

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИЭИС


В.А. Шульцев
«18» 06 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
учебной дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

по направлению подготовки
01.03.01 Математика
Направленность (профиль)
Математика в образовании, фундаментальных и прикладных
исследованиях

СОГЛАСОВАНО
Начальник отдела обеспечения
деятельности ИЭИС

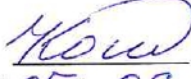

И.Н. Гуркова
«03» 06 2024 г.

Разработал
Доцент кафедры АГ НовГУ


Д.В. Коваленко
«03» 06 2024 г.

Принято на заседании кафедры АГ
Протокол № 11 от 05.06 2024 г.

И.о. заведующего кафедрой АГ


Е.М. Кондрушенко
«05» 06 2024 г.

1 Цели и задачи освоения учебной дисциплины

Цель освоения учебной дисциплины (УД): обучение студентов методам дифференциальной геометрии и топологии, в том числе теории кривых, поверхностей, топологических и метрических пространств для решения задач прикладной математики. Для достижения указанной цели решаются следующие задачи:

- формирование у студентов достаточных представлений о предмете дифференциальной геометрии и ее аналитическом аппарате, а также ее связях со смежными математическими дисциплинами;
- освоение студентами основ классической теории кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, а также – элементами внутренней геометрии поверхности;
- формирование у студентов понятийного аппарата теории топологических и метрических пространств;
- развитие навыков владения студентами прикладными аспектами дифференциальной геометрии и топологии.

2 Место учебной дисциплины в структуре ОПОП

Учебная дисциплина относится к обязательной части основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 01.03.01 Математика, направленность (профиль) Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях.

В результате обучения студент должен овладеть основами дифференциального исчисления кривых и поверхностей, получить навыки свободного обращения с такими объектами, как топологические и метрические пространства.

Изучение учебной дисциплины предполагает наличие входных требований – знания таких дисциплин как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» «Уравнения с частными производными».

Знания, полученные при изучении учебной дисциплины, могут быть использованы для написания студентами выпускных квалификационных работ, а также для продолжения образования в магистратуре, аспирантуре, для самообразования.

3 Требования к результатам освоения учебной дисциплины

Перечень компетенций, которые формируются в процессе освоения учебной дисциплины:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Результаты освоения учебной дисциплины представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты освоения учебной дисциплины

Код и наименование компетенции	Результаты освоения учебной дисциплины (индикаторы достижения компетенций)		
	Знать основные понятия и методы фундаментальных математических дисциплин	Уметь применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Владеть умением осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности			

4 Структура и содержание учебной дисциплины

4.1 Трудоемкость учебной дисциплины

4.1.1 Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения

Части учебной дисциплины	Всего	Распределение по семестрам
		7 семестр
1 Трудоемкость учебной дисциплины (модуля) в зачетных единицах (ЗЕТ)	7	7
2 Контактная аудиторная работа в академических часах (АЧ)	84	84
3 Курсовая работа/курсовой проект (АЧ) (при наличии)	-	-
4 Внеаудиторная СРС в академических часах (АЧ)	132	132
5 Промежуточная аттестация (зачет; дифференцированный зачет; экзамен) (АЧ)	Экзамен 36	Экзамен 36

4.2 Содержание учебной дисциплины

Раздел 1 Элементы топологии

1.1. Метрические пространства. Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества, внутренние, внешние и граничные точки, окрестности. Пространства со счетной базой. Связность, отделимость, компактность.

1.2. Отображения топологических пространств. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Вложения и погружения. Линейная связность. Многообразие.

Раздел 2 Основы теории кривых

2.1. Понятие кривой. Регулярные кривые. Способы аналитического задания кривых. Касательная кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Длина дуги кривой, естественная параметризация кривой.

2.2. Кривизна кривой. Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.

Раздел 3 Основы теории поверхностей

3.1. Понятие поверхности. Регулярная поверхность. Аналитическое задание поверхности. Касательная плоскость поверхности.

3.2. Первая квадратичная форма поверхности и ее первые применения: длина кривой, угол между кривыми, площадь области на поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

3.3. Вторая квадратичная форма поверхности и ее геометрический смысл. Соприкасающийся параболоид поверхности. Типы точек поверхности. Главные кривизны и главные направления, формула Эйлера, средняя и гауссова кривизны.

