

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ЯРОСЛАВА МУДРОГО

Л. Е. Бритвина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Великий Новгород

2007

УДК 519.21
ББК 22.171

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

Бритвина Л. Е. Теория вероятностей: Учеб.-метод. пособие;
НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2007. – 66 с.

Пособие охватывает основные разделы программы по теории вероятностей. В нем приведены необходимые теоретические сведения и формулы, даны задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей, а также может быть использовано преподавателями вузов и учителями средних учебных заведений с углубленным изучением математики.

УДК 519.21
ББК 22.171

© Новгородский
государственный
университет, 2007
© Л. Е. Бритвина, 2007

Оглавление

<i>Введение</i>	4
<i>Лекция 1.</i> Случайное событие	5
<i>Лекция 2.</i> Классическое определение вероятности события	10
<i>Лекция 3.</i> Другие способы определения вероятности события	15
<i>Лекция 4.</i> Аксиоматическое построение теории вероятностей. Нахождение вероятностей различных событий	19
<i>Лекция 5.</i> Повторение испытаний	26
<i>Лекция 6.</i> Случайная величина и ее законы распределения	31
<i>Лекция 7.</i> Случайная величина и ее числовые характеристики	39
<i>Лекция 8.</i> Некоторые важные для практики распределения случайных величин	45
<i>Лекция 9.</i> Законы больших чисел	50
<i>Лекция 10.</i> Случайные векторы	53
<i>Лекция 11.</i> Числовые характеристики и законы распределения функций случайных величин	59
<i>Лекция 12.</i> Характеристическая функция случайной величины. Теорема Линдеберга-Леви	62
<i>Литература</i>	66

Введение

Данное учебно-методическое пособие посвящено основным разделам по теории вероятностей и согласовано с Государственным образовательным стандартом по направлению 010700 – «Физика».

Пособие состоит из двенадцати лекций, каждая из которых рассчитана на 3-6 аудиторных часов, частично дополняет лекционный материал по курсу и обеспечивает эффективное усвоение материала во время практических занятий.

При подготовке данного пособия автор не ставила перед собой цель наиболее полного и подробного изложения основных разделов теории вероятностей курса «Теория вероятностей и математическая статистика». В связи с этим некоторые из теоретических вопросов освещены в пособии очень кратко в виде конкретных задач или дополнительных вопросов. Это сделано с целью акцентирования внимания учащихся с дальнейшим подробным освещением данных теоретических моментов во время лекций. В частности, данный методический подход используется при рассмотрении одной из наиболее важных тем «Распределения случайных величин».

Для рассмотрения примеров решения типовых задач по теории вероятностей в дополнение к данному пособию студентам рекомендовано «Руководство к решению по теории вероятностей и математической статистике» В.Е. Гмурмана [5] и другая литература.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010700 – «Физика». Искренне надеюсь, что оно будет полезно преподавателям и студентам других физико-математических специальностей и направлений.

Лекция 1

Случайное событие

1. Основные понятия.

Все явления или события в природе в той или иной мере сопровождаются элементами случайности. Связано это с наличием многочисленных факторов.

Пример 1.1.

а) При бросании монеты может выпасть «орел», а может – «решка». Выпадение «орла» или «решки» зависит от того, в каком положении находилась монета в момент броска, с какой силой подбросили монету, под каким углом действовала эта сила, имеет ли монета дефекты и т.д.

б) При выстреле в мишень стрелок может попасть, может не попасть в «яблочко».

с) При измерении сопротивления резистора, оно может попасть в пределы, когда резистор считается стандартным, а может не попасть в эти пределы, в этом случае резистор будет бракованным.

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Для этого осуществляется *эксперимент*, т.е. некоторое намеченное действие, и рассматривается результат такого действия, называемый *исходом* эксперимента.

Теория вероятностей изучает эксперименты со случайными исходами – случайные эксперименты.

Эксперимент случайный, если его исход нельзя точно предсказать.

Основное ограничение: Мы будем рассматривать только такие эксперименты, которые можно повторять при неизменных условиях неограниченное число раз. В этом случае вместо термина эксперимент часто используют термин *испытание*.

