УДК 519.853.4

А.С.Тихомиров

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

The method of searching for the global maximum of a function is investigated. It is shown that the number of the objective function evaluations required to reach the given accuracy, may have slow growth to infinity, as the accuracy tends to zero.

Возьмем евклидово пространство $\mathbf{R}^d$ с какой-либо обычной метрикой ρ и d-мерной мерой Лебега μ. В качестве ρ можно использовать, например, одну из следующих метрик:

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad \rho_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le d} |x_i - y_i|,$$

где $p \ge 1$ — любое фиксированное число, $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $y = (y_1, \ldots, y_d)$. Пусть $S_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^d : \rho(x,y) \le r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в x.

Пусть целевая функция $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. f принимает наибольшее значение в одной-единственной точке $x_0 = \arg\max\{f(x) : x \in \mathbf{R}^d\}$.

Условие 2. В некоторой окрестности точки x_0 выполнено соотношение $c_1 \rho^t(x_0, x) \le f(x_0) - f(x) \le c_2 \rho^t(x_0, x)$, где t, c_1, c_2 — фиксированные положительные числа.

Условие 3. $\sup\{f(x) : x \notin S_r(x_0)\} < f(x_0) \quad \forall r > 0$.

Отметим, что функции указанного класса могут быть многоэкстремальными в любой окрестности глобального максимума.

Рассмотрим задачу поиска точки максимума x_0 в случае, когда значения целевой функции f вычисляются со случайными ошибками. Для простоты положим, что мы вычисляем значения $f(x) + \alpha_i$, где α_i — независимые, одинаково распределенные случайные величины. Кроме того, α_i ограничены сверху ($\operatorname{vrai\,sup} \alpha_i = b < \infty$) и имеют такую плотностью p_α, что при некотором $a < b$ выполнено $p_\alpha(x) \ge c_\alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Будем искать точку максимума x_0 с точностью $\varepsilon > 0$ и надежностью $\delta < 1$. Для решения поставленной задачи воспользуемся простым и хорошо известным алгоритмом случайного поиска [1]. Случайным поиском мы называем последовательность случайных величин $\{\xi_i\}_{i=0}^{m}$ со значениями в $\mathbf{R}^d$. Опишем исследуемый поиск с помощью алгоритма моделирования. Обозначение «$\xi \leftarrow P(\cdot)$» следует читать «получить реализацию случайной величины ξ с распределением P».

Алгоритм

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow \pi(\cdot)$, $i \leftarrow 1$.

Шаг 2. $\eta_1 \leftarrow P_i(\xi_{i-1}, \cdot), \ldots, \eta_{k(i)} \leftarrow P_i(\xi_{i-1}, \cdot)$.

Шаг 3. $\xi_i \leftarrow \arg\max\{f_i^*(\xi_{i-1}), f_i^*(\eta_1), \ldots, f_i^*(\eta_{k(i)})\}$.

Шаг 4. Если $i < m$, то $i \leftarrow i + 1$ и перейти к шагу 2, иначе — закончить выполнение алгоритма.

Здесь π — начальное распределение, m — число шагов поиска. Переходная функция $P_i(x,\cdot)$ — равномерное распределение в шаре радиуса a_i с центром в x. Величина $f_i^*(x) = \max\{f(x)+\alpha_1,...,f(x)+\alpha_{n(i)}\}$ — оценка (смещенная) значения функции f в точке x. Значение $\arg\max\{f_i^*(x_1),...,f_i^*(x_k)\} = x_n$, где $n = \min\{l : 1 \le l \le k,\quad f_i^*(x_l) = \max\{f_i^*(x_j) : 1 \le j \le k\}\}$. Начальное распределение π и числа m, a_i, $k(i)$, $n(i)$ являются параметрами метода.

Обсудим выбор параметров поиска, обеспечивающий решение поставленной задачи, т.е. выполнение условия $P(\xi_m \in S_\varepsilon(x_0)) \ge \delta$. Для простоты положим, что условие 2 выполняется во всем пространстве $\mathbf{R}^d$ и $\pi(S_R(x_0)) = 1$ при некотором известном R. Выберем вспомогательные параметры $u,q,\gamma \in (0,1)$ и положим $m = \lceil \ln(\varepsilon/R)/\ln u \rceil$, $r_i = Ru^i$, $a_i = r_i + r_{i-1}$, $c_f = (c_1/c_2)^{d/t}$, $c_s = \gamma(uq/(1+u))^d$, $k_* = \ln\left(1-\delta^{1/m}\right)\big/\ln\left(1-c_f c_s\right)$, $k(i) = \lceil k_* \rceil$,

$$v_i = c_\alpha \min\{c_1 r_i^t (1-q^t), b-a\},\quad n(i) = \begin{cases} \lceil \ln(1-\gamma)/\ln(1-\nu_i) \rceil \text{при } \nu_i < 1, \\ 1 \text{ при } \nu_i = 1. \end{cases}$$

Используя результаты [2] нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема. Для описанного случайного поиска $P(\xi_m \in S_\varepsilon(x_0)) \ge \delta$.

Обсудим теперь трудоемкость рассматриваемого метода. Характеристикой трудоемкости будет служить число вычислений целевой функции, необходимое для решения поставленной задачи, т. е. величина $N(\varepsilon,\delta) = \sum_{i=1}^{m}(k(i)+1)n(i).$. Легко видеть, что при любом фиксированном $\delta < 1$ величина $N(\varepsilon,\delta) = O\left(\ln|\ln\varepsilon|/\varepsilon^t\right)$. Отметим, что размерность пространства не влияет на порядок зависимости $N(\varepsilon,\delta)$ от точности ε. Значения вспомогательных параметров u, q и γ можно выбрать, например, так, чтобы уменьшить полученную оценку трудоемкости.

В случае, когда условие 2 выполняется без дополнительного ограничения, также не трудно выбрать параметры поиска так, чтобы выполнялись условия $P(\xi_m \in S_\varepsilon(x_0)) \ge \delta$ и $N(\varepsilon,\delta) = O\left(\ln|\ln\varepsilon|/\varepsilon^t\right)$.

Таким образом, указанный метод случайного поиска можно с успехом применять и в том случае, когда значения целевой функции вычисляются со случайными ошибками.

1. Сушков Ю.А. // Исследование операций и статистическое моделирование. Вып. 1. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. С.180-186.
2. Nekrutkin V.V., Tikhomirov A.S. // A. Appl. Math. 1993. V.33. P.89-108.