

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО  
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

---

# **КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

*Сборник лабораторных работ*

Великий Новгород  
2004

УДК 53(076,5)

Печатается по решению  
РИС НовГУ

Р е ц е н з е н т

Кандидат физико-математических наук, доцент **А. И. Георгиев**

**Колебания** и волны: Сборник лабораторных работ по общему курсу физики/ Сост.: З.С. Бондарева, В.Г. Иванов, Г.Е. Коровина, В.Д. Лебедева, Н.А. Петрова, В.Е. Удальцов; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2004. – 63 с.

В сборнике приведены описания шести лабораторных работ по общему курсу физики, включающему разделы Колебания и волны. В каждом описании рассматриваются основные понятия и закономерности, методика, порядок выполнения работы и контрольные вопросы.

Сборник может быть рекомендован студентам НовГУ всех специальностей дневной и заочной формы обучения, изучающих общий курс физики.

УДК 53(076,5)

©Новгородский государственный  
университет, 2004©З. С. Бондарева, В. Г. Иванов,  
Г. Е. Коровина, В. Д. Лебедева,  
Н. А. Петрова, В. Е. Удальцов,  
составление, 2004

**СОДЕРЖАНИЕ**

Предисловие.....	4
1. Лабораторная работа. Гармонические колебания.....	5
2. Лабораторная работа. Универсальный маятник.....	16
3. Лабораторная работа. Затухающие гармонические колебания.....	24
4. Лабораторная работа. Измерение скорости звука в воздухе методом стоячих волн.....	34
5. Лабораторная работа. Определение скорости звука в твердых телах Методом Кундта.....	45
6. Лабораторная работа. Поперечные колебания струны.....	49
Библиография.....	57

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Колебательные процессы часто встречаются в природе и широко используются в технике, поэтому важно изучить закономерности, которым они подчиняются, проводя экспериментальные исследования.

В данный сборник включены описания лабораторных работ по колебаниям и волнам, выполняемых студентами НовГУ по общему курсу физики.

Для наиболее осознанного усвоения физических закономерностей приводятся теоретические сведения и вопросы для самоподготовки.

Все формулы, используемые в данном сборнике, выводятся и записываются в Международной системе единиц (СИ).

Сборник может быть рекомендован студентам НовГУ всех специальностей дневной и заочной формы обучения, изучающих общий курс физики.

## 1 Лабораторная работа. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Цель работы:** в работе необходимо определить коэффициент жесткости пружины, частоту и период собственных колебаний груза известной массы, зависимость периода колебаний от массы и коэффициента жесткости пружины, коэффициент жесткости при последовательном и параллельном соединении пружин.

### 1.1 Основные понятия и закономерности

Колебаниями называют процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Различают свободные колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными колебаниями называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия. Например, колебания грузика на пружине, колебания шарика, подвешенного на нити (маятник), колебания напряжения и тока в колебательном контуре.

Вынужденными называются колебания, происходящие в системе, которая подвергается воздействию внешней периодической силы. Например, при прохождении света через вещество на электроны действует со стороны электрического поля световой волны периодическая сила, в результате чего они совершают вынужденные колебания.

Автоколебания отличаются от вынужденных колебаний тем, что действие внешней силы осуществляется в определенные моменты времени, которые задаются самой колеблющейся системой. Например, в часах маятник получает толчки в момент прохождения его через среднее положение.

#### 1.1.1 Собственные колебания

В качестве примера колебательной системы рассмотрим грузик, подвешенный на абсолютно упругой пружине (рисунок 1). Очевидно, что в состоянии равновесия сила тяжести  $\vec{F}_m$  компенсируется статической упругой силой  $\vec{F}_{cm}$ , т. е.  $\vec{F}_m + \vec{F}_{cm} = 0$ .

Если вывести грузик из положения равновесия, например, оттянуть вниз и удерживать его в этом положении, то внешняя сила будет уравниваться избыточной упругой силой  $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ , где  $\vec{x}$  – смещение грузика от положения равновесия;  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

После прекращения действия внешней силы избыточная упругая сила вызывает движение грузика к положению равновесия, уменьшаясь при этом до нуля. Если в начальный момент движения вверх скорость грузика была равна нулю, то в момент прохождения им положения равновесия она достигнет максимального значения, и грузик по инерции будет продолжать движение вверх. При этом начнет возрастать избыточная упругая сила, обусловленная деформацией сжатия, а скорость движения грузика начинает уменьшаться. При достижении грузиком максимального отклонения от положения равновесия его скорость станет равной нулю, а избыточная упругая сила достигнет своего максимального значения, модуль которого равен модулю внешней силы, вызвавшей смещение грузика из положения равновесия. В дальнейшем характер движения повторится. Таким образом, в результате действия силы, пропорциональной смещению тела от положения равновесия, в системе возникнут собственные колебания (осцилляции).

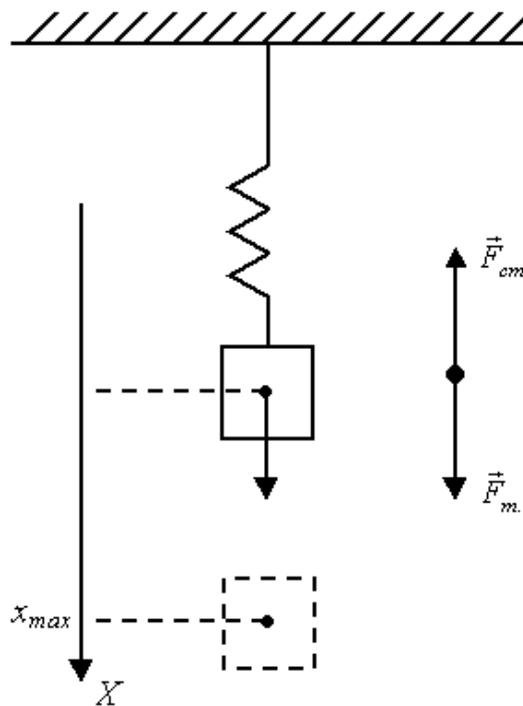


Рисунок 1

Определим уравнение, описывающее эти колебания. Ось  $X$  направим вдоль направления смещения грузика. Согласно второму закону Ньютона, результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на грузик, сообщает ему ускорение:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1)$$

Так как проекция ускорения  $\vec{a}_x$  и силы  $\vec{F}_x$  на ось  $x$  равны соответственно:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_x = -k \cdot x,$$

то уравнение (1) в проекциях будет иметь вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x. \quad (2)$$

Таким образом, уравнение движения колебательной системы  $x = x(t)$  представляет собой функцию, вторая производная по времени от которой пропорциональна самой функции, взятой с противоположным знаком. Таким условиям удовлетворяют тригонометрические функции синус и косинус, аргументы которых  $\varphi(t)$  линейно изменяются со временем.

Пусть, например, смещение  $x(t)$  описывается уравнением:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3)$$

тогда, вычисляя производные, получим:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5)$$

т. е.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (2), получим, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7)$$

Величину  $A$  называют амплитудой колебаний. Так как функции синус и косинус изменяются в пределах от  $-1$  до  $+1$ , то  $x(t)$  изменяется в пределах от  $-A$  до  $+A$ .

Величина

$$\varphi_t = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (8)$$

называется фазой колебания.

$\varphi_0$  – начальная фаза колебаний. При заданной амплитуде фаза характеризует состояние колебательной системы в момент времени  $t$ , а начальная фаза – в момент времени  $t = 0$ .

Промежуток времени  $T$ , в течение которого совершается одно полное колебание, называется периодом колебаний. Величина, обратная периоду, определяющая число колебаний за единицу времени, называется частотой колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Если  $T$  – период колебаний, то в моменты времени  $t$  и  $t + T$  состояния системы совпадают, т. е.

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A \cos[\omega_0(t + T) + \varphi_0]. \quad (9)$$

Так как период косинуса равен  $2\pi$ , т. е.  $\cos \alpha = \cos(2\pi + \alpha)$ ; то  $\omega_0 T = 2\pi$ ,

$$\text{или: } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (10)$$

Из (8) следует, что  $\omega_0$  характеризует быстроту изменения фазы и называется круговой или циклической частотой колебаний. Так как  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , то период колебаний грузика на пружине определяется согласно (10) выражением

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (11)$$

При колебаниях, когда возвращающая сила пропорциональна величине смещения, период и частота колебаний зависят только от свойств колеблющейся системы (например, массы тела и жесткости пружины) и не зависят от амплитуды (размаха) колебаний.

Амплитуда колебаний определяется не свойствами самой системы, а начальными условиями ее движения, т. е. начальным “толчком”, выводящим систему из положения равновесия.

Потенциальная энергия колеблющегося тела равна:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}. \quad (12)$$

Кинетическая энергия:

$$W_k = \frac{m\mathcal{V}^2}{2}. \quad (13)$$

Так как скорость  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_x = \frac{dx}{dt}$ , то согласно (4) и (7) выражение (13) можно записать в виде:

$$W_k = \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}. \quad (14)$$

В положениях наибольшего смещения тела от положения равновесия, его потенциальная энергия максимальна, а при прохождении им положения равновесия максимальна кинетическая энергия. В промежуточном положении полная энергия равна:

$$W = W_k + W_p = \frac{kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (15)$$

Таким образом, полная энергия собственных колебаний постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

На рисунке 2 представлены графики зависимости от времени смещения, скорости, ускорения, потенциальной и кинетической энергии колеблющегося тела, соответствующие начальной фазе колебаний  $\varphi_0 = 0$ .

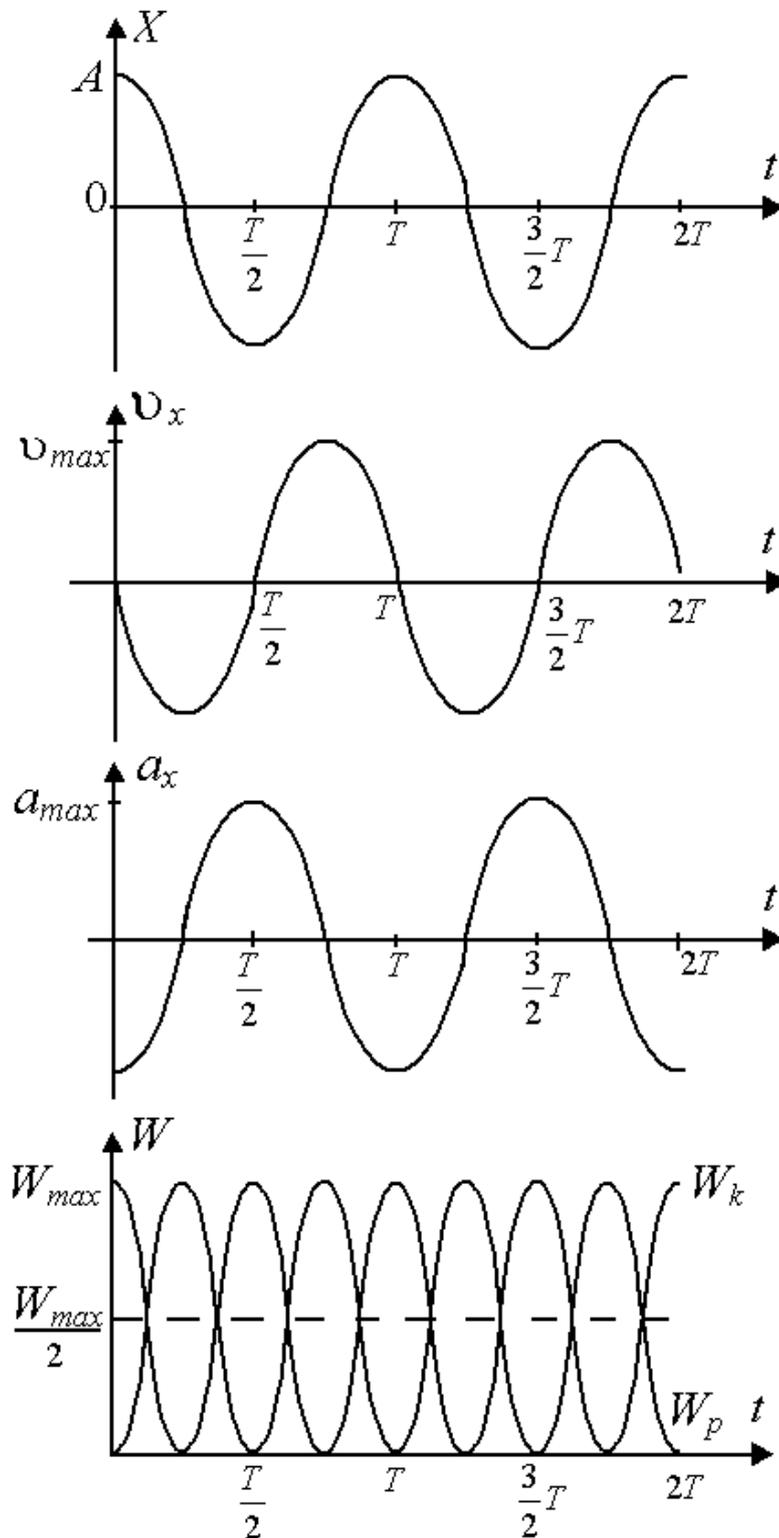


Рисунок 2

### 1.1.2 Последовательное и параллельное соединение пружин

Последовательное соединение “ $n$ ” пружин представлено на рисунке 3. Если к этой системе подвесить груз  $m$ , то удлинения пружин будут равны соответственно  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . На основании закона Гука запишем:

$$F_1 = k_1 \cdot x_1; F_2 = k_2 \cdot x_2; \dots F_n = k_n \cdot x_n$$

Для системы пружин:

$$F_c = k_c \cdot x_c.$$

Но

$$F_c = F_1 = F_2 = \dots = F_n = mg$$

(система находится в равновесии),

Следовательно:

$$x_1 = \frac{mg}{k_1}, x_2 = \frac{mg}{k_2} \dots x_n = \frac{mg}{k_n} \text{ и } x_c = \frac{mg}{k_c};$$

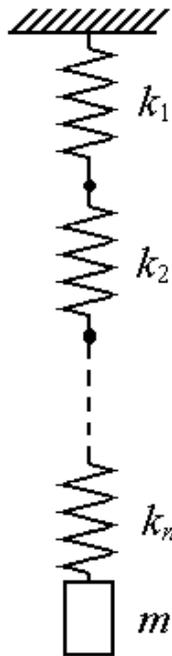


Рисунок 3

Так как  $x_c = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , то имеем:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}. \quad (16)$$

Если имеем “ $n$ ” пружин с одинаковыми коэффициентами жесткости  $k_1$ , то:

$$\frac{1}{k_c} = \frac{n}{k_1}$$

или

$$k_c = \frac{k_1}{n}. \quad (17)$$

Длинную пружину с коэффициентом жесткости  $k_0$  можно рассматривать как систему “ $n$ ” последовательно соединенных одинаковых пружин с коэффициентом жесткости  $k$ ;

Если число витков длинной пружины  $N_0$ , то число витков одной пружины с коэффициентом жесткости  $k$  равно:

$$N = \frac{N_0}{n}$$

Таким образом имеем:  $\frac{1}{k_0} = \frac{n}{k}$ , а  $n = \frac{N_0}{N}$ .

