 Линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах		
4.1	Линейные непрерывные операторы (информационная лекция)	3
4.2	Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности (информационная лекция)	3
4.3	Обратные операторы. Замкнутые операторы (информационная лекция)	3
Раздел № 5 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах		
5.1	Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества (информационная лекция)	3
5.2	Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов (информационная лекция)	3
5.3	Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах (информационная лекция)	3
	ИТОГО	42

Таблица 5 – Методические рекомендации по организации практических занятий

№	Темы практических занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
---	--	-------------------

Раздел № 1 Метрические пространства		
1.1	Метрические пространства(работа в группах, обсуждения, СРС)	2
1.2	Пополнение метрического пространства (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
1.3	Компактные метрические пространства (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
Раздел № 2 Нормированные пространства		
2.1	Линейные пространства(работа в группах, обсуждения, СРС)	2
2.2	Нормированные пространства(работа в группах, обсуждения, СРС)	3
2.3	Банаховы пространства(работа в группах, обсуждения, СРС)	3
Раздел № 3 Гильбертовы пространства		
3.1	Гильбертовы пространства(работа в группах, обсуждения, СРС)	2
3.2	Ряды Фурье(работа в группах, обсуждения, СРС)	3
3.3	Ортогональные разложения и ортогональные суммы (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
Раздел № 4 Линейные непрерывные операторы в нормированных пространствах		
4.1	Линейные непрерывные операторы(работа в группах, обсуждения, СРС)	3
4.2	Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
4.3	Обратные операторы. Замкнутые операторы (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
Раздел № 5 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах		
5.1	Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
5.2	Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
5.3	Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах (работа в группах, обсуждения, СРС)	3
	ИТОГО	42

6 Фонд оценочных средств учебной дисциплины (модуля)

Фонд оценочных средств представлен в Приложении А.

7 Условия освоения учебной дисциплины (модуля)

7.1 Учебно-методическое обеспечение

Учебно-методического обеспечения учебной дисциплины (модуля) представлено в Приложении Б.

7.2 Материально-техническое обеспечение

Таблица 6 – Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины

№	Требование к материально-техническому обеспечению согласно ФГОС ВО	Наличие материально-технического оборудования	
1.	Учебные аудитории для проведения учебных занятий	аудитория для проведения лекционных и/или практических занятий: учебная мебель (столы, стулья, доска)	
		помещения для самостоятельной работы (наличие компьютера, выход в Интернет)	
2.	Мультимедийное оборудование	компьютер, проектор, экран, выход в интернет	
3.	Программное обеспечение		
Наименование программного продукта		Обоснование для использования (лицензия, договор, счёт, акт или иное)	Дата выдачи
ContentReader PDF 15 Business Версия для скачивания (годовая лицензия с академической скидкой) * <i>Только для осеннего семестра</i>		Договор №ЗКС/260	31.10.2023
Антиплагиат. Вуз.*		Договор №05//ЕП(У)24-ВБ	18.01.2024
MS Office 365		Безвозмездно передаваемое ВУЗам	-
Adobe Acrobat		свободно распространяемое	-
Teams		Входит в состав MS Office 365	-
Skype		свободно распространяемое	-
Zoom		свободно распространяемое	-
"Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Education Renewal. 250-499 Node I year License" /1 год *		Договор №294/ЕП(У)25-ВБ	13.09.2023
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-14211	09.12.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-12617	21.11.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-max-x86_64-0-11416	26.10.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-9651	28.09.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8801	07.09.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8590	01.09.2022
* отечественное производство			

Приложение А
(обязательное)

Фонд оценочных средств
учебной дисциплины (модуля) «Функциональный анализ»

1 Структура фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств состоит из двух частей:

а) открытая часть – общая информация об оценочных средствах (название оценочных средств, проверяемые компетенции, баллы, количество вариантов заданий, методические рекомендации для применения оценочных средств и пр.), которая представлена в данном документе, а также те вопросы и задания, которые могут быть доступны для обучающегося;

б) закрытая часть – фонд вопросов и заданий, которая не может быть заранее доступна для обучающихся (экзаменационные билеты, вопросы к контрольной работе и пр.) и которая хранится на кафедре.

