

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИЭИС

 В.А. Шульцев

«18» 06 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

учебной дисциплины

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

по направлению подготовки

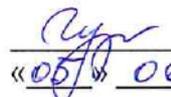
01.03.01 Математика

Направленность (профиль)

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях

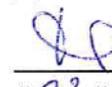
СОГЛАСОВАНО

Начальник отдела обеспечения
деятельности ИЭИС

 И.Н. Гуркова
«05» 06 2024 г.

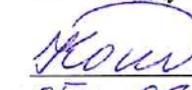
Разработал

Доцент кафедры АГ НовГУ

 Д.В. Коваленко
«03» 06 2024 г.

Принято на заседании кафедры АГ
Протокол № 11 от 05.06 2024 г.

И.о. заведующего кафедрой АГ

 Е.М. Кондрушенко
«05» 06 2024 г.

1 Цели и задачи освоения учебной дисциплины

Цель освоения учебной дисциплины (УД): обучение студентов методам алгебры и дискретной математики, в том числе теории отношений, комбинаторики, теории графов для решения задач прикладной математики. Для достижения указанной цели решаются следующие задачи:

- формирование у студентов необходимого объема знаний по основам дискретной математики;
- анализ прикладных задач, для решения которых применяются методы дискретной математики;
- ознакомление студентов с основными комбинаторными методами и их приложениями;
- развитие навыков владения студентами прикладными аспектами теории алгебраических структур;
- формирование у студентов навыков работы с графами.

2 Место учебной дисциплины в структуре ОПОП

Учебная дисциплина относится к обязательной части основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 01.03.01 Математика, направленность (профиль) Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях.

В результате обучения студент должен овладеть основами комбинаторного мышления, получить навыки свободного обращения с такими дискретными объектами, как алгебраические структуры, графы.

Изучение учебной дисциплины предполагает наличие входных требований – знания таких дисциплин как «Алгебра», «Математический анализ», «Аналитическая геометрия», «Математическая логика».

Освоение учебной дисциплины является компетентностным ресурсом для изучения учебных дисциплин математического и естественно-научного цикла: «Основы информатики и программирования», «Базы данных», «Методы защиты информации».

3 Требования к результатам освоения учебной дисциплины

Перечень компетенций, которые формируются в процессе освоения учебной дисциплины:

ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении.

Результаты освоения учебной дисциплины представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты освоения учебной дисциплины

Код и наименование компетенции	Результаты освоения учебной дисциплины (индикаторы достижения компетенций)
--------------------------------	--

ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	Знать основные задачи и области применения методов математического моделирования, основные принципы математического моделирования, методы построения и анализа математических моделей	Уметь применять методы математического моделирования к решению конкретных задач из различных областей естествознания, техники, экономики и управления; выбирать методы исследования математических моделей; строить и исследовать математические модели	Владеть навыками применения математического аппарата к исследуемым моделям
--	---	---	--

4 Структура и содержание учебной дисциплины

4.1 Трудоемкость учебной дисциплины

4.1.1 Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Трудоемкость учебной дисциплины для очной формы обучения

Части учебной дисциплины	Всего	Распределение по семестрам
		3 семестр
1 Трудоемкость учебной дисциплины (модуля) в зачетных единицах (ЗЕТ)	3	3
2 Контактная аудиторная работа в академических часах (АЧ)	42	42
3 Курсовая работа/курсовой проект (АЧ) (при наличии)	-	-
4 Внеаудиторная СРС в академических часах (АЧ)	66	66
5 Промежуточная аттестация (зачет; дифференцированный зачет; экзамен) (АЧ)	Дифференцированный зачет	Дифференцированный зачет

4.2 Содержание учебной дисциплины

Раздел 1 Множества и отношения

1.1 Множества:

Множества. Способы задания множеств. Подмножества. Собственные и несобственные подмножества. Пустое и универсальное множества. Равенство множеств. Булеан. Мощность булеана конечного множества. Операции объединения, пересечения, разности и дополнения множеств. Свойства операций. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества. Счетные множества. Счетность множеств Z и Q . Счетность конечного или счетного объединения счетных множеств. Несчетность множества R . Континуум. Упорядоченные пары и наборы. Равенство упорядоченных наборов. Прямое (декартово) произведение двух и нескольких множеств. Ассоциативность прямого произведения множеств. Степень множества. Мощность декартова произведения конечных множеств. Счетность декартова произведения конечного числа счетных множеств.

1.2 Отношения:

Бинарные отношения на множествах. Способы задания бинарных отношений. Граф, график, матрица смежности бинарного отношения. Области отправления, прибытия, определения и значений бинарного отношения. Инфиксная форма записи. Обратное отношение. Дополнение отношения. Тожественное и универсальное отношения. N-арное отношение. Композиция отношений. Ассоциативность композиции. Степень отношения. Теорема о степени отношения на конечном множестве. Свойства отношений. Рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Линейные отношения. Полные и частичные отношения. Отношение эквивалентности, отношение порядка. Критерии рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, линейности. Ядро отношения, его свойства. Замыкание отношений. Транзитивное и рефлексивное замыкания.

Раздел 2 Комбинаторика

2.1 Комбинаторные правила и конфигурации:

Общие правила комбинаторики. Комбинаторные конфигурации. Размещения с повторениями. Размещения без повторений. Перестановки. Перестановки с повторениями. Двойные факториалы, их свойства. Сочетания. Сочетания с повторениями.

2.2 Комбинаторные свойства и формулы:

Биномиальные коэффициенты. Свойства 1-3. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона, его следствия. Свойство 4. Тожество Коши. Полиномиальные коэффициенты. Полиномиальная формула, ее следствие. Формула включений и исключений.