Каждую ситуацию, которую можно наблюдать в зависимости от исхода эксперимента, будем называть *событием*.

Пример 1.2. Эксперимент – бросаем игральную кость. Исход – то или иное число очков. Примеры событий: а) выпало число очков большее 3; б) выпало число очков меньше 5; с) выпало число очков равное 2 и т.д.

Задача 1.1. Описать исход эксперимента и привести примеры событий.

Бросание монеты.

Измерение сопротивления резистора контролером ОТК.

Толкание ядра спортсменом.

Ожидание автобуса при условии, что ожидание не более 15 минут.

Последовательное бросание трех различных монет.

Из колоды карт вытаскивают последовательно карты по одной до появления туза.

Каждое событие обладает определенной степенью возможности.

Вероятность – степень уверенности в наступлении того или иного события.

Цель теории вероятностей – вычисление вероятностей событий, комбинаций событий, а также изучение свойств вероятностей.

Задача 1.2. Какое из двух данных событий более вероятно.

Дождь или снег 1 июля в Москве.

2.1. Появление «герба» или «решетки» при бросании монеты.

2.2. Появление 2 или 6 при бросании игральной кости.

2.3. Появление двух шестерок или двух разных чисел при бросании двух костей.

Теория вероятностей предполагает, прежде всего, построение математической модели случайного эксперимента, которая служит описанием возможных исходов, событий, вероятностей наступления этих событий. Это описание должно быть выполнено таким образом, чтобы обеспечить возможность вычисления вероятностей комбинации событий.

Для построения модели случайного эксперимента необходимо описать поле случайных событий.

2. Поле случайных событий.

Множество исходов случайного эксперимента назовем *пространством исходов* и обозначим S . Пространство исходов может быть дискретным или непрерывным.

Пример 1.3. Дискретное пространство: эксперимент – бросание игральной кости, исход – выпадение числа очков, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Непрерывное пространство: эксперимент – ожидание автобуса при условии, что ожидаешь не более t_0 минут, исход – конкретное время t ожидания, $S = \{t : t \in [0, t_0]\}$.

Задача 1.3. Запишите пространство исходов S для каждого из экспериментов задачи 1.

Событие – любое подмножество пространства исходов S .

События обозначаются прописными латинскими буквами. Например, A , B , C , A_1 , A_2 и т.д.

Рассмотрим некоторое событие A .

Событие произошло, если в результате эксперимента исход X принадлежит $A : X \in A$.

Элементарное событие содержит только один исход.

Достоверное событие совпадает с пространством исходов S .

Невозможное событие совпадает с пустым множеством $\emptyset$.

Противоположное событие $\bar{A}$ состоит в том, что событие A не произошло.

Если при выполнении некоторого комплекса условий появление события A делает достоверным событие B , то будем говорить, что событие B содержит в себе событие A , и обозначать это свойство событий так: $A \subset B$.

Пример 1.4. При бросании игральной кости событие, состоящее в появлении 1, делает достоверным событие, состоящее в появлении нечетной цифры, следовательно, событие «появление нечетной цифры» содержит событие «появление 1».

Если справедливы соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называются *равносильными*, т.е. $A = B$.

Задача 1.4. В урне имеются шары различных диаметров. Являются ли событие A , состоящее в извлечении шара наименьшего диаметра, и событие B , состоящее в извлечении шара наименьшего объема, равносильными событиями?

Если при выполнении некоторого комплекса условий появление события A не делает невозможным появление события B , то события A и B называются *совместимыми*. В противном случае события называются *несовместимыми*.

Задача 1.5. Из колоды извлекается одна игральная карта. Какие из следующих событий являются несовместимыми? совместимыми?

«появление валета» и «появление дамы»;

1.5.1. «появление валета» и «появление карты масти треф»;

1.5.2. «появление дамы масти треф» и «появление карты масти черви»;

1.5.3. «появление дамы» и «появление карты».