3.4. Деривационные формулы. Теорема egregium Гаусса. Теорема О.Бонне. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии и их свойства. Теорема Гаусса-Бонне. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

4.3 Трудоемкость разделов учебной дисциплины и контактной работы

Таблица 3 – Трудоемкость разделов учебной дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) учебной дисциплины (модуля), УЭМ, наличие КП/КР	Контактная работа (в АЧ)					Внеауд. СРС (в АЧ)	Форма текущего контроля
		Аудиторная			в т.ч. СРС	Экз		
		ЛЕК	ПЗ	ЛР				
Раздел 1 Элементы топологии								
1.1	Метрические и топологические пространства	4	4		1		12	СРС-1.1
1.2	Отображения топологических пространств	4	4		1		12	
Раздел 2 Основы теории кривых								
2.1	Кривые и их длины	5	5		2		12	СРС-1.2
2.2	Кривизна и кручение кривой	7	7		3		14	
Рубежная аттестация								Контрольн ая работа – 1 Контрольн ый опрос – коллоквиу м 1
Раздел 3 Основы теории поверхностей								
3.1	Понятие поверхности	4	4		1		16	
3.2	Первая квадратичная форма поверхности	6	6		2		22	Домашняя работа-3.1
3.3	Вторая квадратичная форма поверхности	6	6		2		22	Домашняя работа-3.2
3.4	Деривационные формулы	6	6		2		22	
Рубежная аттестация								Контрольн ая работа – 2 Контрольн ый опрос – коллоквиу м 2
Промежуточная аттестация						36		Экзамен
	Итого:	42	42	-	14	36	132	

4.4 Лабораторные работы и курсовые работы/курсовые проекты

4.4.1 Перечень тем лабораторных работ:

Лабораторные работы не предусмотрены учебным планом.

4.4.2 Примерные темы курсовых работ/курсовых проектов:

Курсовые работы/курсовые проекты не предусмотрены учебным планом.

5 Методические рекомендации по организации освоения учебной дисциплины

Таблица 4 – Методические рекомендации по организации лекций

№	Темы лекционных занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
Раздел 1 Метрические и топологические пространства		
1.1	Л 1-4 Метрические пространства. Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества, внутренние, внешние и граничные точки, окрестности. Пространства со счетной базой. Связность, отделимость, компактность. (информационная лекция)	4
1.2	Л 5-8 Отображения топологических пространств. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Вложения и погружения. Линейная связность. Многообразия. (информационная лекция)	4
Раздел 2 Основы теории кривых		
2.1	Л 9-13 Понятие кривой. Регулярные кривые. Способы аналитического задания кривых. Касательная кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Длина дуги кривой, естественная параметризация кривой. (информационная лекция)	5
2.2	Л 14-20 Кривизна кривой. Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. (информационная лекция)	7
Раздел 3 Основы теории поверхностей		
3.1	Л 21-24 Понятие поверхности. Регулярная поверхность. Аналитическое задание поверхности. Касательная плоскость поверхности. (информационная лекция)	4
3.2	Л 25-30 Первая квадратичная форма поверхности и ее первые применения: длина кривой, угол между кривыми, площадь области на поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности. (информационная лекция)	6
3.3	Л 31-36 Вторая квадратичная форма поверхности и ее геометрический смысл. Соприкасающийся параболоид поверхности. Типы точек поверхности. Главные кривизны и главные направления, формула Эйлера, средняя и гауссова кривизны. (информационная лекция)	6
3.4	Л 37-42 Деривационные формулы. Теорема egregium Гаусса. Теорема О.Бонне. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии и их свойства. Теорема Гаусса-Бонне. Поверхности постоянной гауссовой кривизны. (информационная лекция)	6
ИТОГО		42

Таблица 5 – Методические рекомендации по организации практических занятий

№	Темы практических занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
Раздел 1 Метрические и топологические пространства		

1.1	П 1-4 Решение задач на определение топологического и метрического пространств, свойства метрики, компактности и связности пространства, доказательство открытости/замкнутости множества. (работа в группах, обсуждения, СРС)	4
1.2	П 5-8 Решение задач на отображения между пространствами, установление свойств непрерывности и гомеоморфности отображений. (работа в группах, обсуждения, СРС)	4
Раздел 2. Основы теории кривых		
2.1	П 9-13 Решение задач на определение регулярности кривой, различные способы параметризации кривых, вычисление длины дуги кривой. (работа в группах, обсуждения, СРС)	5
2.2	П 14-20 Решение на составление формул Френе, определение кривизны и кручения кривой. (работа в группах, обсуждения, СРС)	7
Раздел 3. Основы теории поверхностей		
3.1	П 21-24 Решение задач на аналитическое задание поверхностей, определение их регулярности (работа в группах, обсуждения, СРС)	4
3.2	П 25-30 Решение задач на вычисление первой квадратичной формы поверхности и ее применения для нахождения длины кривой, угла между кривыми, площади области на поверхности. (работа в группах, обсуждения, СРС)	6
3.3	П 31-36 Решение задач на вычисление второй квадратичной формы поверхности, определение типов точек поверхности, вычисление средней и гауссовой кривизны. (работа в группах, обсуждения, СРС)	6
3.4	П 37-42 Решение задач на производные формулы, вычисление геодезической кривизны кривой на поверхности, нахождение геодезических линий, построение поверхностей постоянной гауссовой кривизны. (работа в группах, обсуждения, СРС)	6
ИТОГО		42

Вся учебная работа по освоению студентами учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» подразделяется на следующие основные виды занятий: лекционные (Л), практические занятия (ПЗ), самостоятельную работу студентов (СРС).