Раздел 3 Алгебраические структуры

3.1 Общие алгебраические структуры:

Алгебры, подалгебры. Примеры. Пересечение подалгебр. Свойства. Замыкание. Свойства замыкания. Системы образующих. Примеры. Гомоморфизмы алгебр. Виды гомоморфизмов. Изоморфность алгебр как отношение эквивалентности. Примеры.

3.2 Виды алгебр:

Полугруппы, свободные полугруппы. Определяющие соотношения. Проблема распознавания слов. Моноиды. Теорема Кэли. Примеры. Группы. Свойства групп. Примеры. Группа перестановок. Кольца. Свойства колец. Примеры. Области целостности. Поля. Свойства полей. Примеры. Векторные пространства. Свойства векторных пространств. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов.

Раздел 4 Графы

4.1 Графы и их элементы:

Графы, отношения смежности и инцидентности в графе. Диаграммы. Орграфы, псевдографы, мультиграфы, гиперграфы, помеченные графы. Примеры. Изоморфизм графов. Инварианты. Подграфы. Примеры. Степень вершины графа. Регулярные графы. Лемма о рукопожатиях, ее следствия. Примеры.

4.2 Маршруты в графах:

Маршруты, цепи, циклы. Компоненты связности графа. Вполне несвязные графы. Примеры. Расстояние между вершинами. Геодезические. Ярус. Диаметр, графа. Эксцентриситет вершины. Радиус и центр графа. Примеры.

4.3 Виды графов:

Виды графов. Полные графы. Двудольные графы. Критерий двудольности, его следствие. Направленные орграфы. Примеры. Лес и (свободное) дерево. Примеры. Древочисленные и субциклические графы. Критерий дерева. Ориентированные деревья. Теорема о свойствах ордерова. Крона и ярусы ордерова. Потомки и предки узлов. Эйлеровы циклы и цепи, эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа.

4.4 Операции над графами:

Операции над графами. Свойства операций. Примеры. Точки сочленения, блоки, мосты. Критерий связности графа.

4.5 Теоремы Менгера и Холла:

Вершинная и рёберная связность. Теорема об оценке вершинной и рёберной связности. Теорема об оценке числа рёбер, следствия из нее. Вершинно- и рёберно-непересекающиеся цепи. Разделяющее множество вершин, разрез. Примеры. Оценка мощностей P и S . Теорема Менгера в вершинной форме (с доказательством). Другие формулировки теоремы Менгера. 3 задачи, приводящие к теореме Холла: задача о свадьбах, трансверсаль, совершенное паросочетание. Теорема Холла.

4.3 Трудоемкость разделов учебной дисциплины и контактной работы

Таблица 3 – Трудоемкость разделов учебной дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) учебной дисциплины (модуля), УЭМ, наличие КП/КР	Контактная работа (в АЧ)					Внеауд. СРС (в АЧ)	Форма текущего контроля
		Аудиторная			в т.ч. СРС	Экз		
		ЛЕК	ПЗ	ЛР				
Раздел 1 Множества и отношения								
1.1	Множества	1	2		0,5		4	
1.2	Отношения	1	2		0,5		4	
Раздел 2 Комбинаторика								
2.1	Комбинаторные правила и конфигурации	1	2		0,5		5	СРС-1.1, 1.2
2.2	Комбинаторные свойства и формулы	1	2		0,5		5	
<i>Рубежная аттестация</i>								Контрольная работа - 1 Контрольный опрос – коллоквиум 1
Раздел 3 Алгебраические структуры								
3.1	Общие алгебраические структуры	1	2		0,5		5	
3.2	Виды алгебр	2	4		1		9	Домашняя работа. - 3.1, 3.2
Раздел 4 Графы								
4.1	Графы и их элементы	1	2		0,5		5	
4.2	Маршруты в графах	1	2		0,5		5	
4.3	Виды графов	2	4		0,5		9	
4.4	Операции над графами	1	2		0,5		5	
<i>Рубежная аттестация</i>								Контрольная работа - 2 Контрольный опрос – коллоквиум 2
4.5	Теоремы Менгера и Холла	2	4	-	0,5		10	

Промежуточная аттестация							дифференцированный зачет
Итого:		14	28	-	6	66	

4.4 Лабораторные работы и курсовые работы/курсовые проекты

4.4.1 Перечень тем лабораторных работ:

Лабораторные работы не предусмотрены учебным планом.

4.4.2 Примерные темы курсовых работ/курсовых проектов:

Курсовые работы/курсовые проекты не предусмотрены учебным планом.

5 Методические рекомендации по организации освоения учебной дисциплины

Таблица 4 – Методические рекомендации по организации лекций

№	Темы лекционных занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
Раздел 1 Множества и отношения		
1.1	Л 1 Множества. Способы задания множеств. Подмножества. Собственные и несобственные подмножества. Пустое и универсальное множества. Равенство множеств. Булеан. Мощность булеана конечного множества. Операции объединения, пересечения, разности и дополнения множеств. Свойства операций. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества. Счетные множества. Счетность множеств Z и Q . Счетность конечного или счетного объединения счетных множеств. Несчетность множества R . Континуум. Упорядоченные пары и наборы. Равенство упорядоченных наборов. Прямое (декартово) произведение двух и нескольких множеств. Ассоциативность прямого произведения множеств. Степень множества. Мощность декартова произведения конечных множеств. Счетность декартова произведения конечного числа счетных множеств (информационная лекция)	1
1.2	Л 2 Бинарные отношения на множествах. Способы задания бинарных отношений. Граф, график, матрица смежности бинарного отношения. Области отправления, прибытия, определения и значений бинарного отношения. Инфиксная форма записи. Обратное отношение. Дополнение отношения. Тождественное и универсальное отношения. N -арное отношение. Композиция отношений. Ассоциативность композиции. Степень отношения. Теорема о степени отношения на конечном множестве. Свойства отношений. Рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Линейные отношения. Полные и частичные отношения. Отношение эквивалентности, отношение порядка. Критерии рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, линейности. Ядро отношения, его свойства. Замыкание отношений. Транзитивное и рефлексивное замыкания (информационная лекция)	1
Раздел 2 Комбинаторика		
2.1	Л 3 Общие правила комбинаторики. Комбинаторные конфигурации. Размещения с повторениями. Размещения без повторений. Перестановки. Перестановки с повторениями. Двойные факториалы, их свойства. Сочетания. Сочетания с повторениями (информационная лекция)	1