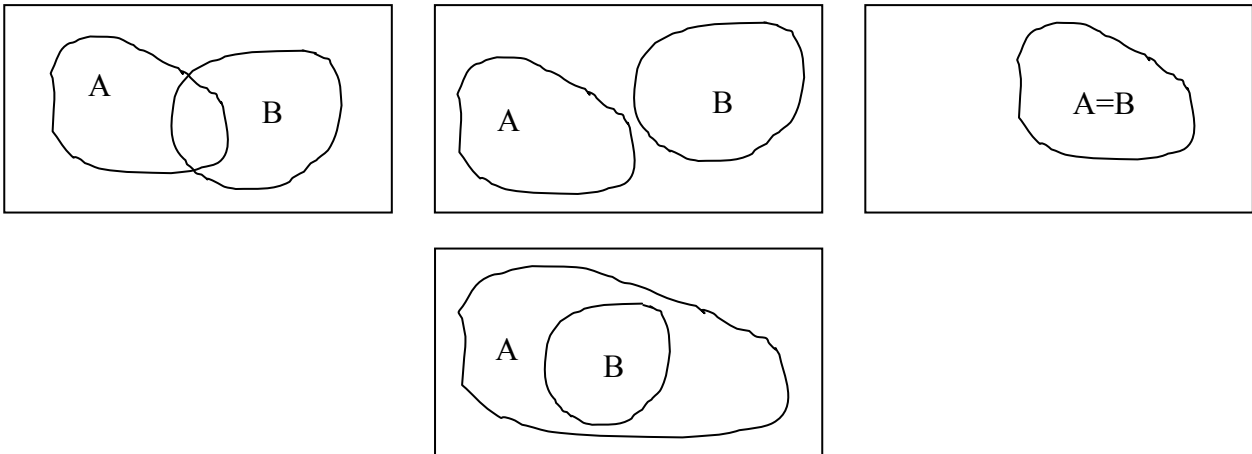
Итак, несовместные (несовместимые) события не имеют общих исходов.

Сумма (или объединение) событий $A + B$ (или $A \cup B$): это событие, заключающееся в том, что из двух событий A и B в результате случайного эксперимента происходит, по крайней мере, одно.

Произведение событий $A \cdot B$ (или $A \cap B$): это событие, заключающееся в том, что события A и B происходят одновременно.

Для наглядного изображения операций над событиями часто пользуются диаграммами Эйлера-Венна (см. теорию множеств). На них пространство S изображается в виде прямоугольника, а различные события – в виде плоских фигур, ограниченных замкнутым контуром.

Задача 1.6. Изобразите на следующих схематичных рисунках сумму и произведение событий A и B .



Задача 1.7. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна события A и $\bar{A}$, два совместных и несовместных события.

Задача 1.8. Перечислите все элементарные события для следующих экспериментов. Что будет достоверным и невозможным событием. Найдите 1) для каждого из перечисленных событий противоположное ему; 2) пары несовместных событий.

Бросание монеты.

1.8.1. Бросание кости.

1.8.2. Случайный выбор одного шара из черного ящика, содержащего 10 белых и 5 черных шаров.

1.8.3. Случайный выбор двух шаров из черного ящика, содержащего 10 белых и 5 черных шаров.

Задача 1.9.

1.9.1. Три студента сдают экзамен по теории вероятностей. Событие A_1 – все трое экзамен сдали, A_2 – хотя бы один из студентов экзамен сдал. В чем состоят события $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2$?

1.9.2. Бросаются две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная, B – событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события $A \cdot B$, $A + B$, $A \cdot \bar{B}$, $\bar{A} \cdot B$, $\bar{A} + \bar{B}$.

1.9.3. Пусть A , B , C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из данных трех событий:

- а) произошло только A ;
- б) произошли A и B , но C не произошло;
- в) все три события произошли;
- г) произошло по крайней мере одно из этих событий;
- д) произошли по крайней мере два события;
- е) произошло одно и только одно событие;
- ж) произошли два и только два события;

- з) ни одно событие не произошло;
- и) произошло не больше двух событий.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением наименьшего класса событий, который обладает следующими свойствами:

- ✓ пустое множество $\emptyset$ принадлежит этому классу;
- ✓ если событие A принадлежит классу, то и противоположное ему событие также принадлежит классу;
- ✓ если каждый элемент счетной (конечной) последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ принадлежит классу, то сумма (объединение) этих событий также принадлежит классу.