Из этих двух уравнений получаем:

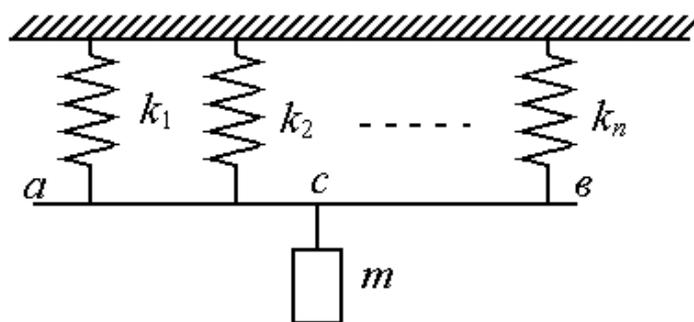
$$\frac{k}{k_0} = \frac{N_0}{N}$$

или

$$k = \frac{N_0 \cdot k_0}{N} \quad (18)$$

– зависимость коэффициента жесткости пружины от числа витков.

Параллельное соединение нескольких пружин представлено на рисунке 4.



Рисунке 4

Пружины имеют одинаковую длину. Стержень  $ab$  невесом. Точка подвеса груза “ $m$ ” подбирается так, чтобы стержень  $ab$  оставался горизонтальным. Тогда удлинения пружин будут одинаковы, т. е.  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_c = x$

Сила тяжести груза  $m$  уравнивается силами упругости пружин, т. е.

$$mg = F_1 + F_2 + \dots + F_n,$$

так как

$$F_1 = k_1 \cdot x_1, F_2 = k_2 \cdot x_2 \dots F_n = k_n \cdot x_n,$$

то

$$mg = k_1 x + k_2 x + \dots + k_n x.$$

Для системы пружин  $mg = k_c \cdot x$ .

Приравняв правые части последних двух уравнений, получим:

$$k_c = k_1 + k_2 + \dots + k_n. \quad (19)$$

## 1.2 Порядок выполнения работы

1.2.1 Определение коэффициента жесткости пружины статическим методом

1. Подвешивая к пружине грузы различной массы, измеряйте статическое удлинение пружины –  $x$ . Данные опыта занесите в таблицу 1.

Таблица 1

Измеренная величина	Номер измерения					Результат измерения и погрешность	
	1	2	3	4	5	$k \pm \Delta k$ Н/м	$\varepsilon, \%$
$m, \text{ г}$							
$F = mg, \text{ Н}$							
$x, \text{ мм}$ 1 пружина							
$x, \text{ мм}$ 2 пружина							

2. Постройте график зависимости удлинения пружины от силы, т. е.  $x = f(F)$ .

3. По угловому коэффициенту полученной прямой определите коэффициент жесткости. Оцените погрешность измерений.

Опыт проделайте для двух пружин.

### 1.2.2 Исследование зависимости периода колебаний от массы груза и определение коэффициента жесткости пружины динамическим способом

1. Подвесьте к пружине груз и приведите его в колебательное движение. Измерьте время  $n = 10 \div 30$  полных колебаний и вычислите период колебаний

$$T = \frac{\langle t \rangle}{n}.$$

2. Повторите опыт с другими грузами. Данные опыта занесите в таблицу 2.

Таблица 2

Измеренная величина		Номер измерения					Результат измерения и погрешность	
		1	2	3	4	5	$k \pm \Delta k$ , Н/м	$\varepsilon$ , %
I пружина	$m$ , Г							
	$t_c$ 1							
	2							
	3							
	$\langle t \rangle$ , с							
	$T$ , с							
II пружина	$m$ , Г							
	$t_c$ 1							
	2							
	3							
	$\langle t \rangle$ , с							
	$T$ , с							
	$T^2$ , с							

3. Постройте график зависимости  $T^2 = f(m)$ . По угловому коэффициенту полученной прямой и уравнению 11 определите коэффициент жесткости пружины. Опыт проделайте с двумя пружинами. Оцените погрешность измерения  $k$ .

### 1.2.3 Исследование зависимости периода колебания от коэффициента жесткости пружины

1. Выберите одну из пружин, коэффициент жесткости которой уже определен –  $k_0$ . Сосчитайте число витков этой пружины  $N_0$ . Если число витков пружины уменьшить до  $N$ , то коэффициент жесткости укороченной пружины будет равен:

$$k = \frac{N_0}{N} \cdot k_0$$

т. е.

$$k \sim \frac{1}{N}.$$

Таким образом, меняя число витков пружины, можно изменять ее коэффициент жесткости.

2. В этом опыте масса груза остается величиной постоянной. Подберите такую массу груза, чтобы при минимальном числе витков пружины  $N = \frac{1}{5} N_0 \div \frac{1}{4} N_0$  период можно было измерить.

3. Изменяя число витков пружины так, чтобы получилось не меньше 5 опытов, определите время  $n = 10 \div 30$  полных колебаний; по формуле  $T = \frac{\langle t \rangle}{n}$  определите период колебания. Данные опыта занесите в таблицу 3.

Таблица 3

Измеренная величина	Номер измерения				
	1	2	3	4	5
Масса груза $m$ , Г					
$N$ Число витков					
$k = \frac{N_0}{N} \cdot k_0$ Н/м					
$t$ , с	1				
	2				
	3				
$\langle t \rangle$ , с					
$T$ , с					
$T^2$					

По данным опыта постройте график зависимости  $T^2 = f(k)$ .

1.2.4. Определение коэффициента жесткости системы пружин при последовательном соединении.

1. Статическим методом не менее трех раз определите коэффициент жесткости системы пружин  $k_c$  (рисунок 5). Данные опыта занесите в таблицу 4. Полученное экспериментально значение  $k_c$  сравните с теоретическим значением, которое получится из формулы (16) для двух пружин.

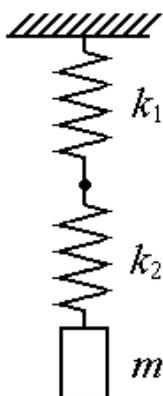


Рисунок 5

Таблица 4

№ изм.	$m$ , г	$F = mg$ , Н	$x$ , см	$k_c$ , Н/м	$\langle k_c \rangle$ , Н/м	$\Delta k_c$	$\langle \Delta k_c \rangle$	$\varepsilon$ , %
1								
2								
3								

Оцените в % разницу между теоретическим и экспериментальными значениями коэффициента жесткости системы пружин.

Проделайте опыт с тремя пружинами.

1.2.5 Определение коэффициента жесткости системы пружин при параллельном соединении.

1. Возьмите две пружины одинаковой длины и подвесьте их как показано на рисунке 6. **ав** – невесомый стержень. Точка С на стержне должна быть подобрана так, чтобы при подвешивании груза “ $m$ ” стержень **ав** оставался горизонтальным. Для этого должно выполняться условие:

$$k_1 \cdot AC = k_2 \cdot CB \quad (20)$$

(условие равновесия системы).

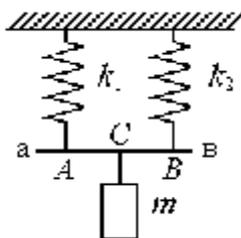


Рисунок 6

Коэффициент жесткости системы определите аналогично пункту 4 (для последовательного соединения).

Сравните полученное экспериментально значение  $k_c$  с теоретическим значением – формула 19 для двух пружин.

Оцените в % разницу между экспериментальным и теоретическим значениями коэффициента жесткости системы пружин.

Проделайте опыт с тремя пружинами.

### 1.3 Контрольные вопросы

1. Гармонические колебания. Получите уравнение гармонических колебаний.

2. Закон Гука. Физический смысл коэффициента жесткости пружины.

3. Выведите формулу частоты и периода свободных колебаний пружинного маятника.

4. Смещение, скорость и ускорение при гармоническом колебании. Их графики.

5. Энергия гармонического колебания.

6. Выведите зависимость коэффициента жесткости пружины от числа витков (формула 18).

7. Выведите формулу для определения коэффициента жесткости при последовательном соединении пружин (формула 16).

8. Выведите формулу для определения коэффициента жесткости при параллельном соединении пружин (формула 19).

9. Докажите условие 20.

### 1.4 Техника безопасности

1. В процессе выполнения работы следите за тем, чтобы пружины и грузы были прочно закреплены на подставке.

## 2 Лабораторная работа. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

**Цель работы:** определение ускорения свободного падения при помощи математического и физического маятников.

### 2.1 Основные понятия и закономерности

#### 2.1.1 Основные закономерности

*Физическим маятником* называется реальное твердое тело, закрепленное на горизонтальной, неподвижной оси вращения, не проходящей через центр масс, и способное совершать колебания под действием силы тяжести. На рисунке 7 точка С – центр тяжести тела, ось вращения проходит через точку О. Если маятник отклонить от положения равновесия на некоторый угол  $\varphi$  и отпустить, то он будет колебаться около положения равновесия.

Для описания движения маятника используем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (21)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через точку О;

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \text{угловое ускорение};$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} - \text{вращающий момент.}$$

$$M = -amg \cdot \sin \varphi$$

$$|\vec{r}| = a - \text{расстояние от оси вращения до центра тяжести тела. Знак “-”}$$

обусловлен тем, что момент силы тяжести направлен так, что он стремится вернуть тело в положение равновесия.

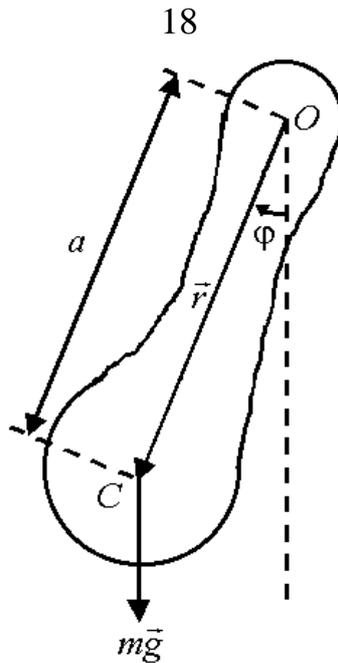


Рисунок 7

На рисунке 7 момент силы тяжести направлен перпендикулярно плоскости чертежа, “к нам”.

Т. е. мы может записать уравнение (21) в следующем виде:

$$I \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \cdot \sin \varphi.$$

Или

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I} \cdot \sin \varphi = 0.$$

Если угол  $\varphi$  невелик, то  $\sin \varphi \cong \varphi$  и уравнение колебания примет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I} \cdot \varphi = 0. \tag{22}$$

Обозначив

$$\frac{mga}{I} = \omega^2 \tag{23}$$

получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \cdot \varphi = 0. \tag{24}$$

Уравнение (22) и (24) – дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее гармоническое колебание. (Заметим, что колебания маятника

будут гармоническими, если угол  $\varphi$  мал, так как только в этом случае возвращающий момент пропорционален угловому смещению).

Решением уравнений (22) и (24) является:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (25)$$

где  $\varphi_0$  – максимальное отклонение от вертикали (амплитуда колебания);

$\omega$  – циклическая частота;

$\alpha_0$  – начальная фаза.

Так как период колебания  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , то с учетом (23):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot a}}. \quad (26)$$

Если считать, что в момент времени  $t = 0, \varphi = \varphi_0$ , то  $\alpha_0 = 0$  и уравнение переписывается в более простом виде:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \omega t. \quad (27)$$

В том, что (27) является решением уравнения (24), можно убедиться, подставив в (24)  $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \omega t$  и  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi_0 \cdot \cos \omega t$ .

Получим тождество:

$$-\omega^2 \varphi_0 \cdot \cos \omega t + \omega^2 \varphi_0 \cos \omega t = 0.$$

Вернемся к формуле периода колебания физического маятника – формула (26). Пусть физический маятник представляет собой стержень длиной  $l$  и массой  $m$  (рисунок 8).

Момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через точку  $O$ , можно найти по теореме Штейнера:

$$I = I_c + m \cdot a^2,$$

где  $I_c = \frac{1}{12} m \cdot l^2$  – момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через центр тяжести (точка  $C$  на рисунке 8).

Подставив это выражение в формулу (26) получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + 12a^2}{12a \cdot g}}. \quad (28)$$

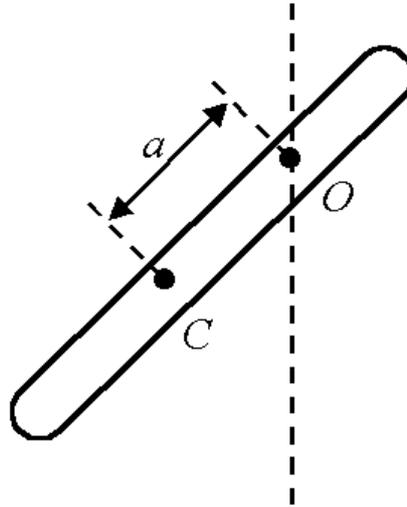


Рисунок 8

Период колебания зависит от расстояния между центром тяжести и осью вращения. Взяв первую производную  $\frac{dT}{da}$  и приравняв ее нулю, получим уравнение:  $12a^2 = l^2$ , из которого найдем:

$$a_{min} = \frac{l}{\sqrt{12}}$$

расстояние от оси вращения до центра тяжести, при котором период колебания имеет минимальное значение. Подставив значение  $a_{min}$  в формулу (28) получим:

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{3}g}}$$

откуда

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\sqrt{3}T_{min}^2} \quad (29)$$

*Математическим маятником* называется материальная точка (тело малых размеров), подвешенная на длинной, упругой, невесомой нити.