	лекция)	
2.2	Л 4 Биномиальные коэффициенты. Свойства 1-3. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона, его следствия. Свойство 4. Тождество Коши. Полиномиальные коэффициенты. Полиномиальная формула, ее следствие. Формула включений и исключений (информационная лекция)	1
Раздел 3 Алгебраические структуры		
3.1	Л 5 Алгебры, подалгебры. Примеры. Пересечение подалгебр. Свойства. Замыкание. Свойства замыкания. Системы образующих. Примеры. Гомоморфизмы алгебр. Виды гомоморфизмов. Изоморфность алгебр как отношение эквивалентности. Примеры (информационная лекция)	1
3.2	Л 6-7 Полугруппы, свободные полугруппы. Определяющие соотношения. Проблема распознавания слов. Моноиды. Теорема Кэли. Примеры. Группы. Свойства групп. Примеры. Группа перестановок. Кольца. Свойства колец. Примеры. Области целостности. Поля. Свойства полей. Примеры. Векторные пространства. Свойства векторных пространств. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов (информационная лекция)	2
Раздел 4 Графы		
4.1	Л 8 Графы, отношения смежности и инцидентности в графе. Диаграммы. Орграфы, псевдографы, мультиграфы, гиперграфы, помеченные графы. Примеры. Изоморфизм графов. Инварианты. Подграфы. Примеры. Степень вершины графа. Регулярные графы. Лемма о рукопожатиях, ее следствия. Примеры (информационная лекция)	1
4.2	Л 9 Маршруты, цепи, циклы. Компоненты связности графа. Вполне несвязные графы. Примеры. Расстояние между вершинами. Геодезические. Ярус. Диаметр, графа. Эксцентриситет вершины. Радиус и центр графа. Примеры (информационная лекция)	1
4.3	Л 10-11 Виды графов. Полные графы. Двудольные графы. Критерий двудольности, его следствие. Направленные орграфы. Примеры. Лес и (свободное) дерево. Примеры. Древочисленные и субциклические графы. Критерий дерева. Ориентированные деревья. Теорема о свойствах ордерова. Крона и ярусы ордерова. Потомки и предки узлов. Эйлеровы циклы и цепи, эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа (информационная лекция)	2
4.4	Л 12 Операции над графами. Свойства операций. Примеры. Точки сочленения, блоки, мосты. Критерий связности графа (информационная лекция)	1
4.5	Л 13-14 Вершинная и рёберная связность. Теорема об оценке вершинной и рёберной связности. Теорема об оценке числа рёбер, следствия из нее. Вершинно- и рёберно-непересекающиеся цепи. Разделяющее множество вершин, разрез. Примеры. Оценка мощностей P и S . Теорема Менгера в вершинной форме (с доказательством). Другие формулировки теоремы Менгера. 3 задачи, приводящие к теореме Холла: задача о свадьбах, трансверсаль, совершенное паросочетание. Теорема Холла (информационная лекция)	2
ИТОГО		14

Таблица 5 – Методические рекомендации по организации практических занятий

№	Темы практических занятий (форма проведения)	Трудоемкость в АЧ
Раздел 1 Множества и отношения		
1.1	П 1-2 Решение задач на различные способы задания множеств, операции над множествами, построение изоморфизма множеств, доказательство	2

	счетности/континуальности множества (работа в группах, обсуждения, СРС)	
1.2	П 3-4 Решение задач на различные способы задания бинарных отношений, установление свойств бинарных отношений (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
Раздел 2. Комбинаторика		
2.1	П 5-6 Решение задач на общие правила комбинаторики и элементарные комбинаторные конфигурации (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
2.2	П 7-8 Решение смешанных комбинаторных задач, задач на свойства биномиальных коэффициентов, формулу включений и исключений. (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
Раздел 3. Алгебраические структуры		
3.1	П 9-10 Решение задач на замкнутость алгебр, гомоморфизмы алгебр (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
3.2	П 11-14 Решение задач на свойства полугрупп, групп, колец, полей, группу перестановок. (работа в группах, обсуждения, СРС)	4
Раздел 4. Графы		
4.1	П 15-16 Решение задач на изоморфизм графов, определение степеней вершин графа, построение регулярных графов (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
4.2	П 17-18 Решение задач на различные маршруты в графах, компоненты связности графа. Определение расстояния между вершинами, вычисление эксцентриситетов вершин. Построение геодезических, ярусов, центра графа (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
4.3	П 19-22 Решение задач на полные, двудольные графы, деревья, ордеревья, эйлеровы графы (работа в группах, обсуждения, СРС)	4
4.4	П 23-24 Решение задач на операции над графами, связность графов, нахождение точек сочленения, мостов, блоков (работа в группах, обсуждения, СРС)	2
5.1	П 25-28 Решение задач на вершинную и реберную связность, теоремы Менгера и Холла. (работа в группах, обсуждения СРС)	4
ИТОГО		28

Вся учебная работа по освоению студентами учебной дисциплины «Дискретная математика» подразделяется на следующие основные виды занятий: лекционные (Л), практические занятия (ПЗ), самостоятельную работу студентов (СРС).