Из последнего свойства вытекает, что и произведение двух событий (или счетного числа событий) принадлежит классу, если каждое событие принадлежит классу.

Класс событий с указанными свойствами достаточен для описания любого физического явления, возникающего в результате эксперимента. Такой класс событий назовем *полем событий* F .

Итак, мы ввели $\{S, F\}$, где S – пространство исходов, а F – поле событий.

Задача 1.10. Постройте поле случайных событий, порожденное одним случайным событием A , двумя событиями A и B .

Дополнительные вопросы и задачи к Лекции 1.

1. То, что нельзя заранее определить, случится или не случится рассматриваемое событие при выполнении данного комплекса условий, не означает ли это принципиальную невозможность познать данное явление?

2. Вследствие чего появляется случайность исхода эксперимента?

3. Справедливо ли утверждение $\overline{\overline{A}} = A$?

4. Коммутативны ли операции сложения и умножения событий?

5. Справедлив ли для суммы и произведения событий сочетательный закон?

6. Докажите справедливость равенств $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$, $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

7. Верны ли: $A \cdot \overline{A} = \emptyset$, $A + \overline{A} = S$?

8. Найдите: $\overline{\overline{S}}$, $A + S$, $A \cdot S$, $A + \emptyset$, $A \cdot \emptyset$.

9. Докажите, что произведение двух событий (или счетного числа событий) принадлежит полю событий, если каждое событие принадлежит полю событий.

Лекция 2

Классическое определение вероятности события

1. Полная группа событий.

Система несовместных событий $C_1, C_2, \dots, C_m$ называется *полной группой (системой) событий*, когда известно, что при выполнении комплекса условий одно из событий этой системы должно с достоверностью произойти.

Простейшей полной системой событий является система $A, \bar{A}$.

Задача 2.1. Опишите полную группу событий в следующих испытаниях:
Бросание монеты.

2.1.1. Бросание игральной кости.

2.1.2. Случайный выбор одного шара из черного ящика, содержащего 10 белых и 5 черных шаров.

2.1.3. Случайный выбор двух шаров из черного ящика, содержащего 10 белых и 5 черных шаров.

2. Основные формулы комбинаторики.

Пусть задано конечное множество элементов. Возьмем из него n различных элементов.

Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов, отличаются только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок из n элементов: $P_n = n!$

Задача 2.2. Сколько 3-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в число только один раз.

Задача 2.3. Каким количеством способов можно расставить 8 различных книг на одной полке.

Размещения – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n различных элементов по m элементов: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Задача 2.4. Сколько 3-значных чисел можно составить из 10 цифр, если каждая цифра входит в число только один раз.

Задача 2.5. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по два.

Сочетания – комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, отличаются хотя бы одним элементом (порядок вхождения элементов не важен).

Число всех возможных сочетаний из n различных элементов по m элементов: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Задача 2.6. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами (из той же совокупности), то выбрать либо A , либо B можно $(m+n)$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

3. Классическое определение вероятности события.

Пусть S – пространство равновозможных несовместных исходов, т.е. исходы, образующие S , составляют полную группу равновозможных событий. n – число исходов, соответствующих (благоприятствующих) событию A , то вероятность находится по формуле:

$$p(A) = n/N,$$

где N – общее число исходов, $n \leq N$.

Это классическое определение вероятности.

В данном случае:

$$S = C_1 + C_2 + \dots + C_n + C_{n+1} + \dots + C_N,$$

$$A = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

$$p(C_1) = p(C_2) = \dots = p(C_N) = 1/N,$$

где $C_1, C_2, \dots, C_N$ – исходы, образующие S , $C_1, C_2, \dots, C_n$ – исходы, благоприятствующие событию A .

Задача 2.7. Пользуясь классическим определением вероятности, найдите вероятность достоверного события, вероятность невозможного события. Докажите, что для произвольного события $0 \leq p(A) \leq 1$.

Задача 2.8. Набирая номер телефона, Вы забыли одну цифру и набрали ее наугад. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Задача 2.9. Два студента бросили монету дважды. Какова вероятность того, что оба раза выпал «герб»?