Если масса материальной точки  $m$ , а длина нити  $l$ , то момент инерции равен

$$I = m \cdot l^2 \quad \text{и} \quad a \equiv l$$

Используя формулу (26), получим выражение для периода колебания математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (30)$$

Из формулы (30) следует, что  $T^2 = f(l)$ , причем эта зависимость носит линейный характер.

Период гармонических колебаний не зависит от амплитуды, но колебания физического и математического маятников не являются строго гармоническими. Общая формула для периода колебания математического маятника записывается в виде бесконечного ряда:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right) \quad (31)$$

где  $\varphi_0$  – максимальное угловое смещение. При  $\varphi_0 = 15^\circ$  формула (30) дает погрешность 0,5%, при  $\varphi_0 = 30^\circ$  – меньше 1%.

Аналогичную поправку при больших угловых смещениях следует ввести и в формулу периода колебания физического маятника.

### 2.1.2 Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника (метод Бесселя)

Во всяком физическом маятнике можно найти две такие точки, расположенные по разные стороны от центра масс, что при подвешивании маятника за ту и другую из них период колебания остается одним и тем же.

В настоящей работе используется обратный маятник, состоящий из однородного стержня, двух призм  $B_1$  и  $B_2$ , закрепленных жестко и двух чечевиц  $D_1$  и  $D_2$  (рисунок 9). Одна из них ( $D_1$ ) расположена между призмами и закреплена жестко, другая ( $D_2$ ) находится на конце стержня и может перемещаться по стержню. Расстояние между призмами постоянно и равно  $L = a_1 + a_2$  (рисунок 9). Точка  $C$  – центр тяжести маятника. Допустим, мы нашли такое положение чечевицы  $D_2$ , при котором периоды колебания маятника при подвешивании на призмы  $B_1$  и  $B_2$  оказались равными, т.е.  $T_1 = T_2$ .

Но

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m \cdot g \cdot a_1}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{m \cdot g \cdot a_2}},$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – расстояние до центра масс от призм  $B_1$  и  $B_2$  соответственно.

$I_1$  и  $I_2$  – моменты инерции маятника при подвешивании его на призмы  $B_1$  и  $B_2$ .

Согласно теореме Штейнера:

$$I_1 = I_0 + m \cdot a_1^2, \quad I_2 = I_0 + m \cdot a_2^2,$$

где  $I_0$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Подставим выражение  $I_1$  и  $I_2$  в формулы для периодов колебания  $T_1$  и  $T_2$ :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a_1^2}{m \cdot g \cdot a_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m \cdot a_2^2}{m \cdot g \cdot a_2}}.$$

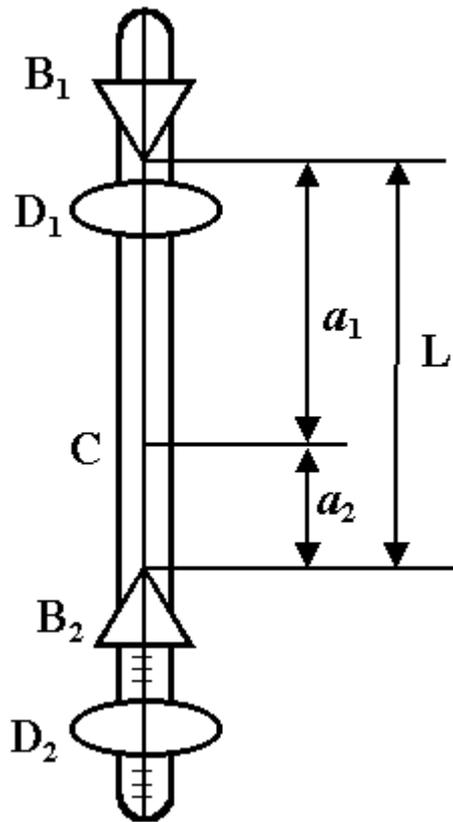


Рисунок 9

Последние два уравнения возведем в квадрат и приведем к виду:

$$T_1^2 \cdot m \cdot g \cdot a_1 = 4\pi^2 (I_0 + m \cdot a_1^2),$$

$$T_2^2 \cdot m \cdot g \cdot a_2 = 4\pi^2 (I_0 + m \cdot a_2^2).$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$m \cdot g (T_1^2 \cdot a_1 - T_2^2 \cdot a_2) = 4\pi^2 m (a_1^2 - a_2^2).$$

Откуда

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 \cdot T_1^2 - a_2 \cdot T_2^2}.$$

Если  $T_1 = T_2 = T_0$ , то последнее выражение принимает вид:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{L}{T_0^2}. \quad (32)$$

## 2.2 Порядок выполнения работы

### 2.2.1 Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника

1. Установите длину математического маятника  $l_1 = 10 \div 30$  см, определите время  $t$  десяти полных колебаний и период колебания  $T = \frac{t}{n}$  ( $n$  – число колебаний). Измерение времени произвести не менее 3-х раз.

2. Повторите измерения, увеличивая длину маятника до максимальной через  $5 \div 10$  см. Данные опыта занесите в таблицу (необходимо сделать  $8 \div 10$  измерений).

Таблица 5

Измеренная величина	Номер измерения							
	1	2	3	4	5	6	...	N
$l, \text{ м}$								
1. $t, \text{ с}$								
2. $t, \text{ с}$								
3. $t, \text{ с}$								
$\langle l \rangle, \text{ с}$								
$\langle T \rangle, \text{ с}$								
$\langle T^2 \rangle, \text{ с}^2$								

3. Постройте график зависимости  $T^2 = f(l)$ . Эта зависимость описывается формулой:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l.$$

4. По угловому коэффициенту полученной прямой найдите ускорение свободного падения  $g$ .

5. Оцените абсолютную  $\Delta g$  и относительную  $\varepsilon$  погрешность  $g$ .

6. Сравните полученное значение ускорения свободного падения с табличным  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Для этого рассчитайте величину

$$\gamma = \frac{|g - g_0|}{g_0} \cdot 100 \%$$

### 2.2.2 Определение ускорения свободного падения при помощи физического маятника

1. Освободите стержень физического маятника от обеих чечевиц и одной призмы. Определите положение центра тяжести маятника.

2. Определите период колебания при различных положениях оси вращения по отношению к центру масс (расстояние “ $a$ ” изменяйте через 2 см, перемещая призму). Результаты измерений занесите в таблицу:

Таблица 6

Измеренная величина	Номер измерения						
	1	2	3	4	5	...	N
$a$ , см							
1. $t$ , с							
2. $t$ , с							
3. $t$ , с							
$\langle t \rangle$ , с							
$\langle T \rangle$ , с							

3. По данным опыта постройте график зависимости  $T = f(a)$  и по графику определите минимальное значение периода колебания  $T_{\min}$ .

4. По формуле (29) вычислите ускорение свободного падения  $g$ .

5. Оцените абсолютную  $\Delta g$  и относительную  $\varepsilon$  погрешность  $g$ .

6. Сравните полученное значение ускорения свободного падения с табличным.

### 2.2.2 Определение ускорения свободного падения методом Бесселя

1. На стержне физического маятника закрепите обе призмы  $B_1$  и  $B_2$  и чечевицы  $D_1$  и  $D_2$  так, как показано на рисунке 9.

2. Перемещая чечевицу  $D_2$  между крайними положениями через  $3 \div 4$  см, измерьте период колебания маятника, подвешивая его поочередно на призмах  $B_1$  и  $B_2$ . Данные измерений занесите в таблицу:

Таблица 7

Измеренная величина	Номер измерения						
	1	2	3	4	5	...	N
Положение чечевицы $D_2$ $l$ , см							
$T_1$ , с (на призме $B_1$ )							
$T_2$ , с (на призме $B_2$ )							

3. По данным таблицы постройте графики зависимости:  $T_1 = f(l)$  и  $T_2 = f(l)$ . Определите точку пересечения графиков и положение чечевицы, соответствующее точке пересечения  $l_0$ .

4. Установите подвижную чечевицу  $D_2$  в положение  $l_0$  и определите период колебания маятника на призмах  $B_1$  и  $B_2$ . Убедитесь, что они одинаковы.

5. По формуле (32) вычислите ускорение свободного падения и сравните полученный результат с теоретическим значением.

6. Оцените абсолютную  $\Delta g$  и относительную  $\varepsilon$  погрешность  $g$ .

### 2.3 Контрольные вопросы

1. Физический маятник. Вывести уравнение колебания физического маятника. Частота и период колебания.

2. Что называется математическим маятником? Вывод формулы периода колебания математического маятника.

3. Объяснить методику определения ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

4. Определение ускорения свободного падения при помощи физического маятника. Вывод рабочей формулы.

5. Метод Бесселя. Вывод рабочей формулы.

## 2.4 Техника безопасности

1. Тщательно закрепляйте чечевицы на стержне физического маятника, используя отвертку или плоскогубцы.
2. При использовании электронного миллисекундомера проверьте заземление корпуса прибора.

## 3 Лабораторная работа. ЗАТУХАЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Цель работы:** Определение характеристик затухающих колебаний крутильного маятника.

### 3.1 Основные понятия и закономерности

Крутильный маятник представляет собой массивное тело (в нашем случае цилиндр), подвешенное на упругой струне, другой конец которого закреплен в неподвижном кронштейне (рисунок 10). При повороте маятника на некоторый угол  $\varphi$  из положения равновесия в струне возникает деформация кручения. Создается момент упругих сил, который пропорционален углу поворота  $\varphi$ .

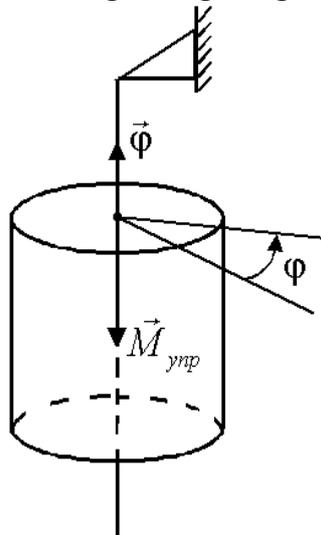


Рисунок 10

$$M_{\text{упр}} = -D \cdot \varphi \quad (33)$$

В уравнении (33)  $D$  – коэффициент упругости деформации кручения, зависящий от материала струны, знак “–” обусловлен тем, что момент упругих сил стремится вернуть систему в положение равновесия.

Если колебательная система находится в вязкой среде, то возникают силы трения, момент которых при малых скоростях пропорционален угловой скорости  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  и направлен в противоположную сторону по отношению к  $\vec{\omega}$ . Т. е.

$$M_{\text{тр}} = -r\omega = -r \frac{d\varphi}{dt}, \quad (34)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды, который зависит от свойств среды, от формы и размеров колеблющегося тела. В результате действия сил трения механическая энергия системы убывает и уменьшается амплитуда, т. е. колебания затухают.

По основному закону динамики вращательного движения

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = J \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (35)$$

где  $\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение тела;

$J$  – момент инерции;

$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i$  – суммарный момент сил, действующих на тело.

В нашем случае действуют два момента сил  $\vec{M}_{\text{тр}}$  и  $\vec{M}_{\text{упр}}$ , и уравнение (35) запишется так:

$$\vec{M}_{\text{упр}} + \vec{M}_{\text{тр}} = J \cdot \vec{\varepsilon} \quad (36)$$

Проведем ось  $x$ , совпадающую с положением равновесия системы, и ось  $z$ , совпадающую с нитью подвеса (рис. 11). Пусть в некоторый момент времени маятник уходит от положения равновесия, при этом угол  $\varphi$  увеличивается, угловая скорость уменьшается, и уравнение (36), записанное в проекции на ось  $z$ , примет вид:

$$M_{\text{упр } z} + M_{\text{тр } z} = J \varepsilon_z. \quad (37)$$

Так как  $\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2}$ ,  $M_{\text{упр } z} = -D \cdot \varphi_z$  и  $M_{\text{тр } z} = -r \cdot \frac{d\varphi_z}{dt}$ , то уравнение (37) запишется в виде:

$$-D \varphi_z - r \frac{d\varphi_z}{dt} = J \cdot \frac{d^2\varphi_z}{dt^2} \quad (38)$$

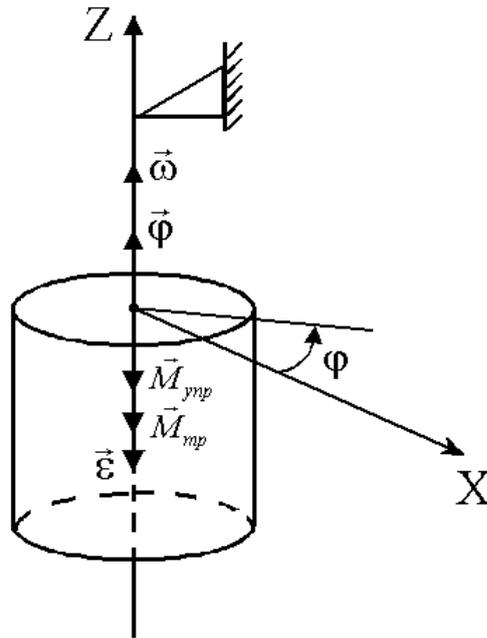


Рисунок 11

Учитывая, что псевдовекторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{\phi}$  параллельны оси z, в уравнении (38) значки “z” можно опустить:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + r \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{r}{J} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{D}{J} \varphi = 0 \quad (39)$$

Уравнение (39) – дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением является функция

$$\varphi(t) = A(t) \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (40)$$

где  $A(t)$  – амплитуда затухающих колебаний;

$\omega$  – циклическая частота;

$\alpha_0$  – начальная фаза.