2 Перечень оценочных средств текущего контроля и форм промежуточной аттестации

Таблица А.1 – Перечень оценочных средств

№	Оценочные средства для текущего контроля	Разделы (темы) учебной дисциплины	Баллы	Проверяемые компетенции
1	Домашняя работа 1	1.1 Метрические пространства 1.2 Пополнение метрического пространства 1.3 Компактные метрические пространства	20	ОПК-1
2	Домашняя работа 2	2.1 Линейные пространства 2.2 Нормированные пространства 2.3 Банаховы пространства	20	
3	Домашняя работа 3	3.1 Гильбертовы пространства 3.2 Ряды Фурье 3.3 Ортогональные разложения и ортогональные суммы	20	
4	Домашняя работа 4	4.1 Линейные непрерывные операторы 4.2 Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности 4.3 Обратные операторы. Замкнутые операторы	20	
5	Домашняя работа 5	5.1 Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества 5.2 Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов 5.3 Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах	20	
6	Контрольная работа - 1	1.1 Метрические пространства 1.2 Пополнение метрического пространства 1.3 Компактные метрические пространства	30	
7	Контрольная работа - 2	2.1 Линейные пространства 2.2 Нормированные пространства 2.3 Банаховы пространства	30	
8	Контрольная работа - 3	3.1 Гильбертовы пространства 3.2 Ряды Фурье 3.3 Ортогональные разложения и ортогональные суммы	30	

9	Контрольная работа - 4	4.1 Линейные непрерывные операторы 4.2 Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности 4.3 Обратные операторы. Замкнутые операторы	30	
10	Контрольный опрос – коллоквиум 1	1.1 Метрические пространства 1.2 Пополнение метрического пространства 1.3 Компактные метрические пространства 2.1 Линейные пространства 2.2 Нормированные пространства 2.3 Банаховы пространства	40	
11	Контрольный опрос – коллоквиум 2	3.1 Гильбертовы пространства 3.2 Ряды Фурье 3.3 Ортогональные разложения и ортогональные суммы 4.1 Линейные непрерывные операторы 4.2 Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности 4.3 Обратные операторы. Замкнутые операторы	40	
<i>Промежуточная аттестация</i>				
	Экзамен		50	
	ИТОГО		350	

3 Рекомендации к использованию оценочных средств

Таблица А.2 – Домашняя работа (ДР)

Критерии оценки		Количество заданий
10-14 баллов	Не менее 50%, но менее 70% от числа баллов, выделенных на ДР	3 из контролируемого раздела
15-18 баллов	Не менее 70%, но менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	
19-20 баллов	Не менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	

Темы ДР 1

1. Метрические пространства
2. Пополнение метрического пространства
3. Компактные метрические пространства

Пример ДР 1

1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны двум аксиомам:
 - 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
 - 2) для любых трех элементов x, y и z

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$$
 (аксиома треугольника)
2. Пусть X – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Тогда справедливы утверждения:
 - а) если множество M замкнуто, то оно полно;
 - б) если множество M полно, то оно замкнуто.
3. Докажите, что в полном метрическом пространстве замыкание относительно компактного множества является компактом.

Темы ДР 2

1. Линейные пространства
2. Нормированные пространства
3. Банаховы пространства

Пример ДР 2

1. Можно ли на линейном многообразии непрерывных функций $C[a, b]$ за норму элемента $x(t)$ принять

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|?$$

2. Доказать, что шар (замкнутый шар) в произвольном линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.
3. Доказать, что в бесконечномерном банаховом пространстве не может существовать счетного алгебраического базиса.