Задача 2.10. Лотерея выпущена на общую сумму 1000000 рублей. Цена одного билета 10 рублей. Ценные выигрыши выпадают на 1000 билетов. Вы купили один билет, какова вероятность Вашего выигрыша?

Задача 2.11. В партии из l изделий r бракованных. При контроле из этой партии наудачу взято k изделий ($k \leq l - r$), причем все они оказались доброкачественными. Определить вероятность того, что следующее берущееся наудачу изделие также будет доброкачественным.

Задача 2.12. В изданном в 1781 г. каталоге Мессье, содержащем наблюдаемые на небе 108 ярких туманных объекта, имеется 39 галактик, 29 рассеянных скоплений, 29 шаровых скоплений, 6 диффузных туманностей и 5 планетарных туманностей. Определить вероятность того, что из двух наугад выбранных в каталоге объектов а) каждый окажется галактикой, б) один окажется рассеянным, а другой шаровым скоплением.

Задача 2.13. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что а) обе карты одной масти; б) обе карты червовые. Определить эти же вероятности при условии, что карта не возвращается в колоду.

Задача 2.14. В коробке 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

Задача 2.15. Набирая номер телефона, Вы забыли две последние цифры, но точно помните, что они различны. Какова вероятность, что, набрав их наугад, Вы попадете по нужному номеру. То же самое, если Вы забыли 3 цифры.

Задача 2.16. Найти вероятность того, что при случайном выборе четырех букв из слова «математика» будут получены буквы, из которых можно составить слово «тема».

Задача 2.17. В группе 16 студентов, 10 – юношей и 6 – девушек. Для проверки знаний наудачу отбирают 8 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц будут 3 девушки.

Задача 2.18. В коробке имеется 5 шаров, 3 белых и 2 черных. Наудачу извлечены 2 шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется а) один белый; б) два белых; в) хотя бы один белый.

Задача 2.19. По соединению, состоящему из одного корабля и одной ложной цели, произведен двухракетный залп. Попадание каждой ракеты равновозможно в корабль или в ложную цель; промахи исключены. Требуется определить вероятность того, что в корабль попадет хотя бы одна ракета.

Задача 2.20. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

Задача 2.21. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово ДВА?

Задача 2.22. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбираются наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий 2 окажутся бракованными.

Задача 2.23. Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв.

Задачи повышенной сложности.

Задача 2.24. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

Задача 2.25. Найти вероятность того, что при извлечении из колоды n игральных карт (в колоде 52 карты) все они окажутся разных значений.

Задача 2.26. Определить вероятность того, что произвольно взятое целое положительное число делится на 3.

Задача 2.27. В шкафу находится 10 пар ботинок различных сортов. Из них случайно выбирается 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

Задача 2.28. (Вероятность распределения молекул) Газ, состоящий из n молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на n равных клеток и будем считать, что вероятность каждой молекулы попасть в каждую из n клеток одна и та же, а именно $1/n$. Какова вероятность того, что

молекулы окажутся распределенными так, что в 1-й клетке окажутся m_1 молекул, во 2-й – m_2 молекул и т.д., наконец, в n -й – m_n молекул? При каком распределении эта вероятность максимальна?

Задача 2.29. Найти вероятность того, что при случайном распределении k частиц в n ячейках ($k < n$): а) в k определенных ячейках окажется по одной частице, б) в k каких-то ячейках окажется по одной частице. Задачу решить в статистиках 1) Больцмана, 2) Бозе-Эйнштейна, 3) Линден-Белла и 4) Ферми-Дирака.

Задача 2.30. (обобщение задач 25 и 26). k частиц случайным образом распределяются в n ячейках. k и n любые (целые положительные) числа.

а) Найти вероятность того, что в первой ячейке окажется k_1 частиц, во второй ячейке k_2 частиц и т.д., в n -й ячейке – k_n частиц. При этом, очевидно, должно выполняться $\sum_{i=1}^n k_i = k$. Некоторые k_i могут равняться нулю.

б) Найти вероятность того, что в какой-то ячейке будет k_1 частиц, в какой-то – k_2 частиц и т.д., в какой-то – k_n частиц.

Задачу решить во всех четырех статистиках.