Для нахождения функции  $A(t)$  и циклической частоты  $\omega$  найдем первую и вторую производные от  $\varphi(t)$  (формула 40):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega t + \alpha_0) - \omega \sin(\omega t + \alpha_0) \cdot A(t)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \cos(\omega t + \alpha_0) - \omega \frac{dA(t)}{dt} \sin(\omega t + \alpha_0) - \omega^2 A(t) \cos(\omega t + \alpha_0) - \frac{dA(t)}{dt} \omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

Подставим  $\frac{d\varphi}{dt}$  и  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$  в уравнение (39) и сгруппируем по  $\cos(\omega t + \alpha_0)$  и  $\sin(\omega t + \alpha_0)$ :

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t + \alpha_0) \left[ \frac{d^2 A(t)}{dt^2} - \omega^2 A(t) + \frac{r}{J} \frac{dA(t)}{dt} + \frac{D}{J} A(t) \right] + \\ & \sin(\omega t + \alpha_0) \left[ -2\omega \frac{dA(t)}{dt} - \frac{r\omega}{J} A(t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Так как одновременно  $\sin(\omega t + \alpha_0)$  и  $\cos(\omega t + \alpha_0)$  не могут быть равны нулю, то равны нулю выражения в квадратных скобках. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A(t)}{dt^2} - \omega^2 A(t) + \frac{r}{J} \frac{dA(t)}{dt} + \frac{D}{J} A(t) = 0 \\ -2\omega \frac{dA(t)}{dt} - \frac{r\omega}{J} A(t) = 0 \end{cases} \quad (41, 42)$$

Решим уравнение (42). После сокращения на  $\omega$  и деления переменных получим:

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = -\frac{r}{2J} dt \quad (43)$$

Проинтегрировав (43), получим:

$$\ln A(t) = -\frac{r}{2J} t + c \quad (44)$$

Примем начальное условие:

$$t = 0 \quad A(t) = \varphi_0; \text{ в таком случае } c = \ln \varphi_0.$$

Пропотенцировав выражение (44), получим  $A(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\frac{r}{2J} t}$ . Обозначим  $\frac{r}{2J} = \beta$ ,

тогда

$$A(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \quad (45)$$

– закон изменения амплитуды колебания со временем.

Величина

$$\beta = \frac{r}{2J} \quad (46)$$

называется коэффициентом затухания колебаний.

Коэффициент затухания  $\beta$  имеет размерность [  $\text{с}^{-1}$  ] и является величиной, обратной времени, за которое амплитуда колебания уменьшается в “  $e$  ” раз.

В уравнение (41) подставим:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{r}{2J} \cdot \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 A(t)}{dt^2} = \frac{r^2}{4J^2} \cdot \varphi_0 \cdot e^{-\beta t}$$

Получим:

$$\left( \frac{r^2}{4J^2} - \omega^2 - \frac{r^2}{2J^2} + \frac{D}{J} \right) \cdot \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} = 0, \quad \text{т. к. } \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \neq 0, \quad \text{то:}$$

$$-\frac{r^2}{4J^2} - \omega^2 + \frac{D}{J} = 0$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J} - \frac{r^2}{4J^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (47)$$

где

$$\frac{D}{J} = \omega_0^2 \quad (48)$$

$\omega_0$  – собственная частота незатухающих колебаний данной системы.

С учетом (46) и (48) уравнение (39) запишется в виде:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (49)$$

Решение этого уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \text{Cos}(\omega t + \alpha_0) \quad (50)$$

Графики зависимости угла от времени и амплитуды от времени представлены на рисунке 12.

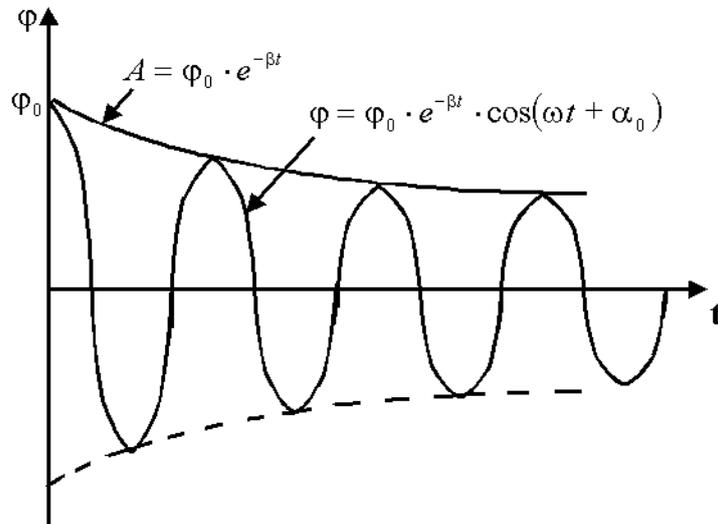


Рисунок 12

### 3.1.1 Характеристики затухающего колебания

1. Декремент затухания  $\delta$  – безразмерная физическая величина, равная отношению амплитуд через время, равное периоду колебания, т. е.

$$\delta = \frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{\varphi_0 \cdot e^{-\beta t}}{\varphi_0 \cdot e^{-(t+T)}} = e^{\beta T} \quad (51)$$

2. Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  – безразмерная физическая величина, равная

$$\lambda = \ln \delta \quad (52)$$

С учетом (51)

$$\lambda = \beta \cdot T \quad (53)$$

3. Коэффициент затухания  $\beta$  – физическая величина, характеризующая быстроту убывания амплитуды, имеющая размерность  $\text{с}^{-1}$ . Это величина, обратная времени  $\tau$ , за которое амплитуда колебания уменьшится в “е” раз, т. е.

$$\beta = \frac{1}{\tau} \quad (54)$$

4. Время релаксации  $\tau$  – время, за которое амплитуда колебания уменьшится в “е” раз. Действительно,

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{\varphi_0 \cdot e^{-\beta t}}{\varphi_0 \cdot e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e$$

5. Число колебаний  $N_e$ , по истечении которых амплитуда колебания уменьшится в “e” раз.

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta \cdot T} = \frac{1}{\lambda} \quad (55)$$

Из (55) следует, что логарифмический декремент затухания – это безразмерная физическая величина, обратная числу колебаний  $N_e$ , в течение которых амплитуда колебания уменьшается в “e” раз.

### 3.1.2 Энергия колебания. Добротность колебательной системы

Полная энергия складывается из кинетической энергии  $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$  и потенциальной энергии  $W_{\text{п}} = \frac{D\varphi^2}{2}$ . Полная энергия  $W$  равна максимальному значению потенциальной энергии, т. е.  $W = \frac{DA^2}{2}$ , где  $A = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t}$  – амплитуда колебания.

Таким образом

$$W = \frac{D\varphi_0^2 e^{-2\beta t}}{2} = W_0 \cdot e^{-2\beta t} \quad (56)$$

Величина  $\frac{D\varphi_0^2}{2} = W_0$  – полная механическая энергия системы в момент времени  $t = 0$ . Полная энергия системы убывает в соответствии с формулой (56), частично переходя во внутреннюю энергию самого маятника и среды, в которой маятник движется. Мощность потерь, т. е. количество энергии, которое переходит во внутреннюю за единицу времени, равна

$$P = \frac{dW}{dt} = -2\beta W_0 \cdot e^{-2\beta t} \quad (57)$$

Характеристикой колебательной системы является добротность, которая характеризует способность колебательной системы сохранять энергию. Добротность  $Q$  равна произведению  $2\pi$  на отношение энергии в некоторый момент времени к убыли энергии за время, равное периоду затухающих колебаний, т. е.

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} \quad (58)$$

Подставляя в (58) формулу полной энергии (56), получим:

$$Q = \frac{2\Pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\Pi}{1 - e^{-2\lambda}} \quad (59)$$

Как видно из последнего выражения, добротность системы является постоянной величиной. Если колебания затухают медленно, т. е.  $N_e \gg 1$ , а  $\lambda = \frac{1}{N_e} \ll 1$ , то  $e^{-2\lambda} \cong 1 - 2\lambda$  и добротность  $Q$  будет равна

$$Q = \frac{1}{2\lambda} \cdot 2\Pi = \frac{\Pi}{\lambda} = \Pi \cdot N_e = \Pi \frac{\tau}{T} \quad (60)$$

Из последнего выражения следует, что добротность равна числу колебаний системы за время  $\Pi \cdot \tau$ . За это время амплитуда колебания уменьшается в  $e^{\Pi} \approx 23$  раза, а энергия в  $e^{2\Pi} \approx 535$  раз.

Следует отметить, что при малом затухании  $T \cong T_0$ ,  $\omega \cong \omega_0$  (формула 47 при условии, что  $\beta \ll \omega_0$ )

### 3.1.3 Аperiodическое движение

Из формулы (47) частоты затухающих колебаний  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  следует, что при увеличении коэффициента затухания  $\beta$  циклическая частота затухающих колебаний  $\omega$  уменьшается, а период  $T = \frac{2\Pi}{\omega}$  увеличивается. При  $\beta = \beta_{\text{крит.}} = \omega_0$ ,  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ , а при  $\beta > \omega_0$  величины  $\omega$  и  $T$  являются мнимыми. При этих условиях колебания прекращаются. Система, выведенная из положения равновесия внешними силами, возвращается в положение равновесия после прекращения действия этих сил аperiodически (рис. 13). Система возвращается в положение равновесия по типу “а” или “в” (рис. 13). Это зависит от свойств среды, в которой происходят колебания.

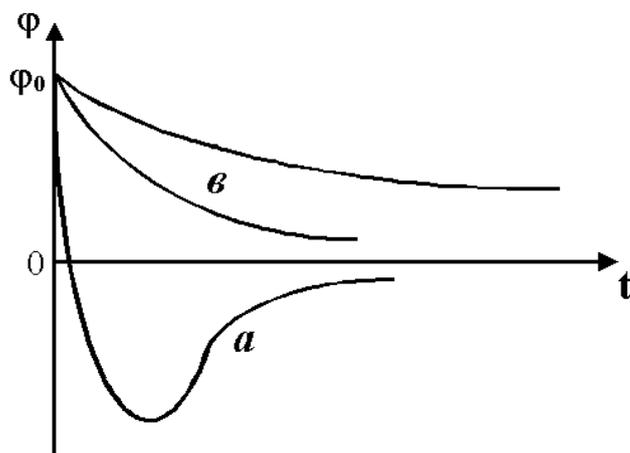


Рисунок 13

### 3.2 Описание установки

Установка (рисунок 14) состоит из штатива (1) с подвешенным на стальной проволоке 2 цилиндром 3, осветителем (лазером) 4 и изогнутой шкалы для отсчетов 5. Верхний конец проволоки укреплен в специальной головке штатива 6. Нижний конец проволоки укреплен в крышке цилиндра, на которой смонтировано зеркальце 7.

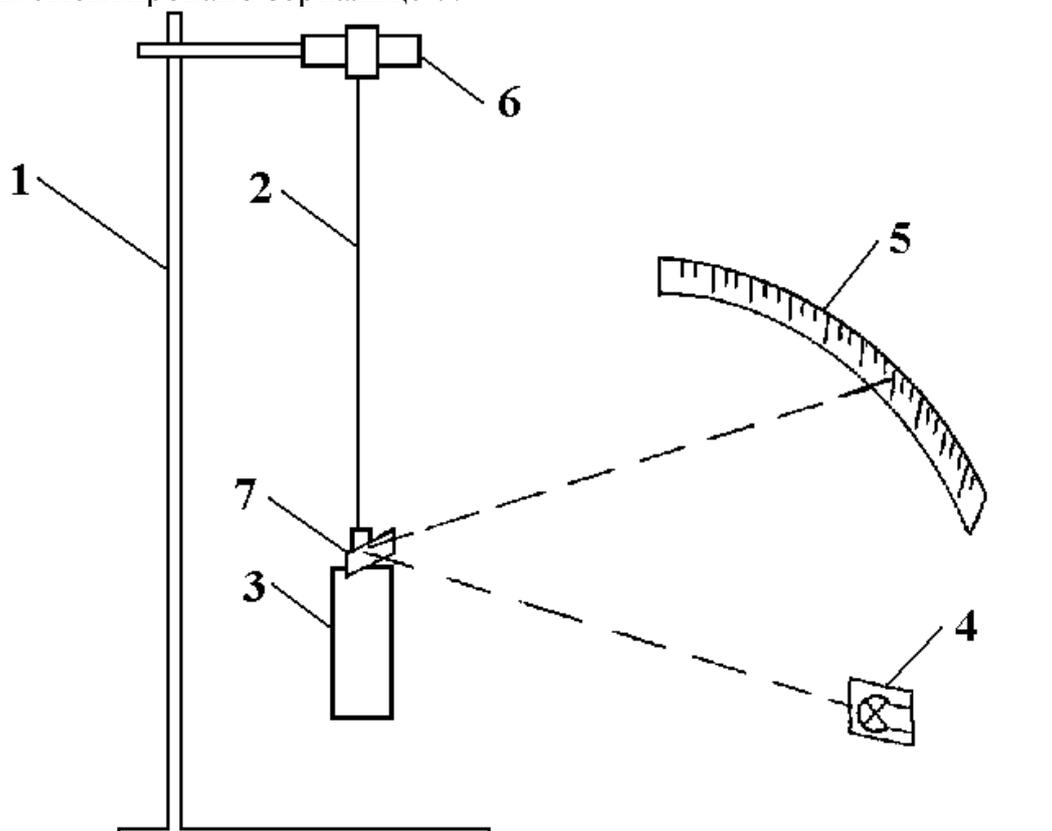


Рисунок 14

Луч света от осветителя попадает на зеркальце 7 и, отразившись от него, дает изображение в виде тонкой светлой полосы на шкале.