Содержание основных разделов, а также методы и средства проведения занятий представлены выше (Л – 1 академический час, ПЗ – 1 академический час). Теоретические разделы соответствуют учебникам [1; 2], практические занятия и домашние задания соответствуют задачникам и учебникам [3; 7]. После каждого практического занятия на дом задаются те примеры, аналоги которых рассмотрены в аудитории, а также примеры, требующие самостоятельного поиска путей решения в соответствии с рассмотренной теорией.

Темы самостоятельных работ представлены в конце каждого раздела. Отчет о проделанной самостоятельной работе и домашние работы представляются в виде конспекта.

Освоение каждого вопроса, включенного в программу учебной дисциплины, предусматривает овладение студентами всех затронутых в нем понятий, теорем и их доказательств, методов и приемов решения соответствующих примеров и задач. Основными источниками, которые могут быть использованы, являются, в первую очередь, лекции преподавателя, а также учебники [1; 2], задачники [3; 7]. Полезной будет и другая литература, которую студент может подобрать сам.

Занятия проводятся, как правило, в диалоговой форме: в ходе лекций преподавателем систематически задаются вопросы студентам, на практических

занятиях проводится опрос материала, преподавателем даются образцы решения типовых задач и т.п. После изучения каждой темы на лекционных и практических занятиях проводится небольшая практическая аудиторная самостоятельная работа, результаты которой учитываются в ходе рубежной аттестации. По завершению изучения каждого раздела учебной дисциплины проводится итоговая контрольная работа (КР). Ниже дается краткое изложение тем домашних заданий, аудиторных практических работ, а также демонстрационных вариантов контрольных работ.

Специфика дисциплины состоит в том, что в ней представлены разделы математики, практически отсутствующие в традиционном школьном курсе, в том числе такие как «Алгебраические структуры», требующие высокого уровня абстрагирования. Другой особенностью служит малое количество аудиторных часов, выделяемых на самостоятельную работу студентов.

Изучаемый в курсе материал является базовым и крайне востребован в других математических и прикладных дисциплинах. Поэтому основной задачей преподавателя является ознакомление студентов – на уровне строгих обоснований – с алгебраическими и дискретными методами, применяемыми как в смежных разделах математики (математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебра, геометрия, теория вероятностей и др.), так и в нематематических науках, с целью формирования у студентов единого «алгебраическо-дискретного» подхода к решению задач. Практика показывает, что, если материал начитывается отдельными, мало связанными друг с другом, блоками, достичь этой цели не удастся. В связи с вышеизложенным общее построение курса базируется на следующем: 1) обоснование необходимости введения каждого нового объекта для решения той или иной задачи; 2) связь каждой следующей темы с предыдущей; 3) регулярная демонстрация тесной взаимосвязи, существующей между алгебраическими и дискретными объектами.

Курс начинается с изучения операций на множествах. Затем вводится понятие мощности множества, обсуждается различие между конечными и бесконечными множествами, подробно изучаются счетные множества. Операция декартового произведения естественно приводит к введению понятия бинарного отношения на множествах. Свойства отношений вводятся аксиоматически, но подробно иллюстрируются на графах отношений, создавая предпосылку для введения в дальнейшем общего понятия графа.

Построение различных бинарных отношений на заданном множестве актуализирует задачу подсчета количества возможных отношений, что обуславливает переход к комбинаторной части курса. Очень важно, рассматривая комбинаторные конфигурации, подчеркнуть взаимосвязь с предыдущим (отношения на множествах) и последующим (алгебраические структуры) разделами. Кроме того, полезно насытить лекции и практические занятия бытовыми комбинаторными задачами.

Вводимые понятие общих алгебраических структур (полугруппы, моноиды, группы, кольца, поля) необходимо проиллюстрировать большим количеством примеров, которые желательно выбирать из различных разделов математики (математический анализ, теория множеств, алгебра, теория чисел, геометрия). Весьма полезным представляется дать студентам следующее задание на дом: придумать новые примеры структур, а главное, контрпримеры, отличающиеся от вводимых структур невыполнением всего одного атрибутивного свойства. Такое упражнение развивает абстрактное мышление и позволяет студентам глубже прочувствовать суть каждого определения.

Обращаясь к разделу «Графы», в вводной лекции рекомендуется описать известные практические задачи, послужившие импульсом к развитию этой теории (задача о Кенигсбергских мостах, задача о 3-х домах и колодцах, проблема 4-х красок). Крайне полезным представляются опять-таки упражнения на самостоятельное конструирование графов с заданными заранее характеристиками.

Технологически эти задачи решаются с помощью информационных лекций, практических занятий, ответов на вопросы студентов, обсуждений результатов решения задач, самостоятельной работы студентов.

6 Фонд оценочных средств учебной дисциплины

Фонд оценочных средств представлен в Приложении А.

7 Условия освоения учебной дисциплины

7.1 Учебно-методическое обеспечение

Учебно-методического обеспечение учебной дисциплины представлено в Приложении Б.