Темы ДР 3

1. Гильбертовы пространства
2. Ряды Фурье
3. Ортогональные разложения и ортогональные суммы

Пример ДР 3

1. Доказать, что в гильбертовом пространстве элементы x и u ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\|\lambda x\|^2 + \|\mu x\|^2 = \|\lambda x + \mu x\|^2$$

для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. Доказать, что при фиксированном n множество

$$M = \left\{ x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}$$

является подпространством пространства l_2 . Описать такое подпространство N , что $l_2 = M \oplus N$.

3. Описать ортогональное дополнение к подпространству $W_2^1[a, b]$, т.е. подпространство $(W_2^1[0, 1])^\perp$.

Темы ДР 4.

1. Линейные непрерывные операторы
2. Пространство линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности
3. Обратные операторы. Замкнутые операторы

Пример ДР4

1. Доказать, что оператор

$$A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(\tau) = \int_0^\tau x(t) dt$$

является линейным ограниченным оператором, и найти его норму.

2. Доказать, что пространство линейных ограниченных операторов $L(X, X)$, где $X = L_2[0, 1]$, не separabelно.
3. Построить неограниченный линейный оператор, отображающий взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство X .

Темы ДР5.

Линейные функционалы, гиперподпространства, полунормы, выпуклые множества
Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов

Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах

Пример ДР5.

1. Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.
2. Пусть X – банахово пространство. Доказать, что если X^* сепарабельно, то и пространство X сепарабельно.
3. Доказать, что в пространстве R^n сильная и слабая сходимости совпадают.

Таблица А.3 – Контрольная работа (КР)

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
10-14 баллов	испытывает трудности при выполнении заданий	5	4
15-18 баллов	допускает неточности при выполнении заданий		
19-20 баллов	демонстрирует четкое и безошибочное выполнение заданий		

КР1 Демонстрационный вариант

1. Доказать, что если $M_1 \subset M_2$, то $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$.
2. Докажите, что каждая точка канторова множества является его предельной точкой.
3. Доказать, что дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно.

КР2 Демонстрационный вариант

1. Задаёт ли функция $x \rightarrow |\arctg x|$ норму на числовой прямой?
2. Представить в пространстве $C[-1,1]$ в виде прямой суммы двух бесконечномерных пространств.
3. Доказать полноту пространства $L_1[a, b]$.

КР3 Демонстрационный вариант

1. Доказать, что в нормированном пространстве $C[0,1]$ норма не порождается скалярным произведением.
2. Доказать неравенство Бесселя для несепарабельного гильбертова пространства H .
3. Доказать, что в гильбертовом пространстве H две полные ортонормированные системы имеют одну и ту же мощность.

КР4 Демонстрационный вариант

1. Доказать линейность и ограниченность оператора умножения:

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(\tau) = a(\tau)x(\tau), a \in C[0,1]$$

и найти его норму.

2. Доказать, что существует непрерывная, 2π -периодическая функция $x(t)$, ряд Фурье которой расходится в произвольной наперед заданной точке.
3. Доказать, что множество нулей $\text{Ker} A$ замкнутого оператора A является подпространством.

Таблица А.4 – Контрольный опрос-коллоквиум (КЛ)

<i>Критерии оценки</i>		<i>Количество о вариантов заданий</i>	<i>Количество о вопросов</i>
12-17 баллов	испытывает трудности при демонстрации знаний, испытывает трудности в определениях терминов и описаниях алгоритмов действий	5	2
18-21 баллов	допускает неточности при изложении материала; не всегда четко дает определения терминов, имеет представление об алгоритмах действий		
22-25 баллов	имеет целостное представление об излагаемом материале, определения четкие, безошибочны алгоритмы действий		

Контрольные вопросы (КЛ 1)