Содержание основных разделов, а также методы и средства проведения занятий представлены выше (Л – 1 академический час, П – 1 академический час). Теоретические разделы соответствуют учебникам [1; 3], практические занятия и домашние задания соответствуют задачникам и учебникам [2; 3]. После каждого практического занятия на дом задаются те примеры, аналоги которых рассмотрены в аудитории, а также примеры, требующие самостоятельного поиска путей решения в соответствии с рассмотренной теорией.

Темы самостоятельных работ представлены в конце каждого раздела. Отчет о проделанной самостоятельной работе и домашние работы представляются в виде конспекта.

Освоение каждого вопроса, включенного в программу учебной дисциплины, предусматривает овладение студентами всех затронутых в нем понятий, теорем и их доказательств, методов и приемов решения соответствующих примеров и задач. Основными источниками, которые могут быть использованы, являются, в первую очередь, лекции преподавателя, а также учебники [1; 3], задачки [2]. Полезной будет и другая литература, которую студент может подобрать сам.

Занятия проводятся, как правило, в диалоговой форме: в ходе лекций преподавателем систематически задаются вопросы студентам, на практических занятиях проводится опрос материала, преподавателем даются образцы решения типовых задач и т.п. После изучения каждой темы на лекционных и практических занятиях проводится небольшая практическая аудиторная самостоятельная работа,

результаты которой учитываются в ходе рубежной аттестации. По завершению изучения каждого раздела учебной дисциплины проводится итоговая контрольная работа (КР). Ниже дается краткое изложение тем домашних заданий, аудиторных практических работ, а также демонстрационных вариантов контрольных работ.

6 Фонд оценочных средств учебной дисциплины

Фонд оценочных средств представлен в Приложении А.

7 Условия освоения учебной дисциплины

7.1 Учебно-методическое обеспечение

Учебно-методического обеспечение учебной дисциплины представлено в Приложении Б.

7.2 Материально-техническое обеспечение

Таблица 7 –Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины

№	Требование к материально-техническому обеспечению согласно ФГОС ВО	Наличие материально-технического оборудования	
1.	Учебные аудитории для проведения учебных занятий	аудитория для проведения лекционных и/или практических занятий: учебная мебель (столы, стулья, доска) помещения для самостоятельной работы (наличие компьютера, выход в Интернет)	
2.	Мультимедийное оборудование	компьютер, проектор, экран, выход в интернет	
3.	Программное обеспечение		
Наименование программного продукта		Обоснование для использования (лицензия, договор, счёт, акт или иное)	Дата выдачи
ContentReader PDF 15 Business Версия для скачивания (годовая лицензия с академической скидкой) * <i>Только для осеннего семестра</i>		Договор №ЗКС/260	31.10.2023
Антиплагиат. Вуз.*		Договор №05//ЕП(У)24-ВБ	18.01.2024
MS Office 365		Безвозмездно передаваемое ВУЗам	-
Adobe Acrobat		свободно распространяемое	-
Teams		Входит в состав MS Office 365	-
Skype		свободно распространяемое	-
Zoom		свободно распространяемое	-
"Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Education Renewal. 250-499 Node I year License" /1 год *		Договор №294/ЕП(У)25-ВБ	13.09.2023
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-14211	09.12.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-12617	21.11.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-max-x86_64-0-11416	26.10.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-9651	28.09.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8801	07.09.2022
Astra Linux Special Edition*		195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8590	01.09.2022

Наименование программного продукта	Обоснование для использования (лицензия, договор, счёт, акт или иное)	Дата выдачи
* отечественное производство		

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» реализуется с помощью дистанционных образовательных технологий:

Онлайн-курс «Основы дифференциальной геометрии» на платформе ДО НовГУ, <https://do.novsu.ru/>.

Приложение А
(обязательное)
Фонд оценочных средств
учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»

1 Структура фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств состоит из двух частей:

а) открытая часть – общая информация об оценочных средствах (название оценочных средств, проверяемые компетенции, баллы, количество вариантов заданий, методические рекомендации для применения оценочных средств и пр.), которая представлена в данном документе, а также те вопросы и задания, которые могут быть доступны для обучающегося;

б) закрытая часть – фонд вопросов и заданий, который не может быть заранее доступен для обучающихся (вопросы к контрольной работе, коллоквиуму и пр.) и который хранится на кафедре.

2 Перечень оценочных средств текущего контроля и форм промежуточной аттестации

Таблица А.1 – Перечень оценочных средств

№	Оценочные средства для текущего контроля	Разделы (темы) учебной дисциплины	Баллы	Проверяемые компетенции
1	Контрольный опрос - коллоквиум - 1	1.1, 1.2, 2.1, 2.2	50	ОПК-1
	Контрольный опрос - коллоквиум - 2	3.1, 3.2, 3.3, 3.4	50	
2	Контрольная работа - 1	1.1, 1.2, 2.1, 2.2	50	
	Контрольная работа - 2	3.1, 3.2, 3.3, 3.4	50	
3	Домашняя работа	3.2, 3.3	50	
4	Самостоятельная работа	1.1, 2.1	50	
Промежуточная аттестация				
5	Экзамен	1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4	50	
	ИТОГО		350	