Задача 2.31. Имеется $n + m$ последовательно расположенных на оси Ох ячеек, в которых случайным образом, по одной в ячейке, располагаются n положительно заряженных и m отрицательно заряженных частиц ($n \geq m$). Положительные и отрицательные заряды частиц одинаковы по величине. Найти вероятность такого распределения, при котором суммарный заряд частиц, находящихся слева от любой точки оси Ох, неотрицателен. Задачу решить в статистике Линден-Белла и статистике Ферми-Дирака.

Задача 2.32. В зрительном зале n мест. Билеты нумерованы и все проданы. Зрители садятся на места случайным образом. Найти вероятность того, что ни один зритель не сядет на свое место. Что будет происходить с этой вероятностью при $n \rightarrow \infty$.

Дополнительные вопросы к Лекции 2.

1. Чему равна сумма событий, образующих полную группу.
2. Докажите: $A \subset B \Rightarrow p(A) < p(B)$.
3. Перечислите свойства классической вероятности.

Темы докладов:

1. Блуждание на прямой.
2. Броуновское движение и задача о блуждании на плоскости.

Лекция 3

Другие способы определения вероятности события

1. Геометрические вероятности.

В том случае, если S – непрерывная область, а $S_A \in S$ – область, благоприятствующая появлению в результате случайного эксперимента события A , за вероятность $p(A)$ удобно принять

$$p(A) = m(S_A)/m(S),$$

где $m(S)$ – мера (например, длина, площадь, объем) области S ; $m(S_A)$ – мера области S_A .

Это так называемые геометрические вероятности.

Задача 3.1. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что разрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

Задача 3.2. На отрезок OA длиной L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA будет иметь длину, большую чем $1/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой прямой.

Задача 3.3. В круге радиуса R помещен меньший круг радиуса r . Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

Задача 3.4. (Задача о встрече) Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время?

Задача 3.5. (Задача Бюффона, 1777 г.) На пол, разграфленный параллельными прямыми на полосы ширины L , бросается наугад игла длины l ($l < L$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Задачи повышенной сложности

Задача 3.6. Стержень длины L сломали на три части, выбирая наудачу места разлома. Найти вероятность того, что из получившихся трех частей можно составить треугольник.

Задача 3.7. Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро была $1/3$?

Задача 3.8. Имеется сосуд, содержащий фиксированное число монотонных (без внутренних степеней свободы) молекул, $N \gg 1$. Молекулы между собой никак не взаимодействуют, т.е. кинетическая энергия всей системы есть величина постоянная. Какова вероятность того, что x -ая составляющая скорости i -ой молекулы попадет в заданный интервал (α, β) . Задачу решить в D -мерном пространстве и рассмотреть частные случаи $D=2$ и $D=3$.

2. Статистическое определение вероятности события.

Вернемся к рассмотрению случая, когда пространство S является конечным множеством. Необходимый для классического определения вероятности анализ – рассмотрение полной системы равновозможных событий и выделение тех из них, которые благоприятны для рассматриваемого события, – удается провести далеко не всегда. Например, событие, состоящее в том, что определенный атом радия распадается за время, не превосходящее t , пока не поддается исследованию в такой схеме. Поэтому определить вероятность этого события классическим методом нельзя. Также невозможно при помощи теоретического расчета определить вероятность того, что при формировании звезды она окажется двойной или что рожденный ребенок окажется мужского пола.

Существует другой способ оценки вероятности случайного события – оценка при помощи опыта. Допустим, что комплекс условий, при котором может происходить рассматриваемое событие, многократно в точности повторяется сам или может быть многократно в точности воспроизведен.

Выполним эксперимент многократно и подсчитаем, сколько раз произошло событие A . Если N – общее число экспериментов, а n – число экспериментов, в которых произошло событие A , то n/N назовем относительной частотой появления события A .

За вероятность $p(A)$ примем предел

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

Это статистическая вероятность.

Пример 3.1. Статистика показывает, что относительная частота рождения мальчиков не зависит от местности и этнического состава населения и не отличается заметно от 0,515, если учтено достаточно большое число рождений.

Пример 3.2. Если определить относительную частоту распада атома Ra^{226} за 100 лет, то получим величину 0,04184. Здесь число испытаний в серии равно числу находящихся под наблюдением атомов радия (т.е. порядка 10^{23} - 10^{24}).