1. Определение метрического пространства и основные неравенства. Примеры метрических пространств.
2. Открытые и замкнутые множества. Точки прикосновения и предельные точки. Сходимость в метрическом пространстве. Непрерывные отображения в метрических пространствах.
3. Понятие полного метрического пространства. Примеры неполных пространств. Пополнение метрического пространства. Теоремы в полных метрических пространствах.
4. Определение компактного пространства. Теорема Хаусдорфа. Эквивалентное определение компактного пространства.
5. Относительная компактность в пространствах непрерывных функций $C[0,1]$, l_p и $L_p[0,1]$. Свойства непрерывных отображений на компактных пространствах.
6. Аксиомы линейного пространства и простейшие следствия. Примеры линейных пространств.
7. Размерность. Базис конечномерного пространства. Линейное многообразие. Линейные оболочки.
8. Изоморфизм линейных пространств. Фактор-пространства. Прямые суммы. Лемма Цорна. Существование алгебраического базиса.
9. Определение нормированного пространства. Примеры линейных нормированных пространств.
10. Открытые и замкнутые множества. Точки прикосновения и предельные точки.
11. Эквивалентные нормы. Конечномерные нормированные пространства. Расстояние от точки до подпространства. Приближение элементами подпространства.
12. Лемма Рисса. Об одном применении леммы Рисса. Компактность и конечномерность.
13. Пополнение нормированного пространства. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Принцип вложенных шаров. Множеств первой и второй категории.
14. Фактор-пространства нормированных пространств. Банахово пространство с базисом.

Контрольные вопросы (КЛ 2)

1. Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Определение гильбертова пространства.
2. Ортогональность в гильбертовом пространстве. Пополнение предгильбертова пространства.
3. Ортогональные ряды. Ряд Фурье по ортонормированной системе и неравенство Бесселя.
4. Ряд Фурье по полной ортонормированной системе и равенство Парсеваля-Стеклова.
5. Процесс ортогонализации Шмидта и существование ортонормированного базиса.
6. Изоморфизм гильбертовых пространств. О несепарабельных гильбертовых пространствах.
7. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества. Ортогональные разложения. Ортогональные суммы бесконечного числа подпространств.
8. Определение линейного оператора. Определение обратного оператора. Непрерывные линейные операторы. Ограниченные линейные операторы.
9. Непрерывность и ограниченность.
10. Норма оператора. Продолжение оператора по непрерывности.

11. Пространство линейных операторов. Равномерная и поточечная сходимость линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности.
12. Теорема о непрерывности обратного оператора.
13. Теорема Банаха об обратном операторе об обратном операторе. Открытое отображение.
14. Замкнутые операторы.

Таблица А.5 – Экзамен

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
25-34 баллов	ответ не полный, слабо аргументированный, демонстрирует несформированность некоторых практических умений, уровень мотивации учения низкий	10	3
35-44 баллов	ответ полный, достаточно обоснованный, с отдельными неточностями в изложении, пути решения практических задач не всегда рациональны, уровень мотивации учения средний		
45-50 баллов	ответ полный с достаточно глубоким пониманием теоретических и практических вопросов, изложение четкое, логически выдержанное, уровень мотивации учения высокий		

Контрольные вопросы к экзамену «Функциональный анализ»