Для сообщения вращательного импульса цилиндру головка штатива медленно поворачивается на небольшой угол и быстро возвращается в исходное положение.

### 3.3 Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с установкой. Проверить настройку оптической системы (на шкале должно быть четкое изображение луча лазера).

2. Измерить период затухающих колебаний системы. Период – это время, за которое совершается одно полное колебание, следовательно,  $T = \frac{t}{N}$ , где  $t$  –

время колебания, а  $N$  – число колебаний. Измерение периода произведите не менее 5 раз, число колебаний  $N = 30$ . Определить погрешность измерения периода. Заполнить таблицу 8:

Таблица 8

№ изм.	N	t, с	$T_i$ , с	$\langle T \rangle$ , с	$\Delta T_i$ с	$\langle \Delta T \rangle$ , с	$\varepsilon$ , %
1							
2							
3							
4							
5							

Запишите результат измерения в виде:  $T = \langle T \rangle \pm \Delta T$

3. Определить на шкале нулевую точку (положение равновесия) –  $l_0$ . Снять зависимость амплитуды колебания от времени. Для этого записать 11 – 15 последовательных максимальных отклонений маятника в одну сторону от нулевого положения. Результаты измерений занести в таблицу 9.

Таблица 9

№ изм.	Максимальное отклонение вправо $l_i$ , см	Амплитуда колебания $A_i = (l_i - l_0)$ , см	Декремент затухания $\delta = \frac{A_i}{A_{i+1}}$	$\Delta \delta$	$\varepsilon = \frac{\langle \Delta \delta \rangle}{\langle \delta \rangle}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

Вычислить декремент затухания и оценить погрешность его измерения. По результатам этого опыта необходимо построить график зависимости  $A = f(t)$  и  $x(t)$ .

*Примечание:* так как длина дуги окружности связана с центральным углом соотношением:  $S = \varphi \cdot R$ , то вместо амплитуды и смещения в радианах можно брать амплитуду  $A$  и смещение  $x$  в линейных единицах.

5. Используя приведенные в теоретическом введении пункты (3. 2. 1. и 3. 2.2), вычислить все характеристики затухающих колебаний:  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $N_e$ ,  $Q$ .

Оцените погрешности вычисления этих величин.

6. Задав начальную амплитуду  $A_0$ , сосчитать число колебаний  $N_e$ , по истечении которых амплитуда уменьшится до значения  $\frac{A_0}{e}$ , т. е. уменьшится в “ $e$ ” раз.

7. Из полученного значения  $N_e$  вычислить характеристики затухающего колебания:  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $Q$ . Сравните полученные значения с результатами пункта 5.

### 3.4 Контрольные вопросы

1. Получите дифференциальное уравнение затухающего гармонического колебания.

2. Получите и представьте на графике зависимость амплитуды от времени  $A(t)$  и смещения от времени  $x(t)$  для затухающего гармонического колебания.

3. Энергия при затухающем гармоническом колебании. Добротность системы.

4. Характеристики быстроты затухания колебаний и связь между ними.

5. Частота и период при затухающем гармоническом колебании.

### 3.5 Техника безопасности

1. Включайте лазер только на время измерений.

2. Проверьте крепление струны-подвеса в кронштейне.

## 4 Лабораторная работа. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЗДУХЕ МЕТОДОМ СТОЯЧИХ ВОЛН

**Цель работы:** целью работы является измерение скорости звука в воздухе с помощью осциллографа и звукового генератора и определение  $C_p / C_v$  по скорости звука.

#### 4.1 Основные понятия и закономерности

Колебательная система может отдавать энергию во внешнюю среду. Эта передача энергии становится возможной благодаря тому, что частицы среды сами представляют собой миниатюрные колебательные системы. Молекулы среды связаны друг с другом силами, законы которых в известных границах подобны законам упругих сил; если одна из частиц окажется выведенной из положения равновесия, то силы, действующие на нее со стороны соседних частиц, заставляют ее вновь вернуться к устойчивому положению. Вместе с тем, по закону равенства действия и противодействия, соседние частицы также подвергнутся влиянию смещающих сил и в свою очередь будут выведены из положения устойчивого равновесия.

Таким образом, каждое возмущение, однажды возникнув в определенном участке среды, будет постепенно распространяться, захватывая частицы, все дальше и дальше отстоящие от места начального возмущения.

Находясь в какой-либо среде, например, в воздухе, колебательная система взаимодействует непосредственно с прилегающими к ней частицами. Совершая свои колебания, она создает вокруг себя периодический ряд возмущений, т. е. действует на прилегающие частицы как некоторая периодическая внешняя сила. Эта сила заставляет частицы среды совершать колебания с частотой вынуждающей силы, причем колебательный процесс, благодаря взаимодействию частиц, будет распространяться в среде с некоторой конечной скоростью  $v$ , которую называют фазовой скоростью волны.

Если колебательная система совершает незатухающие гармонические колебания, то в среде возникает упругая синусоидальная волна, которая описывается уравнением волны.

Выведем уравнение для плоской синусоидальной волны. Очевидно, что частица среды, находящаяся на расстоянии  $x$  от колебательной системы (места начального возмущения), начнет колебаться только тогда, когда до нее дойдет распространяющийся в среде колебательный процесс. Этот процесс дойдет до рассматриваемой нами частицы через промежуток времени  $\tau$ :

$$\tau = \frac{x}{v} \quad (61)$$

Если колебания системы выражаются уравнением:

$$S = a \sin \omega t, \quad (62)$$

где  $S$  – смещение от положения равновесия, то колебания рассматриваемой нами частицы будут происходить по такому же синусоидальному закону, но с запозданием на отрезок времени  $\tau$ . Следовательно, для колебаний частицы мы можем написать уравнение:

$$S = a \sin \omega (t - \tau) = a \sin \omega \left( t - \frac{x}{g} \right), \quad (63)$$

которое называется уравнением плоской волны.

Величина  $S$  представляет собой смещение любой из точек с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

Если в уравнении волны заменить  $\omega$  на  $\frac{2\pi}{T}$ , то оно примет вид:

$$S = a \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{g} \right) = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{Tg} \right) = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (64)$$

так как  $Tg = \lambda$ ,

где  $\lambda$  – длина волны;

$g$  – скорость распространения волны.

Полученное уравнение волны описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания  $x$ . Уравнение волны, распространяющейся в противоположном направлении, имеет вид:

$$S = a \sin \omega \left( t + \frac{x}{g} \right) = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (65)$$

Вид волны, распространяющейся в среде, зависит от упругих свойств среды. В жидкостях и газах могут возникать только продольные волны; в твердых телах могут возникать и продольные и поперечные волны.

Очень часто в среде одновременно распространяется не один, а несколько волновых процессов. При этом каждая частица среды, попадающая в такое сложное волновое поле, совершает результирующее колебательное движение, складывающееся из колебаний, вызванных каждым из волновых процессов.

Результирующее смещение частицы среды в любой момент времени является геометрической суммой смещений, вызываемых каждым из складываемых колебательных процессов в отдельности.

Особый интерес представляет тот случай, когда источники волн колеблются с одинаковой частотой. Эти источники называются когерентными.

Волны, вызванные такими источниками, называются когерентными. Признаком когерентности волн является:

- 1) равенство частот колебаний частиц;
- 2) неизменность разности фаз во времени.

В результате наложения когерентных волн наблюдается явление, носящее название интерференции.

Частным случаем интерференции волн является стоячая волна. Стоячая волна образуется в результате интерференции двух синусоидальных волн, обладающих одинаковыми амплитудами, частотами и распространяющихся во взаимно противоположных направлениях. Обе эти волны, в отличие от стоячей, называются бегущими волнами.

Простейшую (одномерную) стоячую волну можно получить на вытянутом упругом шнуре, один конец которого закреплен. Если свободный конец шнура привести в гармоническое колебательное движение в направлении, перпендикулярном к оси шнура, то вдоль шнура будет распространяться поперечная бегущая волна – падающая волна. Достигнув закрепленного конца шнура, волна отразится от него, т. е. возникнет вторая бегущая волна (отраженная), распространяющаяся в обратном направлении. Если рассеяния энергии нет, то амплитуды падающей и отраженной волны будут одинаковы. В результате сложения (интерференции), прямой и отраженной волн, в шнуре возникает стоячая волна.

Выведем уравнение стоячей волны, т. е. найдем зависимость от времени смещения  $S$  точек среды, в которой распространяется стоячая волна.

Положим, что смещения, вызванные прямой и обратной волнами, задаются

уравнениями:

прямая –

$$S_1 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (66)$$

отраженная –

$$S_2 = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (67)$$

В результате интерференции прямой и отраженной волн колебание в некоторой точке  $X$  будет происходить по закону:

$$S = S_1 + S_2 = a \left[ \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] = 2a \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right).$$

Полученное уравнение является уравнением стоячей волны  $S(x, t)$ .

В уравнении волны множитель  $2a \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) = A$

есть амплитуда результирующих колебаний, она зависит от координаты точки  $x$ , т. е. амплитуды колебаний различных точек результирующей волны различны.

Второй множитель  $\sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right)$  показывает, что в точках среды возникают колебания с тем же периодом, что и колебания в прямой и отраженной волнах. В определенных точках среды амплитуда стоячей волны равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Такие точки называются *пучностями*. В других точках результирующая амплитуда равна нулю, эти точки называются *узлами* стоячей волны.

Определим координаты точек пучностей и узлов. Амплитуда колебаний  $A$  имеет максимум при условии, что

$$|\operatorname{Cos}(2\pi \frac{x}{\lambda})| = 1.$$

В этих точках  $A = 2a$ .

Положение пучностей определяется условием:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm k \pi, \quad (68)$$

где  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$

Из этого равенства для координат пучностей получаем:

$$2 \frac{x}{\lambda} = \pm k,$$

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}. \quad (69)$$

Расстояние между пучностями мы получим, если возьмем разность двух значений  $X$ , определяемых формулой (69) для двух последовательных значений  $k$ :

$$x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{\lambda}{2} - k \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, \quad (70)$$

т.е. расстояние между двумя соседними пучностями равно половине длины тех волн, в результате интерференции которых образуется данная стоячая волна.

В узлах амплитуда результирующего колебания равна нулю. Условие образования узлов:

$$\operatorname{Cos}(2\pi \frac{x}{\lambda}) = 0 \quad (71)$$

или

$$2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad (72)$$

откуда координаты узлов:

$$x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4}. \quad (73)$$

Найдем расстояние между пучностью и ближайшим узлом:

$$x_{\text{узла}} - x_{\text{пучности}} = (2k+1) \frac{\lambda}{4} - k \frac{\lambda}{2} = \frac{2k\lambda + \lambda - 2k\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}, \quad (74)$$

т. е. узлы и пучности отстоят друг от друга на четверть длины волны. Расстояние между двумя соседними узлами (или пучностями) стоячей волны

называется длиной стоячей волны  $\lambda_{ст}$ . Таким образом, длина стоячей волны равна половине длины бегущей волны (рис. 15).

Колебания во всех точках стоячей волны, лежащих между двумя соседними узлами, происходят с различными амплитудами, но в одинаковых фазах, так как аргумент синуса в уравнении стоячей волны

$$S = 2a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (75)$$

зависит от координаты  $x$ .

При переходе через узел фаза колебания изменяется на  $\Pi$ , так как  $\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$  изменяет свой знак на противоположный.

Вследствие этого, если по одну сторону узла в некоторый момент времени  $t$  смещение  $S$  положительно, то по другую сторону узла оно в тот же момент времени отрицательно.

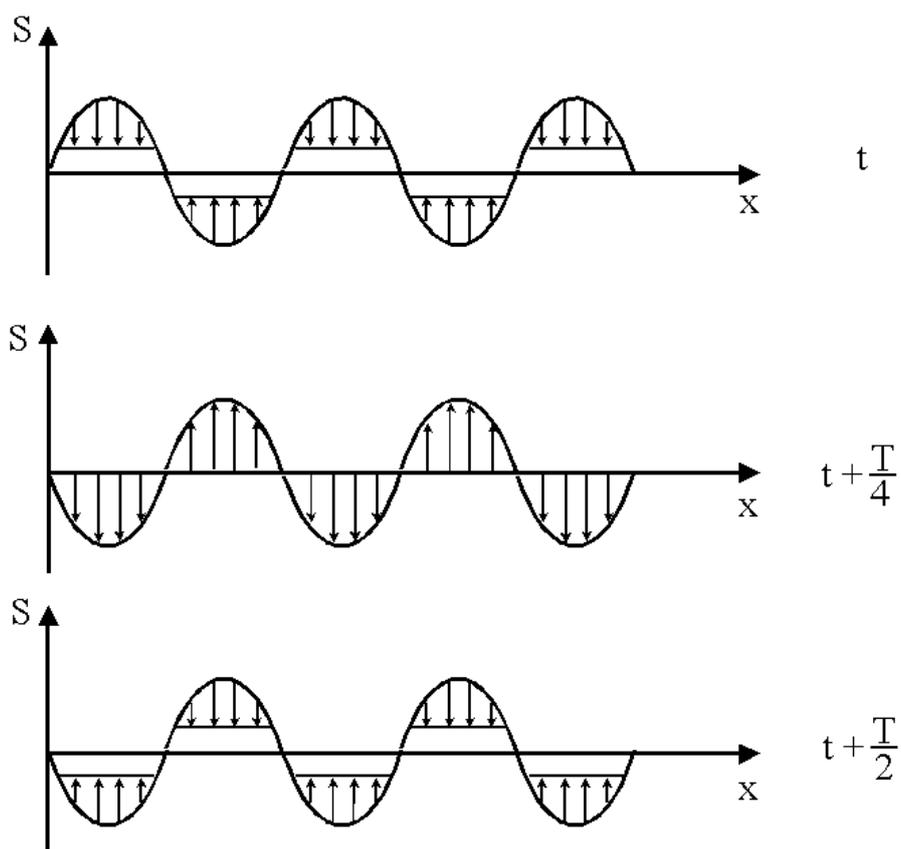


Рисунок 15

На каждом из графиков рис. 15 стрелками указаны направления скоростей различных точек среды в один и тот же момент времени  $t$ .