7.2 Материально-техническое обеспечение

Таблица 7 – Материально-техническое обеспечение учебной дисциплины

№	Требование к материально-техническому обеспечению согласно ФГОС ВО	Наличие материально-технического оборудования
1.	Учебные аудитории для проведения учебных занятий	аудитория для проведения лекционных и/или практических занятий: учебная мебель (столы, стулья, доска) помещения для самостоятельной работы (наличие компьютера, выход в Интернет)
2.	Мультимедийное оборудование	компьютер, проектор, экран, выход в интернет
3.	Программное обеспечение	
	Наименование программного продукта	Обоснование для использования (лицензия, договор, счёт, акт или иное)
	ContentReader PDF 15 Business Версия для скачивания (годовая лицензия с академической скидкой) * <i>Только для осеннего семестра</i>	Договор №ЗКС/260
	Антиплагиат. Вуз.*	Договор №05//ЕП(У)24-ВБ
	MS Office 365	Безвозмездно передаваемое ВУЗам
	Adobe Acrobat	свободно распространяемое
	Teams	Входит в состав MS Office 365
	Skype	свободно распространяемое
	Zoom	свободно распространяемое
	"Kaspersky Endpoint Security для бизнеса - Стандартный Russian Education Renewal. 250-499 Node I year License" /1 год *	Договор №294/ЕП(У)25-ВБ
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-14211
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-12617
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-max-x86_64-0-11416
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-base_orel-x86_64-0-9651
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8801
	Astra Linux Special Edition*	195200041-alse-1.7-client-base-x86_64-0-8590
	* отечественное производство	

Учебная дисциплина «Дискретная математика» реализуется с помощью дистанционных образовательных технологий:

Онлайн-курс «Дискретная математика и алгебраические структуры» на платформе ДО НовГУ, <https://do.novsu.ru/>.

Приложение А
(обязательное)
Фонд оценочных средств
учебной дисциплины «Дискретная математика»

1 Структура фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств состоит из двух частей:

а) открытая часть – общая информация об оценочных средствах (название оценочных средств, проверяемые компетенции, баллы, количество вариантов заданий, методические рекомендации для применения оценочных средств и пр.), которая представлена в данном документе, а также те вопросы и задания, которые могут быть доступны для обучающегося;

б) закрытая часть – фонд вопросов и заданий, который не может быть заранее доступен для обучающихся (вопросы к контрольной работе, коллоквиуму и пр.) и который хранится на кафедре.

2 Перечень оценочных средств текущего контроля и форм промежуточной аттестации

Таблица А.1 – Перечень оценочных средств

№	Оценочные средства для текущего контроля	Разделы (темы) учебной дисциплины	Баллы	Проверяемые компетенции
1	Контрольный опрос - коллоквиум - 1	1.1, 1.2, 2.1, 2.2	25	ОПК-2
	Контрольный опрос - коллоквиум - 2	3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4	25	
2	Контрольная работа - 1	1.1, 1.2, 2.1, 2.2	25	
	Контрольная работа - 2	3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4	25	
3	Домашняя работа	3.1, 3.2	13	
4	Самостоятельная работа	1.1, 1.2	12	
<i>Промежуточная аттестация</i>				
	<i>Дифференцированный зачет</i>	1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5	25	
	ИТОГО		150	

3 Рекомендации к использованию оценочных средств

Таблица А.2 – Контрольный опрос-коллоквиум (КЛ)

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
13-16 баллов	испытывает трудности при демонстрации знаний, испытывает трудности в определениях терминов и описаниях алгоритмов действий	КЛ 1 -14 КЛ 2 - 16	2
17-22 баллов	допускает неточности при изложении		

	материала; не всегда четко дает определения терминов, имеет представление об алгоритмах действий		
23-25 баллов	имеет целостное представление об излагаемом материале, определения четкие, безошибочны алгоритмы действий		

Контрольные вопросы (КЛ 1)

1 Множества. Способы задания множеств. Подмножества. Собственные и несобственные подмножества. Пустое и универсальное множества. Равенство множеств. Критерий равенства множеств. Булеан. Мощность булеана конечного множества.

2 Операции объединения, пересечения, разности и дополнения множеств. Прямое объединение и симметрическая разность. Свойства операций. Изоморфность множеств, изоморфность как отношение эквивалентности. Мощность множества. Равномощные и более мощные множества. Конечные и бесконечные множества. Бесконечность множества, имеющего бесконечное подмножество.

3 Счетные множества. Счетность множеств Z и Q . Счетность конечного или счетного объединения счетных множеств. Несчетность множества R . Континуум. Множество Кантора. Континуум-гипотеза. Булеан как более мощное множество.

4 Упорядоченные пары и наборы. Равенство упорядоченных наборов. Прямое (декартово) произведение двух и нескольких множеств. Ассоциативность прямого произведения множеств. Степень множества. Мощность декартова произведения конечных множеств. Счетность декартова произведения конечного числа счетных множеств.

5 Бинарные отношения на множествах. Способы задания бинарных отношений. Граф, график, матрица смежности бинарного отношения. Области отправления, прибытия, определения и значений бинарного отношения. Инфиксная форма записи. Обратное отношение. Дополнение отношения. Тожественное и универсальное отношения. N -арное отношение. Композиция отношений. Ассоциативность композиции. Степень отношения. Теорема о степени отношения на конечном множестве.

6 Свойства отношений. Рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Линейные отношения. Отношение эквивалентности, отношения строгого и нестрогого порядка. Отношение эквивалентности и разбиение множества на попарно непересекающиеся классы. Критерии рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, линейности.

7 Ядро отношения, его свойства. Замыкание отношений. Транзитивное и рефлексивное замыкания. Отображения, виды отображений.

8 Общие правила комбинаторики. Комбинаторные конфигурации. Размещения с повторениями. Размещения без повторений.

9 Перестановки. Перестановки с повторениями. Двойные факториалы, их свойства.

10 Сочетания. Сочетания с повторениями.