1. Определение метрического пространства и основные неравенства. Примеры метрических пространств.
2. Открытые и замкнутые множества. Точки прикосновения и предельные точки. Сходимость в метрическом пространстве. Непрерывные отображения в метрических пространствах.
3. Понятие полного метрического пространства. Примеры неполных пространств. Пополнение метрического пространства. Теоремы в полных метрических пространствах.
4. Определение компактного пространства. Теорема Хаусдорфа. Эквивалентное определение компактного пространства.
5. Относительная компактность в пространствах непрерывных функций $C[0,1]$, l_p и $L_p[0,1]$. Свойства непрерывных отображений на компактных пространствах.
6. Аксиомы линейного пространства и простейшие следствия. Примеры линейных пространств.
7. Размерность. Базис конечномерного пространства. Линейное многообразие. Линейные оболочки.
8. Изоморфизм линейных пространств. Фактор-пространства. Прямые суммы. Лемма Цорна. Существование алгебраического базиса.
9. Определение нормированного пространства. Примеры линейных нормированных пространств.
10. Открытые и замкнутые множества. Точки прикосновения и предельные точки.
11. Эквивалентные нормы. Конечномерные нормированные пространства. Расстояние от точки до подпространства. Приближение элементами подпространства.
12. Лемма Рисса. Об одном применении леммы Рисса. Компактность и конечномерность.
13. Пополнение нормированного пространства. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Принцип вложенных шаров. Множеств первой и второй категории.
14. Фактор-пространства нормированных пространств. Банахово пространство с базисом.
15. Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Определение гильбертова пространства.
16. Ортогональность в гильбертовом пространстве. Пополнение предгильбертова пространства.
17. Ортогональные ряды. Ряд Фурье по ортонормированной системе и неравенство Бесселя.
18. Ряд Фурье по полной ортонормированной системе и равенство Парсеваля-Стеклова.
19. Процесс ортогонализации Шмидта и существование ортонормированного базиса.
20. Изоморфизм гильбертовых пространств. О несепарабельных гильбертовых пространствах.
21. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества. Ортогональные разложения. Ортогональные суммы бесконечного числа подпространств.

22. Определение линейного оператора. Определение обратного оператора. Непрерывные линейные операторы. Ограниченные линейные операторы.
23. Непрерывность и ограниченность.
24. Норма оператора. Продолжение оператора по непрерывности.
25. Пространство линейных операторов. Равномерная и поточечная сходимости линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности.
26. Теорема о непрерывности обратного оператора.
27. Теорема Банаха об обратном операторе об обратном операторе. Открытое отображение.
28. Замкнутые операторы.
29. Линейные функционалы, гиперпространства, полунормы, выпуклые множества.
30. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейных функционалов.
31. Линейные непрерывные функционалы в нормированных пространствах.
32. Линейные ограниченные функционалы в конкретных пространствах.

Пример экзаменационного билета:

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Кафедра алгебры и геометрии

Экзаменационный билет № 1

Учебная дисциплина Функциональный анализ

Для направления подготовки 01.03.01 Математика

Направленность (профиль)

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях

1. Понятие полного метрического пространства. Примеры неполных пространств. Пополнение метрического пространства. Теоремы в полных метрических пространствах.
2. Пополнение нормированного пространства. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Принцип вложенных шаров. Множеств первой и второй категории.
3. Теорема Банаха об обратном операторе об обратном операторе. Открытое отображение.

Принято на заседании кафедры «_____» _____ 20__ г. Протокол № _____
И.о. зав.кафедрой _____ (ФИО)

Все материалы для проведения промежуточного контроля хранятся на кафедре.

Приложение Б
(обязательное)
Карта учебно-методического обеспечения
учебной дисциплины (модуля)
«Функциональный анализ»

Таблица 1 – Основная литература*

<i>Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол.стр.)</i>	<i>Кол.экз. в библ. НовГУ</i>	<i>Наличие в ЭБС</i>
Печатные источники		
1 Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - М.: Наука, 1989. – 623 с.	1	
2 Канторович Л. В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г. П. Акилов. - СПб: БХВ – Петербург: Невские диалоги, 2004. – 813 с..	1	
3 Треногин В.А. Функциональный анализ/ В.А. Треногин. - М.: Наука, 1980. - 496 с.	2	
Электронные ресурсы		
Глазырина, П.Ю. Функциональный анализ : типовые задачи : электронное учебное пособие / П.Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2016. – 214 с. – URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/40653/1/978-5-7996-1771-4_2016.pdf		