Задача 3.9. Два студента решили найти частоту появления «герба» при бросании монеты. Было произведено 4000 опытов, в которых «герб» выпал 2010 раз. Какова частота?

Задача 3.10. При стрельбе из винтовки частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

3. Условная вероятность. Зависимые и независимые события.

Пусть при выполнении некоторого комплекса условий могут произойти случайные события A и B . Их вероятности соответственно равны $p(A)$ и $p(B)$. И пусть событие A произошло, тогда вероятность события B может стать другой, отличной от $p(B)$.

Пример 3.3. Эксперимент – бросание игральной кости. Событие A – выпадение нечетного числа очков, событие B – появление единицы, $p(A) = 1/2$, $p(B) = 1/6$. Если известно, что событие A произошло, то вероятность события B возрастает до $1/3$.

Вероятность события B при условии, что событие A произошло, будем обозначать $p_A(B)$ и называть *условной вероятностью* события B . Аналогично определяется вероятность $p_B(A)$.

Если $p_A(B) = p(B)$, то событие B называют *независимым* от события A , иначе события A и B называют *зависимыми*.

Условная вероятность $p_A(B)$ находится как отношение

$$p_A(B) = p(A \cap B) / p(A),$$

при условии $p(A) \neq 0$.

Задача 3.11. Два студента бросили монету дважды. Какова вероятность того, что во второй раз выпал «герб», если известно, что первым был «герб»?

Задача 3.12. В колоде 36 карт четырех мастей. Извлекли одну карту, она оказалась червовой, после этого колоду перемешали и снова извлекли одну карту. Определить вероятность того, что вторая карта червовая. Определить эту вероятность при условии, что первая карта была возвращена в колоду.

Задача 3.13. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Первого июля было ясно. Найти вероятность того, что и второго июля будет ясная погода.

Задача 3.14. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

Дополнительные вопросы к Лекции 3.

1. Перечислите свойства всех определенных вероятностей.
2. В чем отличия введенных определений и в чем сходство.
3. Приведите примеры независимых и зависимых событий.
4. Пусть справедливо равенство $p_A(B) = p(B)$, выполняется ли при этом $p_B(A) = p(A)$?
5. Докажите формулу для нахождения условной вероятности.

Лекция 4

Аксиоматическое построение теории вероятностей.

Нахождение вероятностей различных событий.

1. Аксиоматическое построение теории вероятностей.

Каждое из введенных ранее определений вероятности имеет свою узкую область применения. Они не являются достаточными для построения общей теории. Чтобы построить теорию вероятностей, непротиворечивую и свободную от ограничений, в основу ее следует положить систему аксиом. Введенные ранее вероятности обладают рядом общих свойств, которые и берут за основу. Принятая в теории вероятностей система аксиом сформулирована А.Н. Колмогоровым. С помощью нее можно ввести следующее определение.

Определим *вероятность* $p(A)$ события $A \in F$ как число, удовлетворяющее следующим свойствам:

- ✓ действительное число;
- ✓ $0 \leq p(A) \leq 1, \forall A \in F$;
- ✓ $p(S) = 1$ (вероятность достоверного события);
- ✓ $p(\sum A_i) = \sum p(A_i)$ для любой счетной (конечной) последовательности взаимно несовместных событий на поле событий F .

Такое достаточно общее определение вероятности позволяет при рассмотрении тех или иных физических явлений конкретизировать понятие вероятности в зависимости от специфики задачи. Итак, вероятность – это функция, заданная на поле событий F и принимающая значения на $[0,1]$.

2. Некоторые *свойства вероятностей*, вытекающие из определения вероятности.

Теорема 4.1. $p(\emptyset) = 0$.

Доказательство.

$S \in F, \bar{S} \in F$, но $\bar{S} = \emptyset$, S и $\bar{S}$ - несовместимы. Следовательно,
 $p(S + \bar{S}) = p(S) + p(\bar{S}) = p(S) + p(\emptyset) = 1 + p(\emptyset) \leq 1$. Отсюда $p(\emptyset) = 0$. ■

Последнее свойство в определении вероятности представляет собой *теорему сложения вероятностей для несовместных событий*.