3 Рекомендации к использованию оценочных средств

Таблица А.2 – Контрольный опрос-коллоквиум (КЛ)

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
25-34 баллов	испытывает трудности при демонстрации знаний, испытывает трудности в определениях терминов и описаниях алгоритмов действий	КЛ 1 - 12 КЛ 2 - 10	2
35-44 баллов	допускает неточности при изложении материала; не всегда четко дает определения терминов, имеет представление об алгоритмах		

	действий		
45-50 баллов	имеет целостное представление об излагаемом материале, определения четкие, безошибочны алгоритмы действий		

Контрольные вопросы (КЛ 1)

- 1 Метрика. Метрическое пространство. Тривиальная метрика. Открытый и замкнутый шар, сфера. Внутренние, внешние и граничные точки множества. Открытые множества. Теорема об объединении и пересечении открытых множеств. Примеры.
- 2 Топологическое пространство. Топология, индуцированная метрикой. Дискретное и антидискретное топологические пространства. Окрестность точки. База топологии. Критерий базы. Пространства со счетной базой. Замыкание множества. Критерий замкнутости множества. Топологическое подпространство. Примеры.
- 3 Связное пространство. Связное множество. Теорема о связности объединения связных множеств с общей точкой. Компоненты связности. Теорема о компонентах связности. Область, замкнутая область. Примеры.
- 4 Отделимые (хаусдорфовы) пространства. Хаусдорфовость метрического пространства. Предел последовательности точек. Теорема о единственности предела точек в хаусдорфовом пространстве. Примеры.
- 5 Покрытия. Компактное пространство. Компактные множества. Критерий компактности множества. Теорема о замкнутости компактного множества в хаусдорфовом пространстве. Критерий компактности множества в евклидовом пространстве. Примеры.
- 6 Непрерывное отображение топологических пространств. Критерий непрерывности отображения. Теорема о непрерывности композиции непрерывных отображений. Теорема о компактности образа компактного пространства при непрерывном отображении. Примеры.
- 7 Гомеоморфизм. Топологические типы. Топологические свойства пространства. Топологичность свойств отделимости, компактности и связности. Гомеоморфность трехмерных евклидоваго и числового пространств. Примеры гомеоморфных пространств.
- 8 Вложение и погружение. Путь. Линейная связность топологического пространства. Теорема о связности отрезка. Теорема о связности линейно связного пространства. Достаточное условие линейной связности.
- 9 Координатная система в топологическом пространстве. Координаты точки. Топологическое многообразие. Примеры одномерных, двумерных и n-мерных многообразий. Многообразие с краем. Примеры.
- 10 Векторная функция. Предел векторной функции, непрерывность, дифференцируемость. Критерий дифференцируемости векторной функции. Примеры.
- 11 Правила дифференцирования векторных функций. Производная вектор-функции постоянной длины. Производные высших порядков. Примеры.
- 12 Простейшие кривые. Элементарная кривая. Гомеоморфность элементарной кривой числовому промежутку. (Общая) кривая. Различные способы аналитического задания кривой. Примеры.
- 13 Обыкновенные и особые точки кривой. Классификация обыкновенных точек. Простая кривая. Примеры.
- 14 Гладкая и регулярная кривая. Условия гладкости. Кусочно-гладкая кривая. Примеры.

- 15 Замена параметра на кривой. Допустимая замена параметра для гладкой кривой класса C^k . Примеры. Гладкость кривой, заданной неявно.
- 16 Касательная кривой. Теорема о существовании касательной. Примеры.
- 17 Длина дуги кривой. Естественный параметр. Длина производной вектор-функции, задающей кривую в естественной параметризации. Примеры.
- 18 Вектор кривизны. Кривизна кривой. Первая формула Френе. Нахождение кривизны кривой в естественной параметризации. Примеры. Критерий простейшей связной кривой.
- 19 Главная нормаль кривой. Канонический репер и его координатные плоскости. Вторая формула Френе. Примеры.
- 20 Кручение кривой. Третья формула Френе. Нахождение кручения кривой в естественной параметризации. Примеры.
- 21 Плоские кривые – их определение и свойства. Критерий плоской кривой. Формулы Френе для плоской кривой. Примеры.
- 22 Вычисление кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации. Примеры.
- 23 Винтовая линия – определение, свойства. Кривизна и кручение винтовой линии. Примеры.