11 Биномиальные коэффициенты. Свойства 1-3. Треугольник Паскаля.

12 Бином Ньютона, его следствия. Свойство 4.

13 Тожество Коши (Свойство 5). Полиномиальные коэффициенты. Полиномиальная формула, ее следствие.

14 Формула включений и исключений.

Контрольные вопросы (КЛ 2)

1. Алгебры, подалгебры. Примеры. Пересечение подалгебр. Свойства.

2. Замыкание. Свойства замыкания. Системы образующих. Примеры.
3. Гомоморфизмы алгебр. Виды гомоморфизмов. Изоморфность алгебр как отношение эквивалентности. Примеры.
4. Полугруппы, моноиды, определяющие соотношения. Теорема Кэли. Примеры.
5. Группы. Свойства групп. Примеры. Группа перестановок.
6. Кольца. Свойства колец. Примеры. Области целостности.
7. Поля. Свойства полей. Примеры.
8. Векторные пространства. Свойства векторных пространств. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов.
9. Графы, отношения смежности и инцидентности в графе. Диаграммы. Орграфы, псевдографы, мультиграфы, гиперграфы, помеченные графы. Примеры. Матрица смежности и матрица инцидентностей графа и орграфа.
10. Изоморфизм графов. Инварианты. Подграфы. Примеры.
11. Степень вершины графа. Регулярные графы. Лемма о рукопожатиях, ее следствия. Примеры.
12. Маршруты, цепи, циклы. Компоненты связности графа. Вполне несвязные графы. Примеры. Критерий связности графа.
13. Расстояние между вершинами. Геодезические. Ярус. Диаметр графа. Эксцентриситет вершины. Радиус и центр графа. Примеры.
14. Виды графов. Полные графы. Двудольные графы. Критерий двудольности, его следствие. Направленные орграфы. Примеры.
15. Операции над графами. Свойства операций. Примеры.
16. Точки сочленения, мосты и блоки. Примеры. Критерий точки сочленения. Теорема о наличии в графе вершин, не являющихся точками сочленения. Критерий моста.

Таблица А.3 – Контрольная работа (КР)

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество задач
13-16 баллов	испытывает трудности при выполнении заданий	2	4
17-22 баллов	допускает неточности при выполнении заданий		
23-25 баллов	демонстрирует четкое и безошибочное выполнение заданий		

КР 1 Демонстрационный вариант

1. Доказать равномощность множеств.

$$A = \left\{ \frac{1}{p^n} \mid p = 2 \text{ или } 3, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B = \{x = 2^k \cdot 3^l \cdot 7^m \mid k, l, m \in \mathbb{N}\}$$

2. Составить граф и матрицу смежности отношения R . Найти отношения R^{-1} и \bar{R} . Определить свойства отношения R .

$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $xRy \sim x+y$ – простое.

3. Решить комбинаторную задачу.

Есть 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько комбинаций для выбора нескольких птиц таких, чтобы среди выбранных были и курицы, и утки, и гуси?

4. Решить задачу.

Каждый из работающих в отделе человек знает хотя бы один

иностранный язык: 6 знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

КР 2 Демонстрационный вариант

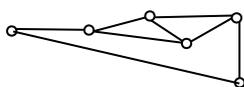
1. Установить, является ли заданное множество с одной бинарной операцией алгеброй, полугруппой, моноидом, группой.

$$A = \mathbb{R}^+, a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$$

2. Установить, является ли заданное отображение между двумя алгебрами гомоморфизмом, изоморфизмом.

$$f: \langle \mathbb{Z}, + \rangle \rightarrow \langle \mathbb{Z}, + \rangle, f(a) = -|a|$$

3. Определить эксцентриситеты вершин и центр заданного графа, найти мосты и точки сочленения.



4. Построить граф с заданными характеристиками.

6-вершинный регулярный граф степени регулярности 4.

Примечание: Задачи для контрольных работ берутся из учебных изданий [3; 7], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.4 – Самостоятельная работа (СР)

Критерии оценки		Количество заданий
6-8 баллов	Не менее 50%, но менее 70% от числа баллов, выделенных на СР	3 из контролируемого раздела
9-10 баллов	Не менее 70%, но менее 90% от числа баллов, выделенных на СР	
11-12 баллов	Не менее 90% от числа баллов, выделенных на СР	

Темы СРС 1.1, 1.2:

- 1 Задачи на различные способы задания множеств.
- 2 Задачи на свойства операций над множествами.
- 3 Задачи на различные способы задания бинарных отношений на множестве, исследование свойств бинарных отношений.

Пример СРС

- 1 Задать множество $A = \{\text{вторник, суббота, понедельник, четверг, среда, воскресенье, пятница}\}$ через характеристическое свойство.
- 2 Выяснить, верно ли равенство для произвольных множеств: $A = A \setminus (A \setminus B)$.
- 3 Составить граф и матрицу смежности бинарного отношения R на множестве A , установить свойства R : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $xRy \sim |x-y| < 2$.

Примечание: Задачи для самостоятельных работ берутся из учебных изданий [3; 7], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.5 – Домашняя работа (ДР)

Критерии оценки		Количество заданий
6-8 баллов	Не менее 50%, но менее 70% от числа баллов, выделенных на ДР	3 из контролируемого раздела
9-11 баллов	Не менее 70%, но менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	
12-13 баллов	Не менее 90% от числа баллов, выделенных на ДР	

Темы домашней работы 3.1, 3.2:

- 1 Задачи на установление замкнутости множества относительно данной операции.
- 2 Задачи на установление вида алгебры.
- 3 Задачи на гомоморфизмы/изоморфизмы алгебр.