Точки, лежащие по обе стороны одного и того же узла, колеблются в противоположных фазах, т. е. достигают одновременно крайних, но противоположных по знаку удалений, проходят одновременно положение равновесия, но с противоположно направленными скоростями.

В отличие от бегущей волны в стоячей волне отсутствует перенос энергии – полная энергия колебаний каждого элемента объема среды, ограниченного соседними узлом и пучностью, не зависит от времени. Она лишь периодически переходит из кинетической энергии в потенциальную энергию упруго деформируемой среды и обратно. Именно поэтому такого рода волны и получили название стоячих волн. Отсутствие переноса энергии стоячей волной является результатом того, что образующие эту волну прямая и обратная волны переносят энергию в равных количествах и в противоположных направлениях.

В данной работе предлагается определить скорость распространения звука в газовой среде.

#### 4.2 Описание установки и метода исследования

Используемый в настоящей работе метод определения скорости звука основан на измерении разности фаз колебаний звуковой частоты, подаваемых на входы “ X” и “ Y” осциллографа. Функциональная схема установки приведена на рисунке 16.

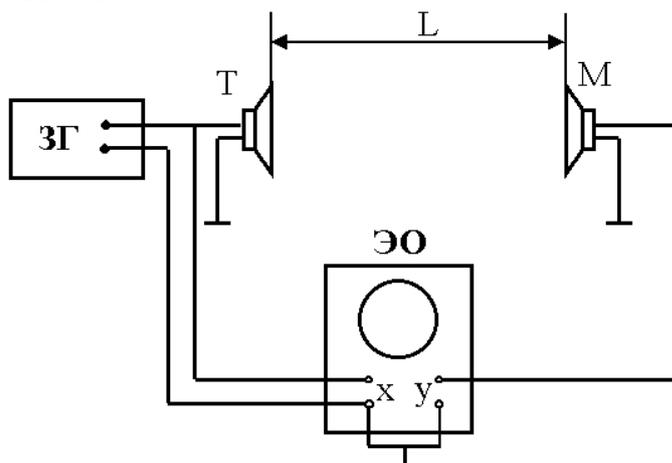


Рисунок 16

На вход “ X” электронного осциллографа (ЭО) от звукового генератора (ЗГ) подается синусоидальное напряжение, подводимое к телефону (Т), который является источником звука. На вход “ Y” поступает синусоидальное напряжение от электродинамического микрофона (М). Напряжение в микрофоне возникает под воздействием звуковых колебаний воздуха. Приемник звука (М) расположен на расстоянии L от источника звука (Т).

Разность фаз между этими двумя напряжениями одинаковой частоты зависит от расстояния L, скорости звука в воздухе –  $\vartheta$ , частоты колебаний  $\nu$  и в некоторых случаях от граничных условий, определяемых конструкцией источника и приемника звука. На оба входа осциллографа подаются напряжения, изменяющиеся по гармоническому закону. Частоты колебаний в

обоих случаях одинаковы. Колебания будут отличаться только по фазе, поэтому электронный луч под действием синусоидально изменяющихся электрических полей будет одновременно участвовать в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях. В зависимости от разности фаз и соотношения амплитуд, луч будет описывать на экране различные фигуры. В простейшем случае это эллипс, окружность, прямая линия.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных колебания одной и той же частоты  $\omega$ , совершающихся вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ .

В общем случае уравнения таких колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= a \cos(\omega t + \varphi_{01}), \\y &= b \cos(\omega t + \varphi_{02}),\end{aligned}\tag{76}$$

где  $x$  и  $y$  – смещение вдоль  $X$  и  $Y$  в любой момент времени  $t$ ;

$a$  и  $b$  – амплитуды колебаний;

$\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  – начальные фазы колебаний.

Выберем такой отсчет времени, когда  $\varphi_{01} = 0$  и  $\varphi_{02} = \varphi_0$  (в данном случае  $\varphi_0$  – разность начальных фаз колебаний), тогда выражение (76) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t, \\y &= b \cos(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}\tag{77}$$

Уравнение траектории суммарного колебания можно получить, исключив в выражениях (77) время  $t$ . Из первого уравнения следует:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a},\tag{78}$$

Следовательно,

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.\tag{79}$$

Используя формулу для косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

запишем второе уравнение из системы (77) в виде:

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t + \varphi_0) = \cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0.$$

С учетом (78) и (79) получаем:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi_0$$

или

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \varphi_0 = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi_0.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi_0 + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0 - \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \varphi_0.$$

После преобразования получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0. \quad (80)$$

Форма траектории зависит от разности начальных фаз. Если  $\varphi_0$  не кратно четному и нечетному  $\Pi$ , то выражение (80) представляет собой уравнение эллипса в декартовой системе координат. Если разность начальных фаз  $\varphi_0$  кратна  $2\Pi$ , т. е.

$\varphi_0 = 2\Pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то выражение (80) принимает вид:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

В этом случае траектория представляет собой отрезок прямой линии, проходящей через 1 и 3 квадранты, описываемой уравнением:

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (81)$$

Если разность начальных фаз кратна нечетному числу  $\Pi$ , т. е.

$$\varphi_0 = (2n + 1)\Pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

эллипс превращается в отрезок прямой линии, проходящей через 2 и 4 квадранты:

$$y = -\frac{b}{a} x. \quad (82)$$

В данной лабораторной работе на вход “X” осциллографа от генератора подается напряжение, изменяющееся по закону:

$$U_x = U_{ox} \cos \omega t. \quad (83)$$

Такое напряжение вызывает смещение электронного луча на экране. В силу малой инертности электронного луча его координата  $x$  во времени будет изменяться по такому же закону:

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (84)$$

На вход “У” от микрофона (М) подается напряжение  $U_y$ , которое будет изменяться по тому же закону, что и  $U_x$ . Однако оно будет запаздывать на время  $\tau$ , необходимое для распространения звуковых колебаний в воздухе от телефона до микрофона, т. е.

$$U_y = U_{ox} \cos \omega (t - \tau). \quad (85)$$

Соответственно смещение электронного луча по оси “У” будет происходить по закону:

$$y = y_0 \cos \omega (t - \tau). \quad (86)$$

Время, необходимое на преодоление звуковой волной расстояния  $L$ , определяется из соотношения:

$$\tau = \frac{L}{g}, \quad (87)$$

где  $g$  – фазовая скорость распространения звуковых колебаний в воздухе.

Разность фаз между колебаниями луча по оси “х” и “у” равна:

$$\Delta\varphi = \omega\tau = \frac{2\pi L}{Tg} = \frac{2\pi L}{\lambda}, \quad (88)$$

где  $T$  – период,  $\nu$  – частота звуковых колебаний,  $\lambda$  – длина волны.

Подбирая значения  $L$  и  $\nu$ , можно добиться того, чтобы разность фаз  $\Delta\varphi$  была равна целому числу  $\Pi$ . В этом случае расстояние  $L$  должно равняться целому числу полувольт.

Если установить с помощью звукового генератора такую частоту колебаний  $\nu$ , при которой луч на экране осциллографа совершает колебания по прямой, проходящей через первый и третий квадранты, то разность фаз будет кратна четному числу  $\Pi$ , т. е.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi L_1}{\lambda} = 2n\Pi, \quad (89)$$

а расстояние между телефоном и микрофоном  $L_1$ , равное разности хода волн, кратно  $\lambda$ :

$$\delta_1 = L_1 = n\lambda. \quad (90)$$

Удаляя микрофон от телефона, можно добиться такого положения, при котором электронный луч совершает колебания по прямой, проходящей через второй и четвертый квадранты. В этом случае разность фаз будет кратна нечетному  $\Pi$ , т. е.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi L_2}{\lambda} = (2n + 1)\Pi, \quad (91)$$

а разность хода:

$$\delta_2 = L_2 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (92)$$

Очевидно, что если снова продолжать удалять микрофон до расстояния  $L_3$ , при котором электронный луч будет совершать колебания вдоль прямой, проходящей через первый и третий квадранты, то разность фаз будет равна:

$$\Delta\varphi = 2(n + 1) \Pi, \quad (93)$$

а разность хода

$$\delta_3 = L_3 = (n + 1) \lambda. \quad (94)$$

По мере удаления телефона от микрофона будет изменяться профиль стоячей волны в воздушном столбе между динамиками. Профили первых 4-х гармоник изображены на рисунке 17.

Из соотношений (90), (92) и рис. 17 следует, что

$$L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad (95)$$

$$L_3 - L_1 = \lambda, \quad (96)$$

$$L_3 - L_2 = \frac{\lambda}{2}. \quad (97)$$

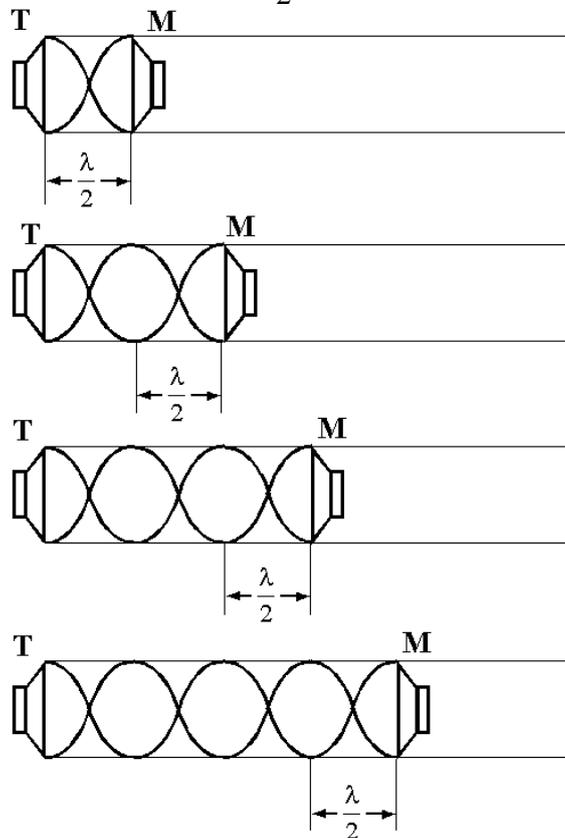


Рисунок 17

Измерив эти расстояния, можно определить  $\lambda$  и по формуле (98) скорость звука:

$$g = \lambda \cdot \nu \quad (98)$$

где  $\nu$  – частота звуковых колебаний.

### 4.3 Определение показателя адиабаты воздуха

В качестве практического применения полученного значения скорости звука в воздухе предлагается определить показатель адиабаты  $\gamma = C_p / C_v$ . Как известно, скорость звука в газах определяется формулой:

$$g = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (99)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная, равная

$$8,31 \text{ Дж/ (моль} \cdot \text{К)}$$

$T$  – температура газа;

$\mu$  – молярная масса газа.

Преобразуя выражение (99), получаем:

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} g^2. \quad (100)$$

Таким образом, показатель адиабаты можно вычислить, определив скорость распространения звука и зная температуру и молярную массу газа. В данном случае необходимо измерить, кроме скорости звука в воздухе, его температуру. Молярная масса воздуха предполагается известной, равной

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль.}$$

### 4.4 Порядок выполнения работы

1. Собрать электрическую схему установки в соответствии с рисунком 16.
2. Включить осциллограф и дать прогреться 2-3 мин. Сфокусировать электронный луч в точку, отрегулировав его яркость, установить в центре экрана. Ручку регулировки вертикального усиления установить на ноль (в крайнее левое положение).
3. Включить звуковой генератор. Подобрать такую амплитуду напряжения, чтобы электронный луч описывал горизонтальную прямую длиной в половину экрана.
4. Поставить ручку регулировки вертикального усиления на максимальное усиление.

5. Изменяя частоту сигнала с генератора и расстояние между микрофоном и телефоном, получить на экране прямую линию в 1 – 3 квадрантах. Рекомендуемые частоты: 1, 5... 3 кГц. Отметить положение микрофона  $L_1$ .

6. Перемещением микрофона добиться, чтобы электронный луч вычерчивал прямую линию в квадрантах 2 – 4 с тем же наклоном. При этом нельзя изменять величину амплитуды сигнала, подаваемого с генератора, и усиление осциллографа. Отметить положение микрофона  $L_2$ .

7. Вновь перемещая микрофон, добиться, чтобы электронный луч вычерчивал прямую линию в 1 – 3 квадрантах. Отметить положение микрофона  $L_3$ . Определить длину волны  $\lambda$ .

8. Результаты измерений и расчетов занести в таблицу 10.

Таблица 10

№ изм.	$\nu$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	T	$\langle \vartheta \rangle$	$\langle \Delta \vartheta \rangle$	$\lambda$	$\gamma$	$\Delta \gamma$
1										
2										
3										
4										
5										

9. Повторить опыты для частот, указанных в таблице или преподавателем.

10. Выключить приборы.

11. Произвести вычисления  $\vartheta$  и  $\gamma$ . Определить средние значения указанных величин и погрешности косвенных измерений.

#### 4.5 Контрольные вопросы и задания

1. От каких параметров зависит скорость звука в газах ?
2. В каких случаях электронный луч описывает на экране осциллографа прямую линию, окружность, эллипс ?
3. Уравнение волны. Фазовая скорость.
4. Стоячие волны.
5. Резонанс.

#### 4.6 Техника безопасности

1. В данной лабораторной работе используются приборы (генератор и осциллограф), питающиеся от сети переменного тока напряжением 220 вольт. Поэтому перед включением приборов в сеть необходимо убедиться в наличии заземления.

2. Включение приборов производить только после разрешения преподавателя.

3. В случае обнаружения неисправности немедленно отключить всю установку от сети и только после этого сообщить о неисправности лаборанту или преподавателю.

## 5 Лабораторная работа. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ КУНДТА

**Цель работы:** определение скорости звука в твердых телах методом стоячих волн.

### 5.1 Описание установки и метода исследования

*Примечание:* Теорию по теме “Стоячие волны” смотрите в работе №4, пункте 4.2.