Контрольные вопросы (КЛ 2)

1. Векторная функция двух скалярных аргументов. Предел, непрерывность и дифференцируемость такой функции. Критерий дифференцируемости. Дифференциал. Примеры.
2. Простейшие поверхности. Элементарная поверхность, (общая) поверхность. Обыкновенные точки поверхности и их классификация, особые точки. Простая поверхность, поверхность с краем. Параметрические уравнения поверхности. Примеры.
3. Гладкие поверхности. Класс гладкости. Линия на поверхности. Криволинейные координаты точки. Координатная сеть. Замена параметризации на гладкой поверхности. Якобиан. Допустимая замена параметризации гладкой поверхности. Условие гладкости поверхности – графика функции двух переменных. Гладкость графика неявно заданной функции. Примеры.
4. Гладкая линия на гладкой поверхности. Касательная плоскость. Теорема о касательной плоскости. Нормаль. Уравнения касательной плоскости и нормали. Нормаль к гладкой поверхности, заданной неявно. Примеры.
5. Первая квадратичная форма поверхности. Дифференциал длины дуги гладкой линии. Угол между гладкими линиями. Критерий ортогональности координатной сети на поверхности. Площадь поверхности с краем.
6. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии. Равенство нормальных кривизн линий, имеющих общую касательную.
7. Индикатриса кривизны поверхности. Уравнение индикатрисы. Тип точки поверхности.
8. Главные направления поверхности. Теорема Родрига. Главные кривизны поверхности.
9. Линия кривизны. Средняя и полная (гауссова) кривизны поверхности.
10. Критерий простейшей поверхности.
11. Примеры поверхностей постоянной кривизны. Поверхности вращения. Сфера, псевдосфера, геликоид.
12. Вывод деривационных формул. Подвижный репер. Символы Кристоффеля второго рода.
13. Теорема Гаусса.

14. Геодезическая кривизна линии. Вектор геодезической кривизны. Геодезическая кривизна линии и коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.
15. Изометричные поверхности. Критерий изометричности поверхностей. Следствие об однотипности соответствующих точек. Примеры изометричных поверхностей.
16. Изгибание поверхностей. Поверхность касательных. Ребро возврата. Изометричность поверхности касательных фигуре на плоскости. Развертываемые поверхности.
17. Геодезические линии. Примеры. Теорема о геодезических линиях поверхности. Геодезические линии на плоскости и сфере.
18. Полугеодезическая сеть. Первая квадратичная форма в полугеодезической сети.
19. Расстояние между точками на поверхности. Теорема о расстоянии между точками геодезической линии.
20. Теорема Гаусса-Бонне. Теорема о сумме углов геодезического треугольника. Дефект геодезического треугольника. Примеры (сфера, псевдосфера, плоскость).

Таблица А.3 – Контрольная работа (КР)

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество задач
25-34 баллов	испытывает трудности при выполнении заданий	2	4
35-44 баллов	допускает неточности при выполнении заданий		
45-50 баллов	демонстрирует четкое и безошибочное выполнение заданий		

КР 1 Демонстрационный вариант

1. Дано множество $X = \{a, b\}$. Открытыми множествами назовем пустое множество $\emptyset$, само множество X , и множество $\{a\}$. Доказать, что эта система множеств $T = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ задает топологию на X .
2. Дано множество $X = \{a, b, c, d\}$ и топология $T = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Выяснить, будет ли топологическое пространство (X, T) связным.
3. Винтовая линия γ задана системой уравнений $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < +\infty$. Найдите:
 - величину угла, образованного касательной к γ в точке M с параметром t и осью Oz ;
 - кривизну и кручение γ в точке M ;
 - длину дуги $M_1 M_2$ кривой γ , если t_1 и t_2 – параметры точек M_1 и M_2 , причем $t_1 < t_2$;
 - естественную параметризацию γ .
4. Составить натуральные уравнения кривой: $\gamma: x = e^t$, $y = t \cdot \sqrt{2}$, $z = e^{-t}$, $-\infty < t < +\infty$,

КР 2 Демонстрационный вариант

1. Вычислить первую квадратичную форму следующей поверхности: $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$, $z = av$, $u > 0$, $v \in (-\infty, +\infty)$, $a \neq 0$.
2. Найти внутренние углы треугольника на поверхности,

ограниченного линиями АВ: $v=0$, ВС: $u=1$, АС: $u=v$, если задана первая квадратичная форма поверхности:
 $I=2du^2+2dudv+(1+u^2)dv^2$.

3. Вычислить вторую квадратичную форму следующей поверхности: $x=a \cdot \cos u \cdot \cos v$, $y=a \cdot \sin u \cdot \cos v$, $z=c \cdot \sin v$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Найти геодезическую кривизну винтовой линии $\gamma: x = a \cos v$, $y = a \sin v$, $z = bv$ на цилиндре, заданном системой: $x = a \cos v$, $y = a \sin v$, $z = u$.

Примечание: Задачи для контрольных работ берутся из учебных изданий [2; 3], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.4 – Самостоятельная работа (СР)

Критерии оценки		Количество заданий
13-17 баллов	Не менее 50%, но менее 70% от числа баллов, выделенных на СР	3 из контролируемого раздела
18-22 баллов	Не менее 70%, но менее 90% от числа баллов, выделенных на СР	
23-25 баллов	Не менее 90% от числа баллов, выделенных на СР	

Темы СРС 1.1, 1.2:

1 Задачи на гомеоморфизмы топологических пространств.

2 Задачи на вычисление длин дуг линий.

3 Задачи на вычисление кривизны и кручения линии, составления репера Френе.

Пример СРС

1. Найти отображение, задающее гомеоморфизм между следующими множествами числовой прямой: $(0; 10]$ и $[-4; 0)$.

