

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (начало)

Основные понятия

Определение. **Линейным** относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется уравнение вида $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$, где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – числа.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ – коэффициенты при неизвестных, число b называется *правой частью* или *свободным членом* уравнения.

Примеры.

1) $3x_1 - x_2 = 6$ – линейное уравнение относительно переменных x_1, x_2 ;

2) $9x + 3y - z + 6t = 7$ – линейное уравнение относительно переменных x, y, z, t .

Два следующих уравнения линейными не являются:

$$3) x_1 \cdot x_2 + 2 x_3 = 9;$$
$$4) x_1^2 + 2x_2 - x_3 = -1.$$

Определение. Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ называется **тривиальным**. Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, называется **противоречивым**.

Определение. Решением линейного уравнения называется упорядоченный набор чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, таких, что при подстановке их в уравнение вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ получается тождество (верное равенство).

Примеры.

1) Решением уравнения $3x_1 - x_2 = 6$ являются наборы чисел $(2;0)$, $(1;-3)$, $(3;3)$, так как $3 \cdot 2 - 0 = 6$, $3 \cdot 1 - (-3) = 6$, $3 \cdot 3 - 3 = 6$.

Наборы чисел являются упорядоченными, то есть, если $(2;0)$ – решение, то $(0;2)$ – нет: $3 \cdot 0 - 2 \neq 6$.

2) Решением уравнения $9x + 3y - z + 6t = 7$ являются, например, наборы чисел $(0; 3; 2; 0)$, $(1; -3; -1; 2)$. Проверьте самостоятельно!

Замечание. Любой набор чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ является решением тривиального уравнения. Противоречивое уравнение не имеет решений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Определение. Решением системы линейных уравнений (СЛУ) с n неизвестными называется такой упорядоченный набор чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Определение. Если система линейных уравнений имеет решения, то она называется **совместной** (или совместимой), если решений нет, то СЛУ называется **несовместной**.

Определение. Если совместная система линейных уравнений имеет только одно решение, то она называется **определённой**; если более одного решения (тогда решений будет бесконечное множество), то СЛУ называется **неопределённой**.

Например, неопределённой является система

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 5y + z = 1. \end{cases}$$

Все решения этой СЛУ можно записать в виде $(7a - 2, 1 - 3a, a)$, где a – любое число. Подставляя вместо a различные значения, будем получать различные решения системы.

Если $a = 0$, то решением будет набор чисел $(-2; 1; 0)$, если $a = 1$, то $(5; -2; 1)$, если $a = \frac{1}{3}$, то $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ и т.д.