Пример ДР

- 1 Выяснить, образует ли алгебру множество целых чисел относительно операции вычитания.
- 2 Определить вид алгебры, состоящей из невырожденных матриц второго порядка с единственной операцией матричного умножения.
- 3 Является ли отображение $f: (R, \cdot) \rightarrow (R, +)$, задаваемое формулой $f(x) = |x|$ гомоморфизмом алгебр? Является ли оно изоморфизмом?

Примечание: Задачи для домашних работ берутся из учебных изданий [3; 7], либо составляются преподавателем самостоятельно по их образцу.

Таблица А.6 – Дифференцированный зачет

Критерии оценки		Количество вариантов заданий	Количество вопросов
13-16 баллов	ответ не полный, слабо аргументированный, демонстрирует несформированность некоторых практических умений, уровень мотивации учения низкий	10	3
17-22 баллов	ответ полный, достаточно обоснованный, с отдельными неточностями в изложении, пути решения практических задач не всегда рациональны, уровень мотивации учения средний		
23-25 баллов	ответ полный с достаточно глубоким пониманием теоретических и практических вопросов, изложение четкое, логически выдержанное, уровень мотивации учения высокий		

Контрольные вопросы к дифференцированному зачету «Дискретная математика»

1. Множества. Способы задания множеств. Подмножества. Собственные и несобственные подмножества. Пустое и универсальное множества. Равенство множеств. Критерий равенства множеств. Булеан. Мощность булеана конечного множества.

2. Операции объединения, пересечения, разности и дополнения множеств. Прямое объединение и симметрическая разность. Свойства операций. Изоморфность множеств, изоморфность как отношение эквивалентности. Мощность множества. Равномощные и более мощные множества. Конечные и бесконечные множества. Бесконечность множества, имеющего бесконечное подмножество.

3. Счетные множества. Счетность множеств Z и Q . Счетность конечного или счетного объединения счетных множеств. Несчетность множества R . Континуум. Множество Кантора. Континуум-гипотеза. Булеан как более мощное множество.

4. Упорядоченные пары и наборы. Равенство упорядоченных наборов. Прямое (декартово) произведение двух и нескольких множеств. Ассоциативность прямого произведения множеств. Степень множества. Мощность декартова произведения конечных множеств. Счетность декартова произведения конечного числа счетных множеств.

5. Бинарные отношения на множествах. Способы задания бинарных отношений. Граф, график, матрица смежности бинарного отношения. Области отправления, прибытия, определения и значений бинарного отношения. Инфиксная форма записи. Обратное отношение. Дополнение отношения. Тождественное и универсальное отношения. N -арное отношение. Композиция отношений. Ассоциативность композиции. Степень отношения. Теорема о степени отношения на конечном множестве.

6. Свойства отношений. Рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Линейные отношения. Отношение эквивалентности, отношения строгого и нестрогого порядка. Отношение эквивалентности и разбиение множества на попарно непересекающиеся классы. Критерии рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, линейности.

7. Ядро отношения, его свойства. Замыкание отношений. Транзитивное и рефлексивное замыкания. Отображения, виды отображений.

8. Общие правила комбинаторики. Комбинаторные конфигурации. Размещения с повторениями. Размещения без повторений.

9. Перестановки. Перестановки с повторениями. Двойные факториалы, их свойства.

10. Сочетания. Сочетания с повторениями.

11. Биномиальные коэффициенты. Свойства 1-3. Треугольник Паскаля.

12. Бином Ньютона, его следствия. Свойство 4.

13. Тождество Коши (Свойство 5). Полиномиальные коэффициенты. Полиномиальная формула, ее следствие.

14. Формула включений и исключений.

15. Алгебры, подалгебры. Примеры. Пересечение подалгебр. Свойства.

16. Замыкание. Свойства замыкания. Системы образующих. Примеры.

17. Гомоморфизмы алгебр. Виды гомоморфизмов. Изоморфность алгебр как отношение эквивалентности. Примеры.

18. Полугруппы, моноиды, определяющие соотношения. Теорема Кэли. Примеры.

19. Группы. Свойства групп. Примеры. Группа перестановок.

20. Кольца. Свойства колец. Примеры. Области целостности.

21. Поля. Свойства полей. Примеры.

22. Векторные пространства. Свойства векторных пространств. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов.

23. Графы, отношения смежности и инцидентности в графе. Диаграммы. Орграфы, псевдографы, мультиграфы, гиперграфы, помеченные графы. Примеры. Матрица смежности и матрица инцидентностей графа и орграфа.

24. Изоморфизм графов. Инварианты. Подграфы. Примеры.
25. Степень вершины графа. Регулярные графы. Лемма о рукопожатиях, ее следствия. Примеры.
26. Маршруты, цепи, циклы. Компоненты связности графа. Вполне несвязные графы. Примеры. Критерий связности графа.
27. Расстояние между вершинами. Геодезические. Ярус. Диаметр графа. Эксцентриситет вершины. Радиус и центр графа. Примеры.
28. Виды графов. Полные графы. Двудольные графы. Критерий двудольности, его следствие. Направленные орграфы. Примеры.
29. Операции над графами. Свойства операций. Примеры.
30. Точки сочленения. Примеры. Критерий точки сочленения. Теорема о наличии в графе вершин, не являющихся точками сочленения.
31. Мосты и блоки. Примеры. Критерий моста.
32. Вершинная и рёберная связность. Теорема об оценке вершинной и рёберной связности.
33. Теорема об оценке числа рёбер, следствия из неё.
34. Вершинно- и рёберно-непересекающиеся цепи. Разделяющее множество вершин, разрез. Примеры. Оценка мощностей P и S .
35. Теорема Менгера в вершинной форме (с доказательством).
36. Другие формулировки теоремы Менгера. 3 задачи, приводящие к теореме Холла: задача о свадьбах, трансверсаль, совершенное паросочетание. Теорема Холла.
37. Лес и (свободное) дерево. Примеры. Древочисленные и субциклические графы. Критерий дерева.
38. Следствия из критерия дерева. Центр дерева.
39. Ориентированные деревья. Теорема о свойствах ордерова. Крона и ярусы ордерова. Потомки и предки узлов.
40. Эйлеровы циклы и цепи, эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа.