2. Вычислите длину эллипса с полуосями $a = 4$ и $b = 2$.

3. На кривой $\gamma: x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = \sin t$ найти:

– кривизну и кручение в произвольной точке;

– репер Френе в точке с параметром $\frac{\pi}{2}$.

Примечание: Задачи для самостоятельных работ берутся из учебных изданий [2; 3], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.5 – Домашняя работа (ДР)

Критерии оценки		Количество заданий
13-17 баллов	Не менее 50%, но менее 70% от числа баллов, выделенных на ДР	3 из контролируемого раздела
18-22 баллов	Не менее 70%, но менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	
23-25 баллов	Не менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	

Темы домашней работы 3.1, 3.2:

1 Задачи на применение первой квадратичной формы для вычисления длин кривых, углов между ними, площадей поверхностей.

2 Задачи на вычисление нормальной, средней и гауссовой кривизны поверхности.

3 Вычисление суммы углов геодезического треугольника.

Пример ДР

1. Покажите, что площади областей на параболоидах $z = \frac{a(x^2 + y^2)}{2}$ и $z = axu$, проектирующиеся на одну и ту же область плоскости Oxy , равны.
2. Найдите значение нормальной кривизны поверхности Φ в точке $M(u; v)$ в направлении ее координатных линий (u) , (v) , если поверхность Φ задана системой: $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$. Найдите также значения средней и гауссовой кривизны Φ в точке $M(u; v)$.
3. Найти сумму внутренних углов сферического треугольника с площадью σ , если содержащая его сфера имеет радиус R_0 .

Примечание: Задачи для домашних работ берутся из учебных изданий [2; 3], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.6 – Экзамен

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
25-34 баллов	ответ не полный, слабо аргументированный, демонстрирует несформированность некоторых практических умений, уровень мотивации учения низкий	14	3
35-44 баллов	ответ полный, достаточно обоснованный, с отдельными неточностями в изложении, пути решения практических задач не всегда рациональны, уровень мотивации учения средний		
45-50 баллов	ответ полный с достаточно глубоким пониманием теоретических и практических вопросов, изложение четкое, логически выдержанное, уровень мотивации учения высокий		

Контрольные вопросы к экзамену «Дифференциальная геометрия и топология»

1. Метрика. Метрическое пространство. Тривиальная метрика. Открытый и замкнутый шар, сфера. Внутренние, внешние и граничные точки множества. Открытые множества. Теорема об объединении и пересечении открытых множеств. Примеры.
2. Топологическое пространство. Топология, индуцированная метрикой. Дискретное и антидискретное топологические пространства. Окрестность точки. База топологии. Критерий базы. Пространства со счетной базой. Замыкание

- множества. Критерий замкнутости множества. Топологическое подпространство. Примеры.
3. Связное пространство. Связное множество. Теорема о связности объединения связных множеств с общей точкой. Компоненты связности. Теорема о компонентах связности. Область, замкнутая область. Примеры.
 4. Отделимые (хаусдорфовы) пространства. Хаусдорфовость метрического пространства. Предел последовательности точек. Теорема о единственности предела точек в хаусдорфовом пространстве. Примеры.
 5. Покрытия. Компактное пространство. Компактные множества. Критерий компактности множества. Теорема о замкнутости компактного множества в хаусдорфовом пространстве. Критерий компактности множества в евклидовом пространстве. Примеры.
 6. Непрерывное отображение топологических пространств. Критерий непрерывности отображения. Теорема о непрерывности композиции непрерывных отображений. Теорема о компактности образа компактного пространства при непрерывном отображении. Примеры.
 7. Гомеоморфизм. Топологические типы. Топологические свойства пространства. Топологичность свойств отделимости, компактности и связности. Гомеоморфность трехмерных евклидоваго и числового пространств. Примеры гомеоморфных пространств.
 8. Вложение и погружение. Путь. Линейная связность топологического пространства. Теорема о связности отрезка. Теорема о связности линейно связного пространства. Достаточное условие линейной связности.
 9. Координатная система в топологическом пространстве. Координаты точки. Топологическое многообразие. Примеры одномерных, двумерных и n -мерных многообразий. Многообразие с краем. Примеры.
 10. Векторная функция. Предел векторной функции, непрерывность, дифференцируемость. Критерий дифференцируемости векторной функции. Примеры.
 11. Правила дифференцирования векторных функций. Производная вектор-функции постоянной длины. Производные высших порядков. Примеры.
 12. Простейшие кривые. Элементарная кривая. Гомеоморфность элементарной кривой числовому промежутку. (Общая) кривая. Различные способы аналитического задания кривой. Примеры.
 13. Обыкновенные и особые точки кривой. Классификация обыкновенных точек. Простая кривая. Примеры.
 14. Гладкая и регулярная кривая. Условия гладкости. Кусочно-гладкая кривая. Примеры.
 15. Замена параметра на кривой. Допустимая замена параметра для гладкой кривой класса S_k . Примеры. Гладкость кривой, заданной неявно.
 16. Касательная кривой. Теорема о существовании касательной. Примеры.
 17. Длина дуги кривой. Естественный параметр. Длина производной вектор-функции, задающей кривую в естественной параметризации. Примеры.
 18. Вектор кривизны. Кривизна кривой. Первая формула Френе. Нахождение кривизны кривой в естественной параметризации. Примеры. Критерий простейшей связной кривой.
 19. Главная нормаль кривой. Канонический репер и его координатные плоскости. Вторая формула Френе. Примеры.
 20. Кручение кривой. Третья формула Френе. Нахождение кручения кривой в естественной параметризации. Примеры.
 21. Плоские кривые – их определение и свойства. Критерий плоской кривой. Формулы Френе для плоской кривой. Примеры.