При переходе акустических волн из одной среды в другую частота колебаний сохраняется, но изменяется скорость распространения волн, что приводит к изменению длины волны.

Для двух сред можно записать:

$$g_1 = \lambda_1 \nu, \quad g_2 = \lambda_2 \nu, \quad (101)$$

где  $g_1$  и  $g_2$  – скорость распространения волн в средах 1 и 2;

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – длины волн в этих средах;

$\nu$  – частота колебаний.

Эти уравнения дают:

$$g_1 = g_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (102)$$

Если одна из сред, например, вторая, газ (воздух), то скорость звука в ней определяется по формуле Лапласа:

$$g_2 = \sqrt{\frac{P}{\rho} \gamma},$$

где  $P$  – давление воздуха;

$\rho$  – его плотность;

$\gamma$  – отношение молярных теплоемкостей ( $\gamma = C_p/C_v$ ).

Учет изменения плотности газа с изменением температуры ( $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t}$ ) приводит к выражению:

$$g_2 = \sqrt{\frac{P}{\rho_0} \gamma (1 + \alpha t)} = g_{02} \sqrt{1 + \alpha t} \quad (103)$$

где  $\alpha$  – коэффициент расширения воздуха;

$t$  – температура в градусах Цельсия;

$\rho_0$  – плотность воздуха при  $t = 0^\circ\text{C}$ ;

$g_0$  – скорость распространения звуковых волн в воздухе при нуле градусов Цельсия, равная 331 м/сек. Для влажного воздуха  $\alpha$  можно считать равным 0,004 1/град.

Пользуясь выражением для  $g_2$  (103), получим скорость распространения звука в первой среде:

$$g_1 = g_{02} \sqrt{1 + \alpha t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (104)$$

Для определения скорости звука в твердых телах используется прибор Кундта (рисунок 18), состоящий из стеклянной трубки А, закрытой с одного конца, и стержня В из материала, в котором нужно измерить скорость распространения звука, с легким диском С на одном конце.

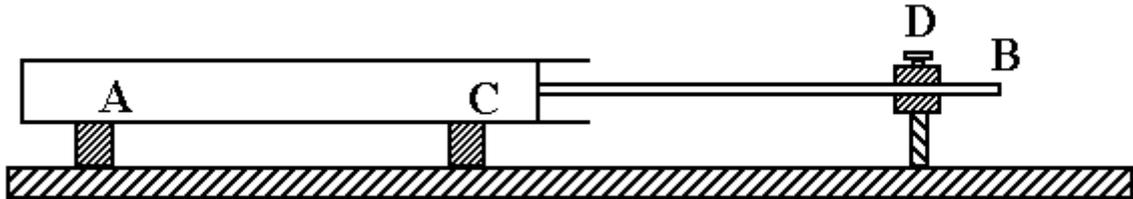


Рисунок 18

Зажимом Д стержни поочередно закрепляются на своей середине. В трубку насыпают пробковых опилок и, положив ее на подставку, располагают стержень так, чтобы диск вошел в трубку на большое расстояние, не касаясь ее стенок.

Свободный конец стержня натирают в направлении от середины фланелью, покрытой канифолью, возбуждая тем самым собственные продольные колебания частиц стержня. При принятом здесь способе возбуждения в стержне возникают в основном собственные продольные колебания с минимальной частотой.

Эти колебания распространяются по стержню и, дойдя до его концов, частично отражаются, а частично переходят в воздух, закрытый в стеклянной трубке, распространяются в нем, отражаются от дна трубы и возвращаются обратно. Вследствие этого в стержне и в воздухе образуются стоячие волны. На концах стержня образуются пучности стоячей волны, посередине, где он

закреплен, получается узел. Так как в стоячей волне расстояние между соседними пучностями равно половине длины бегущей волны, т.е.  $\lambda/2$ , то зная длину стержня  $L$ , можно определить длину звуковой волны, распространяющейся по стержню:

$$\lambda_1 = 2L.$$

На концах воздушного столба, в стеклянной трубке вследствие отражения звуковых волн от среды более плотной, чем воздух, образуются узлы. Внутри трубки образовавшиеся стоячие волны располагают опилки в характерные фигуры. В узлах стоячей волны опилки остаются в покое, а в пучностях они приходят в наиболее энергичное движение. Когда в трубке не укладывается целое число полуволн, то не образуется стоячая волна (не достигнут резонанс), а значит, будут отсутствовать фигуры. При измерении расстояния  $l$  между  $n+1$  узлами расстояние между соседними узлами стоячей волны равно  $l/n$ . Это расстояние называется длиной стоячей волны и равно половине длины бегущей волны в воздухе:

$$\frac{l}{n} = \frac{\lambda_2}{2}. \quad (105)$$

Откуда длина бегущей волны в воздухе равна:

$$\lambda_2 = 2 \frac{l}{n}. \quad (106)$$

Подставив в формулу (102) значение найденных длин волн в стержне и в воздухе, для скорости звука в стержне получим:

$$g_1 = \sqrt{\frac{P}{\rho_0} \gamma (1 + \alpha t)} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = g_{02} \sqrt{1 + \alpha t} \frac{L \cdot n}{l} \quad (107)$$

Вычислив скорость звука в стержнях, зная плотность материала, можно определить модуль Юнга материала стержня из формулы:

$$g = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (108)$$

## 5.2 Порядок выполнения работы

1. Закрепить стержень посередине на подставке зажимом Д.
2. Повернуть трубку с пробковым порошком так, чтобы он разместился несколько сбоку трубки тонким, ровным и узким слоем.
3. Придерживая одной рукой стержень в месте его закрепления, другой рукой проводить куском ткани, посыпанной канифолью, вдоль свободного

конца стержня от середины к его концу, возбуждая в нем продольные колебания.

4. Колебания в стержне в свою очередь вызывают колебания воздушного столба внутри стеклянной трубки.

5. После каждого возбуждения звука слегка перемещать трубку относительно звучащего стержня до тех пор, пока находящиеся в ней опилки не дадут отчетливых фигур. Отсчитать  $n$  расстояний между узлами и измерить расстояние  $l$  между крайними отсчитанными узлами.

6. Нарушая фигуры легкими постукиванием пальцев по стеклянной трубке, повторить трижды проведенный опыт и найти среднее значение для длины волны  $\lambda_2$ .

7. Измерить три раза длину  $L$  закрепленного посередине стержня с точностью до 1 мм.

8. Определить температуру воздуха в лаборатории и вычислить скорость звука по формуле (107).

9. Вычислить модуль Юнга по формуле (108).

10. Результаты измерений и подсчета записать в таблицу 11.

Таблица 11

№ изм.	$L$	$n$	$l$	$t^{\circ}\text{C}$	$\lambda_1$	$\vartheta_1$	$E$
1							
2							
3							

### 5.3 Контрольные вопросы

1. Что такое волна, и как она возникает.
2. Характеристики волны.
3. Вывести уравнение волны.
4. Рассмотреть интерференцию волн. Когерентные источники.
5. Стоячие волны. Уравнение стоячей волны.
6. Вывод рабочей формулы для определения скорости волны.
6. Какова зависимость скорости звука от плотности вещества ?

## 5.4 Техника безопасности

1. При выполнении работы осторожно обращаться со стеклом.

## 6 Лабораторная работа. ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

**Цель работы:** измерение собственных частот поперечных колебаний струны с закрепленными концами; определение зависимости частоты основного тона от силы натяжения струны; определение зависимости скорости распространения волны от силы натяжения.

### 6.1 Теоретические сведения

Механические волны – это процесс распространения колебаний в упругих средах. Источником волн служит колебание, а распространение волн обусловлено силами взаимодействия между частицами среды. Если источник волн совершает гармоническое колебание, то и смещение частиц в волне происходит также по гармоническому закону. Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси  $X$  (одномерная бегущая волна) – рисунок 19

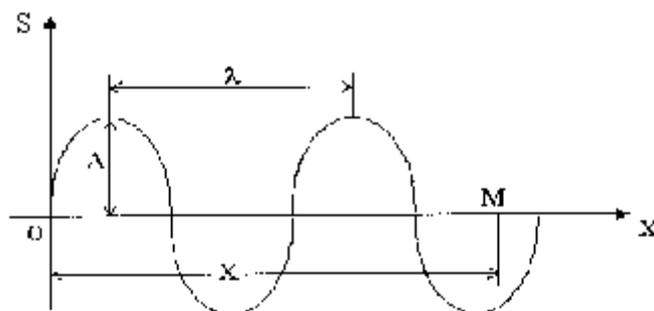


Рисунок 19

Источник находится в начале координат и совершает колебания по закону

$$S = A \cdot \sin \omega t, \quad (109)$$

где  $A$  – амплитуда колебания,

$$\omega \text{ – циклическая частота, } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$S$  – смещение от положения равновесия.

Точка  $M$  среды, расположенная на расстоянии  $x$  от источника, начнет колебаться спустя время  $\tau = \frac{x}{g}$  – время запаздывания ( $g$  – скорость

распространения волны – расстояние, на которое переместится колебание за период). Уравнение колебания точки М будет иметь вид:

$$S_M = A \cdot \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{g}\right). \quad (110)$$

Величина  $\frac{\omega}{g} = k$  – волновое число.

Таким образом,

$$S_M = A \cdot \sin(\omega t - kx). \quad (111)$$

Уравнения (110) и (111) представляют собой уравнения одномерной бегущей волны. Таким образом,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то  $k = \frac{2\pi}{gT}$ . Произведение  $g \cdot T = \lambda$  – длина волны – расстояние, на которое распространяется волна за период колебания. Таким образом  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Длину волны  $\lambda$  можно определить и как расстояние между двумя соседними точками среды, совершающими колебание в одной фазе. Бегущую волну можно наблюдать, если взять длинную веревку и раскачивать один ее конец, тогда по веревке побежит волна. Если другой конец веревки закреплен, то в точке закрепления волна отразится и возникшая отраженная волна будет интерферировать с падающей. Как правило, в этом случае движение отдельных участков веревки будет беспорядочным. Но если частоту качаний конца веревки подобрать правильно, то в результате интерференции бегущей и отраженной волн возникнет стоячая волна. Это волна называется стоячей потому, что она выглядит неподвижной. Амплитуда колебаний при установлении стоячей волны оказывается значительной. Стоячие волны образуются не на одной частоте. Существует целый спектр частот, на которых устанавливается стоячая волна. Эти частоты называются собственными или резонансными. Самая низкая частота называется основной, а все другие собственные частоты кратны основной.

Получим уравнение стоячей волны. Если уравнение бегущей волны, распространяющейся вдоль оси X:  $S_1 = A \cdot \sin(\omega t - kx)$ , то уравнение отраженной волны запишется так:  $S_2 = A \cdot \sin(\omega t + kx)$ .

Сумма двух бегущих встречных волн:

$$S = S_1 + S_2 = A \cdot [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \sin \omega t.$$

Формула

$$S = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \sin \omega t \quad (112)$$

и есть уравнение стоячей волны. Частицы среды совершают гармонические колебания с частотой  $\omega$ , амплитуда колебания зависит от координаты X и равна

$$A_{CT} = 2A \cdot \cos(kx). \quad (113)$$

Точки среды, для которых  $\cos(kx) = 0$  и, следовательно,  $kx = (\pi \cdot n + \pi/2) = \pm(2n + 1) \cdot \pi/2$  не колеблются ( $A_{\text{ст}} = 0$ ). Эти точки называются узлами стоячей волны. Так как  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то координаты узлов

$$x = \pm(2n + 1) \cdot \lambda/4, \quad (114)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Точки среды, для которых  $\cos(kx) = \pm 1$ , колеблются с максимальной амплитудой  $A_{\text{ст}} = 2A$  и называются пучностями. Координаты пучностей

$$x = \pm n \cdot \lambda/2, \quad (115)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

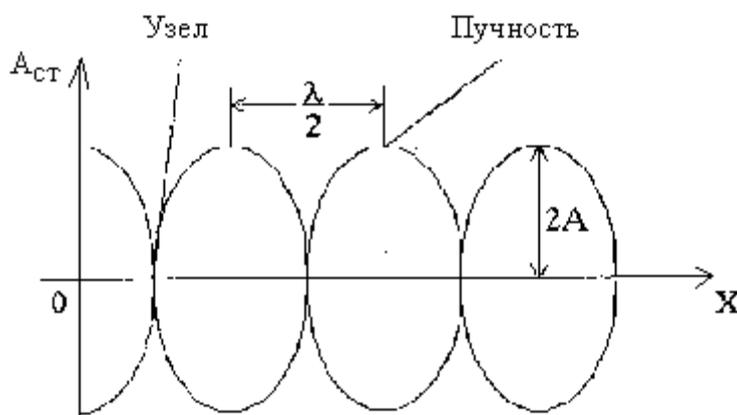


Рисунок 20

Соседние пучности (также как и соседние узлы) находятся на расстоянии  $\lambda/2$  (рисунок 20).

Точки, расположенные между двумя соседними узлами, колеблются в одной фазе. Точки, расположенные слева и справа от узла колеблются в противоположных фазах.

Стоячая волна получила свое название еще и потому, что она не переносит энергию, т.к. точки среды, лежащие в узлах, остаются неподвижными. Дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны то полностью в потенциальную, сосредоточенную вблизи узлов (здесь максимального значения достигает деформация сжатия или растяжения), то в кинетическую, сосредоточенную вблизи пучностей (здесь максимального значения достигают скорости частиц).

Рассмотрим колебания струны, закрепленной с двух сторон. Если в струне возбудить колебания, то по струне побегут волны различных частот, на концах струны волны будут отражаться и интерферировать друг с другом случайным образом. В результате большинство возбужденных волн быстро

затухают. Длительное время будут сохраняться волны, соответствующие собственным (резонансным) частотам струны. Для того чтобы найти резонансные частоты найдем сначала соотношение между длиной струны и длиной стоячей волны. На концах струны всегда будут узлы. Самая низкая частота (основная мода или первая гармоника) соответствует единственной пучности на середине струны (рисунок 21а).