Все материалы для проведения промежуточного контроля хранятся на кафедре.

Приложение Б
(обязательное)
Карта учебно-методического обеспечения
учебной дисциплины «Дискретная математика»

Таблица Б.1 – Основная литература*

Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. / Новиков Ф.А. – СПб.: Питер, 2009. 384 с.	31	
2. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. / Кузнецов О.П. – СПб. Лань. 2018. – 394 с. – (2007, 2014гг. стереотип. изд.)	3	
3 Куликов Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел. / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.	10	
Учебно-методические издания		
Дискретная математика: рабочая программа для направления подготовки 01.03.01 Математика, направленность. Профиль Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях / составитель Д.В. Коваленко; Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого. - Великий Новгород, 2023. -19 с.		

Таблица Б.2 – Дополнительная литература

Библиографическое описание издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
5 Горбатов В.А. Основы дискретной математики. / В.А. Горбатов – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.	9	
6. В.М. Фомичев Дискретная математика и криптология. Курс лекций / Под общ. ред. д-ра физ.-мат. н. Н.Д.Подуфалова. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003 – 400 с.	1	
Электронные ресурсы	Электронный адрес	Примечание
Ерусалимский Я. М. Дискретная математика: видеолекция профессора ЮФУ: Текст: электронный. – URL: https://www.youtube.com/watch?v=BZMCozNg8g4&index=2&list=PLEUFtezWzWoCVDHJTYsD5WmMn129yqozv		

Таблица Б.3 – Информационное обеспечение модуля

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
Электронная библиотека НовГУ		
Электронный каталог научной библиотеки http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный
База данных «Аналитика» (картотека статей) http://mars.novsu.ac.ru/MarcWeb/	База собственной генерации	бессрочный
ЭБС «Электронная библиотечная система Новгородского государственного университета» (ЭБС НовГУ). Универсальный ресурс. Внутривузовские издания НовГУ.	Договор № 230 от 30.12.2022 с ООО «КДУ»	бессрочный

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
Научная библиотека
Сектор учета *М.С.С.*

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
ЭБС «Лань» Единая профессиональная база данных для классических вузов – Издательство Лань «ЭБС» ЭБС ЛАНЬ	Договор № 34/ЕП(Т)23 от 22.12.2023 с ООО «Издательство ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Коллекции: «Физика – Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана», «Информатика - Издательство ДМК Пресс», «Журналистика и медиа-бизнес - Издательство Аспект Пресс»	Договор № 33/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «ЭБС ЛАНЬ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «ЛАНЬ» Универсальный ресурс	Договор № СЭБ НВ–283 с ООО «ЭБС ЛАНЬ» от 09.11.2020	с 09.11.2020 по 31.12.2023 Договор продолгован н до 31.12.2024 (основание: п.6.1.)
«ЭБС ЮРАЙТ www.biblio-online.ru » Универсальный ресурс.	Договор № 35/ЕП(У)23 от 25.12.2023 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
«Национальная электронная библиотека» Универсальный ресурс.	Договор №101/НЭБ/2338П от 14.03.2022 с ФБГУ «Российская Государственная библиотека»	с 14.03.2022 по 13.03.2027
ЭБС «IPRsmart» Универсальный ресурс.	Лицензионный договор № 11040/23П/31/ЕП(У)23 от 22.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.12.2024
ЭБС «IPRsmart» Электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов «РУССКИЙ ЯЗЫК КАК ИНОСТРАННЫЙ» (РКИ).	Договор № 436/ЕП(У)23-ВБ от 15.12.2023 с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»	с 01.01.2024 по 31.01.2025
ЭБС Polpred.com. Обзор СМИ. Электронные статьи 600 деловых газет, журналов, информагентств за 20 лет.	Соглашение с ООО «ПОЛПРЕД Справочники». Тестовый доступ.	с 01.01.2023
Профессиональные базы данных		
Президентская библиотека им. Б. Н. Ельцина https://www.prlib.ru/	в открытом доступе	-
База данных Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU https://elibrary.ru/	в открытом доступе	-
База данных профессиональных стандартов Министерства труда и социальной защиты РФ http://profstandart.rosmintrud.ru/obshchiy-informatsionnyy-blok/natsionalnyy-reestr-professionalnykh-standartov/	в открытом доступе	-
База данных электронно-библиотечной системы «Национальная электронная библиотека» https://нэб.рф	в открытом доступе	-
Информационные справочные системы		
Университетская информационная система «РОССИЯ» https://lib.tusur.ru/ru/resursy/bazy-dannyh/uis-rossiya	в открытом доступе	-
Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование» https://openedu.ru	в открытом доступе	-

Наименование ресурса	Договор	Срок договора
Портал открытых данных Российской Федерации https://data.gov.ru	в открытом доступе	-
Справочно-правовая система КонсультантПлюс (КонсультантПлюс студенту и преподавателю) www.consultant.ru/edu/	в открытом доступе	-

Проверено НБ НовГУ



И.о. зав. кафедрой АГ *Маш* Е.М.Кондрушенко
 подпись И.О.Фамилия
 «05» 08 2024 г.