22. Вычисление кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации. Примеры.
23. Винтовая линия – определение, свойства. Кривизна и кручение винтовой линии. Примеры.
24. Векторная функция двух скалярных аргументов. Предел, непрерывность и дифференцируемость такой функции. Критерий дифференцируемости. Дифференциал. Примеры.
25. Простейшие поверхности. Элементарная поверхность, (общая) поверхность. Обыкновенные точки поверхности и их классификация, особые точки. Простая поверхность, поверхность с краем. Параметрические уравнения поверхности. Примеры.
26. Гладкие поверхности. Класс гладкости. Линия на поверхности. Криволинейные координаты точки. Координатная сеть. Замена параметризации на гладкой поверхности. Якобиан. Допустимая замена параметризации гладкой поверхности. Условие гладкости поверхности – графика функции двух переменных. Гладкость графика неявно заданной функции. Примеры.
27. Гладкая линия на гладкой поверхности. Касательная плоскость. Теорема о касательной плоскости. Нормаль. Уравнения касательной плоскости и нормали. Нормаль к гладкой поверхности, заданной неявно. Примеры.
28. Первая квадратичная форма поверхности. Дифференциал длины дуги гладкой линии. Угол между гладкими линиями. Критерий ортогональности координатной сети на поверхности. Площадь поверхности с краем.
29. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии. Равенство нормальных кривизн линий, имеющих общую касательную.
30. Индикатриса кривизны поверхности. Уравнение индикатрисы. Тип точки поверхности.
31. Главные направления поверхности. Теорема Родрига. Главные кривизны поверхности.
32. Линия кривизны. Средняя и полная (гауссова) кривизны поверхности.
33. Критерий простейшести поверхности.
34. Примеры поверхностей постоянной кривизны. Поверхности вращения. Сфера, псевдосфера, геликоид.
35. Вывод дериационных формул. Подвижный репер. Символы Кристоффеля второго рода.
36. Теорема Гаусса.
37. Геодезическая кривизна линии. Вектор геодезической кривизны. Геодезическая кривизна линии и коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.
38. Изометричные поверхности. Критерий изометричности поверхностей. Следствие об однотипности соответствующих точек. Примеры изометричных поверхностей.
39. Изгибание поверхностей. Поверхность касательных. Ребро возврата. Изометричность поверхности касательных фигуре на плоскости. Развертывающиеся поверхности.
40. Геодезические линии. Примеры. Теорема о геодезических линиях поверхности. Геодезические линии на плоскости и сфере.
41. Полугеодезическая сеть. Первая квадратичная форма в полугеодезической сети.
42. Расстояние между точками на поверхности. Теорема о расстоянии между точками геодезической линии.
43. Теорема Гаусса-Бонне. Теорема о сумме углов геодезического треугольника. Дефект геодезического треугольника. Примеры (сфера, псевдосфера, плоскость).

Пример экзаменационного билета:

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
Кафедра алгебры и геометрии

Билет № 1

Учебная дисциплина **Дифференциальная геометрия и топология**

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Направленность (профиль)

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях

1 Топологическое пространство. Топология, индуцированная метрикой. Дискретное и антидискретное топологические пространства. Окрестность точки. База топологии. Критерий базы. Пространства со счетной базой. Замыкание множества. Критерий замкнутости множества. Топологическое подпространство. Примеры.

2 Кручение кривой. Третья формула Френе. Нахождение кручения кривой в естественной параметризации. Примеры.

3 Изгибание поверхностей. Поверхность касательных. Ребро возврата. Изометричность поверхности касательных фигуре на плоскости. Развертывающиеся поверхности.

Принято на заседании кафедры АГ

_____ 2023 г. Протокол № _____

И.о. заведующего кафедрой АГ _____ Кондрушенко Е.М.

Все материалы для проведения промежуточного контроля хранятся на кафедре.