Таблица 2 – Дополнительная литература

<i>Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол.стр.)</i>	<i>Кол.экз. в библ. НовГУ</i>	<i>Наличие в ЭБС</i>
Печатные источники		
1 Петров В.А. Элементы функционального анализа в задачах / В.А. Петров, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев. - М.: Просвещение, 1978. – 128 с.	1	
Электронные ресурсы		
1 Коновалова, Е. И. Функциональный анализ : электронное учебное пособие/ Е. И. Коновалова; Министерство образования и науки РФ, Самарский государственный. Аэрокосмический университет имени С. П. Королева - Самара, 2011. – URL: http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Funkcionalnyi-analiz-Elektronnyi-resurs-elektron-ucheb-posobie-55225/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B0%20%D0%95.%D0%98.%20%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%B%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9%20%D0%B0%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7.pdf		

Таблица Б.3 – Информационное обеспечение модуля

<i>Наименование ресурса</i>	<i>Договор</i>	<i>Срок договора</i>
Электронная библиотека НовГУ		
Электронный каталог научной библиотеки http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный
База данных «Аналитика» (картотека статей) http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
Научная библиотека
Сектор учета

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
ЭБС «Электронная библиотечная система Новгородского государственного университета» (ЭБС НовГУ). Универсальный ресурс. Внутривузовские издания НовГУ.	Договор № 230 от 30.12.2022 с ООО «КДУ»	бессрочный
ЭБС «Лань» Единая профессиональная база данных для классических вузов – Издательство Лань «ЭБС» ЭБС ЛАНЬ	Договор № 34/ЕП(Т)23 от 22.12.2023 с ООО «Издательство ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Коллекции: «Физика – Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана», «Информатика - Издательство ДМК Пресс», «Журналистика и медиа-бизнес - Издательство Аспект Пресс»	Договор № 33/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «ЭБС ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Универсальный ресурс	Договор № СЭБ НВ-283 с ООО «ЭБС ЛАНЬ» от 09.11.2020	с 09.11.2020 по 31.12.2023 Договор пролонгирован до 31.12.2024 (основание: п.6.1.)
«ЭБС ЮРАЙТ www.biblio-online.ru » Универсальный ресурс.	Договор № 35/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
«Национальная электронная библиотека» Универсальный ресурс.	Договор №101/НЭБ/2338П от 14.03.2022 с ФБГУ «Российская Государственная библиотека»	с 14.03.2022 по 13.03.2027
ЭБС «IPRsmart» Универсальный ресурс.	Лицензионный договор № 11040/23П/31/ЕП(У)23 от 22.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «IPRsmart» Электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов «РУССКИЙ ЯЗЫК КАК ИНОСТРАННЫЙ» (РКИ).	Договор № 436/ЕП(У)23-ВБ от 15.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.01.2025
ЭБС Polpred.com. Обзор СМИ. Электронные статьи 600 деловых газет, журналов, информагентств за 20 лет.	Соглашение с ООО «ПОЛПРЕД Справочники». Тестовый доступ.	с 01.01.2023
Профессиональные базы данных		
Президентская библиотека им. Б. Н. Ельцина https://www.prilib.ru/	в открытом доступе	-
База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU https://elibrary.ru/	в открытом доступе	-
База данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/	в открытом доступе	-
База данных электронно-библиотечной системы «Национальная электронная библиотека» https://нэб.рф	в открытом доступе	-
Информационные справочные системы		

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
Университетская информационная система «РОССИЯ» https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/uis-rossiya	в открытом доступе	-
Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование» https://openedu.ru	в открытом доступе	-
Портал открытых данных Российской Федерации https://data.gov.ru	в открытом доступе	-
Справочно-правовая система КонсультантПлюс (КонсультантПлюс студенту и преподавателю) www.consultant.ru/edu/	в открытом доступе	-

Проверено НБ НовГУ

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
Научная библиотека
Сектор учета

И.о. зав. кафедрой АГ

Е.М. Кондрушенко
подпись

Е.М. Кондрушенко

И.О. Фамилия

« 05 » 06 20 24 г.

[illegible]