В этом случае длина струны  $L = \lambda_1/2$ . Вторая гармоника соответствует двум пучностям (рисунок 21б). В этом случае  $L = 2\lambda_2/2$ . Третья гармоника (рисунок 21в):  $L = 3\lambda_3/2$  и т.д. В общем случае  $L = n\lambda_n/2$ , откуда

$$\lambda_n = 2L/n. \quad (116)$$

Т.к. длина волны и частота связаны соотношением  $v = g/\lambda$ , где  $g$  – скорость распространения волны, то спектр собственных частот струны будет определяться выражением:

$$v = \left(\frac{g}{2L}\right) \cdot n \quad (117)$$

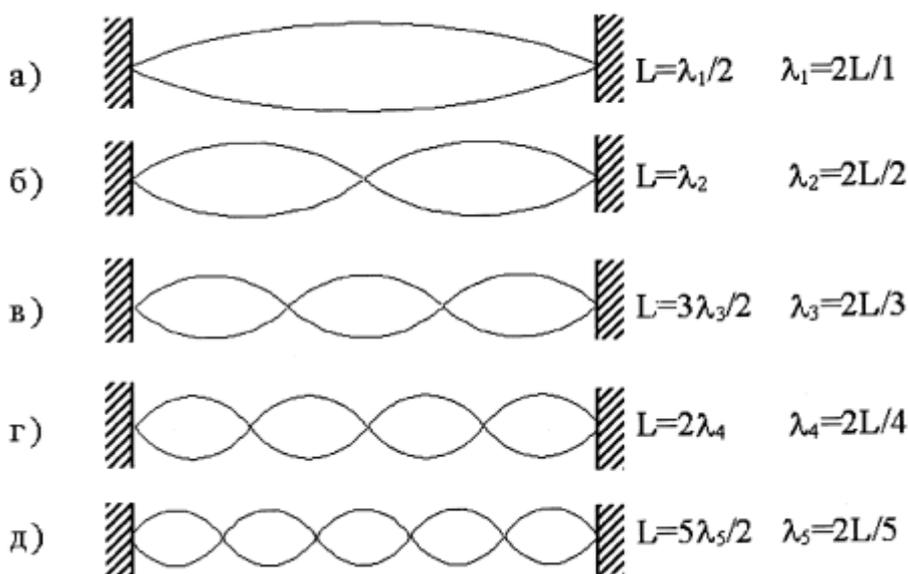


Рисунок 21

Скорость распространения упругих волн в натянутой струне равна

$$g = \sqrt{\frac{F_n}{\mu}}, \quad (118)$$

где  $F_n$  – сила натяжения струны,

$\mu$  – масса единицы длины струны (линейная плотность).

Если плотность материала, из которого изготовлена струна  $\rho$ , а диаметр  $d$ , то:

$$\mu = \rho \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{и} \quad \mathcal{G} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{F_n}{\pi \rho}}. \quad (119)$$

В таком случае спектр собственных частот  $\nu_n$  будет представлен в виде:

$$\nu_n = \frac{n}{dL} \sqrt{\frac{F_n}{\pi \rho}}. \quad (120)$$

## 6.2 Описание установки и теория метода

### 6.2.1 Схема экспериментальной установки.

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 22.

Струна 1 закреплена между стойками. Один конец закреплен неподвижно, а другой перекинут через блок и к этому концу подвешен груз  $m$ , который обеспечивает натяжение струны ( $F_n = mg$ ). Элемент струны  $\Delta \ell$  находится в поле постоянного магнита 2. Если по струне от генератора звуковой частоты 3.Г. пропустить переменный ток  $J = J_0 \cdot \sin \omega t = J_0 \cdot \sin 2\pi \nu t$ , то на элемент  $\Delta \ell$  будет действовать переменная сила Ампера  $F_A = J \cdot \Delta \ell \cdot B \cdot \sin \alpha$ . Силовые линии магнитного поля перпендикулярны струне ( $\angle \alpha = \frac{\pi}{2}$ ) и  $F_A = J_0 \cdot \Delta \ell \cdot B \cdot \sin 2\pi \nu t$ . Эта сила будет возбуждать в струне

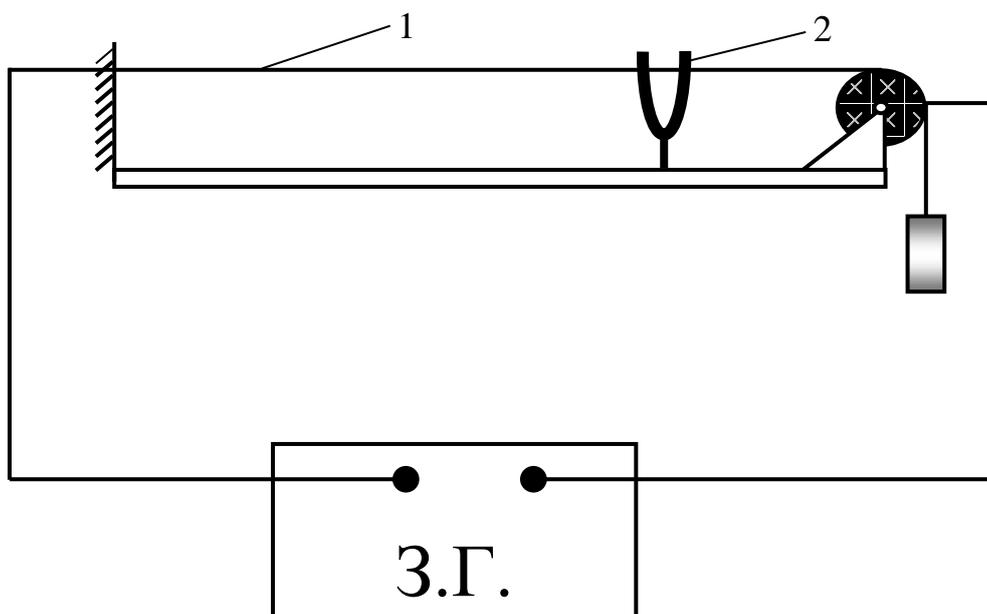


Рисунок 22 – Схема установки

колебания в вертикальной плоскости с частотой  $\nu$ . Если частоту переменного тока плавно изменять, то при некоторой частоте  $\nu_1$  (основная мода или первая гармоника) произойдёт резкое возрастание амплитуды колебания. В струне установится стоячая волна, профиль которой представлен на рисунок 21а. Резонанс фиксируется визуально. Если продолжать увеличивать частоту переменного тока, то последовательно будут наблюдаться резонансы, соответствующие 2-ой, 3-ей и т.д. гармоникам (рисунок 21б, 21в и т.д.).

Выведем уравнение колебания струны и формулу скорости распространения волны (118).

Выделим малый элемент струны  $dx$  (рисунок 23). Результирующая сила, действующая на элемент  $dx$  со стороны остальной струны равна:

$$dF = F_H \cdot \sin \alpha(x + dx) - F_H \cdot \sin \alpha(x) = F_H \cdot [\sin \alpha(x + dx) - \sin \alpha(x)].$$

В силу малости углов  $\alpha(x)$  и  $\alpha(x+dx)$  (эти углы малы, т.к. отклонение от положения равновесия  $S$  значительно меньше длины струны)  $\sin \alpha(x) \approx \text{tg} \alpha(x)$ ,  $\sin \alpha(x + dx) \approx \text{tg} \alpha(x + dx)$ ; кроме того  $\text{tg} \alpha(x) = S'_x(x, t)$ ,  $\text{tg} \alpha(x + dx) = S'_x(x + dx, t)$  (геометрический смысл первой производной), то

$$F = F_H [S'_x(x + dx, t) - S'_x(x, t)] = F_H S''_{xx}(x, t) dx$$

(так как  $d(S'_x) = (S'_x)'_x \cdot dx = (S''_{xx}) \cdot dx$ ).

По второму закону Ньютона  $dF = dm \cdot a$ , где  $dm = \mu \cdot dx$  – масса выбранного элемента струны,  $a = S''_{tt}(x, t)$ , то:

$$F_H S''_{xx}(x, t) dx = \mu \cdot dx S''_{tt}(x, t) dx \text{ или}$$

$$\left( \frac{F_H}{\mu} \right) S''_{xx}(x, t) = S''_{tt}(x, t). \quad (121)$$

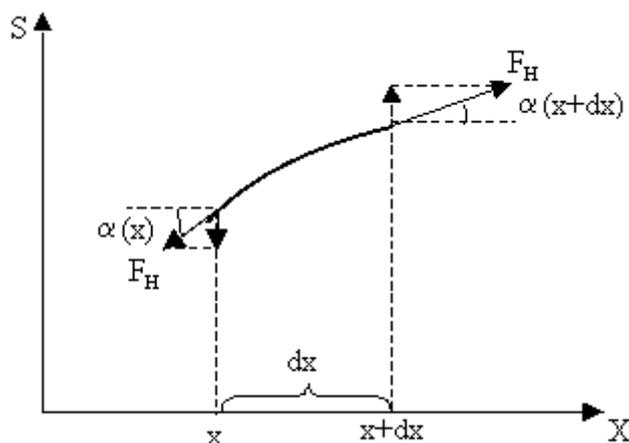


Рисунок 23

Уравнение (121) есть уравнение колебания струны в дифференциальной форме. Решение этого уравнения  $S(x, t) = 2A \cdot \cos(kx) \sin(\omega t)$  (формула (112)).

Найдем  $S''_{xx}(x, t)$  и  $S''_{tt}(x, t)$ :

$$S''_{xx}(x,t) = -2Ak^2 \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\omega t);$$

$$S''_{tt}(x,t) = -2A\omega^2 \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\omega t).$$

Подставим в уравнение (121) и после сокращения получим:

$$\left(\frac{F_H}{\mu}\right) \cdot k^2 = \omega^2,$$

так как  $\frac{\omega}{k} = g$ , то  $g = \sqrt{\frac{F_H}{\mu}}$  (формула 118).

## 6.3 Порядок выполнения работы

### 6.3.1 Определение собственных частот колебаний струны

Измерьте диаметр струны и её длину. Диаметр измерьте несколько раз в разных частях струны.

Включите звуковой генератор З.Г., предварительно установив регулятор частоты и регулятор выходного напряжения в крайнее левое положение.

Постоянный магнит установите в середине струны. Подвесьте к струне груз  $m = (200 \div 500)$  г.

Плавно увеличивая частоту З.Г., зафиксируйте  $\nu_1$  – основную частоту собственных колебаний струны. Зарисуйте профиль волны.

Сдвиньте магнит в положение, соответствующее максимальной амплитуде во второй гармонике (рисунок 21 б). Плавно увеличивая частоту З.Г., зафиксируйте  $\nu_2$ . Зарисуйте профиль волны. Аналогично определите  $\nu_3, \nu_4$

По формуле 120 вычислите  $\nu_1, \nu_2$  и т.д. и сравните со значениями, полученными экспериментально. Результаты опыта и вычислений занесите в таблицу 12.

Таблица 12

Измеренная величина	Номер измерения				
	1	2	3	4	5
Собственная частота, Гц (экспериментальная $\nu_э$ )					
Собственная частота, Гц (теоретическая $\nu_т$ )					
$\Delta\nu = (\nu_э - \nu_т)$					
$\gamma = \frac{\Delta\nu}{\nu} \cdot 100\%$					

### 6.3.2 Определение зависимости основного тона от силы натяжения струны

Изменяя нагрузку от 300 г до 700 г, определите частоту основного тона. По формуле  $\vartheta = \lambda_1 \nu_1$ , используя данные опыта, вычислите скорость распространения упругих волн в каждом случае. Результаты занесите в таблицу 13.

Таблица 13

Измеренная величина	Номер измерения				
	1	2	3	4	5
m, кг	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
F <sub>н</sub> , Н					
$\nu_1$ , Гц					
$\vartheta$ , м/с (экспериментальное)					
$\vartheta$ , м/с (теоретическое)					

Рассчитайте скорость распространения волн в струне теоретически по формуле (119) и сравните с результатами опытов. По данным опыта постройте график зависимости  $\nu_1 = f(F_n)$ .

### 6.4 Контрольные вопросы

- 1 Упругие волны. Уравнение бегущей волны.
- 2 Стоячие волны. Уравнение стоячей волны.
- 3 Уравнение колебаний струны в дифференциальной форме и вывод скорости распространения волны (формула 118).
- 4 Стоячие волны в струне. Собственные частоты колебаний.
- 5 Метод измерения собственных частот, используемый в работе.

### 6.5 Техника безопасности

- 1 Выходное напряжение З.Г. устанавливаются по указанию преподавателя.

- 2 Смену груза на струне производите при отключенном З.Г.
- 3 Не касайтесь руками струны и других токоведущих частей схемы.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Детлаф А. А. Курс физики: В 3т./ А. А. Детлаф, Б.М Яворский Б.М.- М.: Высш. шк., 1989.
2. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3т.-М.: Наука, 1989.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики: В 5т.-М.: Наука, 1979.
4. Трофимова Т. И. Курс физики.- М.: Высш. шк., 1990 и более поздние издания.

*Учебно-методическое издание*

## **КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

*Сборник лабораторных работ*

Составители

**Бондарева** Зоя Сергеевна  
**Иванов** Владимир Григорьевич  
**Коровина** Галина Егоровна  
**Лебедева** Валентина Дмитриевна  
**Петрова** Нина Александровна  
**Удальцов** Виктор Екимович

*Оригинал-макет подготовлен кафедрой общей и экспериментальной физики*

---

Лицензия ЛР № 020815 от 21.09.98

Подписано в печать\*\*\*\*. Формат 60\*84. Бумага офсетная.

Усл. Печ. Л. \*\*. Уч. Изд.л. 5,3. Тираж 500 экз. Заказ №\*\*

Издательско- полиграфический центр Новгородского государственного университета  
им. Ярослава Мудрого: 173003 Великий Новгород, ул. Б. Санкт- Петербургская, 41.

Отпечатано в ИПЦ НовГУ им. Ярослава Мудрого.

173003 Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41