Приложение Б
(обязательное)
Карта учебно-методического обеспечения
учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»

Таблица Б.1 – Основная литература*

Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библиот. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
1 Атанасян Л.С. Геометрия: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. вузов в 2 ч. Ч. 2. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – 2-е изд. (гриф Минобрнауки). – М.: КноРус, 2011. – 422 с.	10	
2 Гусева Н.И. Сборник задач по геометрии: учебное пособие для вузов: в 2 ч. Ч.2. (Гриф УМО) / Н.И. Гусева, Н.С. Денисова, О.Ю. Тесля. – М.: КноРус, 2012. – 527 с.	10	
3 Вернер А.Л. Геометрия: учебное пособие для вузов. Ч. 2./ А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор, С.А. Франгулов. – СПб.: Специальная литература, 1997. - 320 с.	18	
Учебно-методические издания		
Дифференциальная геометрия и топология: рабочая программа для направления подготовки 01.03.01 Математика. Направленность (профиль) Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях / Составитель Д.В. Коваленко; Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого. - Великий Новгород, 2023. -19 с.		

Таблица Б.2 – Дополнительная литература

Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библиот. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
5. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология = Differential geometry and topology. - М. : Мир, 1970. - 233, [1] с. - Библиогр.: с.222-223.	1	
Электронные ресурсы	Электронный адрес	Примечание
Шестопалов П. Дифференциальная геометрия: видеокурс: Текст: электронный. – URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLdupor3IULXjI4nfxCYctTHqNaJ8GHNJu .		
Математические этюды: видеолекции Фонда: Текст: электронный. – URL: http://www.etudes.ru/ru/		

Таблица Б.3 – Информационное обеспечение модуля

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
Электронная библиотека НовГУ		
Электронный каталог научной библиотеки http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный
База данных «Аналитика» (картотека статей) http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
Научная библиотека
Сектор учета *М.С.С.*

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
ЭБС «Электронная библиотечная система Новгородского государственного университета» (ЭБС НовГУ). Универсальный ресурс. Внутривузовские издания НовГУ.	Договор № 230 от 30.12.2022 с ООО «КДУ»	бессрочный
ЭБС «Лань» Единая профессиональная база данных для классических вузов – Издательство Лань «ЭБС» ЭБС ЛАНЬ	Договор № 34/ЕП(Т)23 от 22.12.2023 с ООО «Издательство ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Коллекции: «Физика – Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана», «Информатика - Издательство ДМК Пресс», «Журналистика и медиа-бизнес - Издательство Аспект Пресс»	Договор № 33/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «ЭБС ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Универсальный ресурс	Договор № СЭБ НВ–283 с ООО «ЭБС ЛАНЬ» от 09.11.2020	с 09.11.2020 по 31.12.2023 Договор пролонгирован до 31.12.2024 (основание: п.6.1.)
«ЭБС ЮРАЙТ www.biblio-online.ru » Универсальный ресурс.	Договор № 35/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
«Национальная электронная библиотека» Универсальный ресурс.	Договор №101/НЭБ/2338П от 14.03.2022 с ФБГУ «Российская Государственная библиотека»	с 14.03.2022 по 13.03.2027
ЭБС «IPRsmart» Универсальный ресурс.	Лицензионный договор № 11040/23П/31/ЕП(У)23 от 22.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «IPRsmart» Электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов «РУССКИЙ ЯЗЫК КАК ИНОСТРАННЫЙ» (РКИ).	Договор № 436/ЕП(У)23-ВБ от 15.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.01.2025
ЭБС Polpred.com. Обзор СМИ. Электронные статьи 600 деловых газет, журналов, информагентств за 20 лет.	Соглашение с ООО «ПОЛПРЕД Справочники». Тестовый доступ.	с 01.01.2023
Профессиональные базы данных		
Президентская библиотека им. Б. Н. Ельцина https://www.prilib.ru/	в открытом доступе	-
База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU https://elibrary.ru/	в открытом доступе	-
База данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/	в открытом доступе	-
База данных электронно-библиотечной системы «Национальная электронная библиотека» https://нэб.рф	в открытом доступе	-
Информационные справочные системы		

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
Университетская информационная система «РОССИЯ» https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/uis-rossiya	в открытом доступе	-
Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование» https://openedu.ru	в открытом доступе	-
Портал открытых данных Российской Федерации https://data.gov.ru	в открытом доступе	-
Справочно-правовая система КонсультантПлюс (КонсультантПлюс студенту и преподавателю) www.consultant.ru/edu/	в открытом доступе	-

Проверено НБ НовГУ



И.о. зав. кафедрой АГ И.О. Кондрушенко Е.М. Кондрушенко
подпись И.О. Фамилия
 «05» 06 2024 г.

Приложение В
(обязательное)
Лист актуализации рабочей программы
учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»

Рабочая программа актуализирована на 20__/20__ учебный год.
Протокол № ____ заседания кафедры от «____» _____ 20__ г.
Разработчик: _____
Зав. кафедрой _____

Рабочая программа актуализирована на 20__/20__ учебный год.
Протокол № ____ заседания кафедры от «____» _____ 20__ г.
Разработчик: _____
Зав. кафедрой _____

Рабочая программа актуализирована на 20__/20__ учебный год.
Протокол № ____ заседания кафедры от «____» _____ 20__ г.
Разработчик: _____
Зав. кафедрой _____

Таблица В.1 Перечень изменений, внесенных в рабочую программу:

Номер изменения	№ и дата протокола заседания кафедры	Содержание изменений	Зав. кафедрой	Подпись