Теорема 4.2. Вероятность суммы двух несовместных событий (или счетного числа взаимно несовместных событий) равна сумме вероятностей этих событий.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B), \text{ если } A \cap B = \emptyset.$$

Теорема 4.3. (теорема сложения вероятностей для произвольных событий). Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей каждого из этих событий в отдельности без вероятности их совместного появления.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Теорема 4.4. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Доказательство.

A и $\bar{A}$ несовместны и $A + \bar{A} = S$. Следовательно,
 $p(A + \bar{A}) = p(S) = p(A) + p(\bar{A}) = 1$. ■

Задача 4.1. В лотерее 1000 билетов; из них на один билет падает выигрыш 50 000 рублей, на 10 билетов – выигрыши по 10 000 рублей, на 50 билетов – выигрыши по 2 000 рублей, на 100 билетов – выигрыши по 500 рублей, остальные билеты невыигрышные. Вы покупаете один билет. Найти вероятность 1) выигрыша; 2) выиграть не менее 2 000 рублей; 3) выиграть более 2 000 рублей.

Задача 4.2. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

Теорема 4.5. (теорема умножения вероятностей для независимых событий). Вероятность появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$

Теорема 4.6. Вероятность события A , состоящего в появлении хотя бы одного из взаимно независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2) \dots p(\bar{A}_n) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Теорема 4.7. (теорема умножения вероятностей зависимых событий). Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго:

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) \text{ или } p(A \cap B) = p(B)p_B(A).$$

Задача 4.3. Два студента бросили монету дважды. Какова вероятность того, что оба раза выпал «герб»?

Задача 4.4. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что а) обе карты одной масти; б) обе карты червовые, в) хотя бы одна карта червовая. Определить эти же вероятности при условии, что карта не возвращается в колоду.

Задача 4.5. В коробке имеется 5 шаров, 3 белых и 2 черных. Наудачу извлечены 2 шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется а) один белый; б) два белых; в) хотя бы один белый.

Задача 4.6. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 4.7. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут один белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

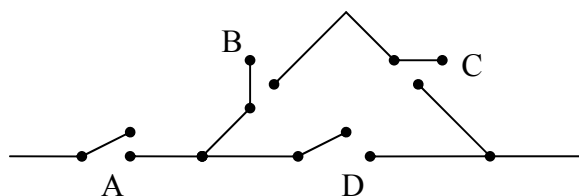
Задача 4.8. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за три смены?

Задача 4.9. Предположим, что для одной торпеды вероятность потопить корабль равна $1/2$. Какова вероятность того, что 4 торпеды потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного попадания торпеды в цель?

Задача 4.10. Происходит бой («дуэль») между двумя участниками (летательными аппаратами, танками, кораблями) А и В. У стороны А в запасе два выстрела, у стороны В – один. Начинает стрельбу А: он делает по В один выстрел и поражает его с вероятностью 0,2. Если В не поражен, он отвечает противнику выстрелом и поражает его с вероятностью 0,3. Если А этим выстрелом не поражен, то он делает по В свой последний выстрел, которым поражает его с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что в бою будет поражен: а) участник А, б) участник В.

Задача 4.11. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один раз выпала шестерка?

Задача 4.12. Пусть переключатели А, В, С и D в показанной схеме срабатывают случайным образом и независимо друг от друга. Найдите вероятность протекания тока I через схему, если вероятность замкнутого состояния каждого переключателя равна 0,2.



Задача 4.13. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка (хотя бы при одном выстреле)? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

Теорема 4.8. (формула полной вероятности). Вероятность события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A :

$$p(A) = p(B_1)p_{B_1}(A) + p(B_2)p_{B_2}(A) + \dots + p(B_n)p_{B_n}(A).$$

Формула Байеса (Бейеса).

Допустим, проводится эксперимент, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез):

$$H_1, H_2, \dots, H_n, \quad H_i \cap H_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \quad \sum H_i = S$$

Суммирование здесь и далее от 1 до n .

Каждая гипотеза реализуется случайным образом с вероятностями $p(H_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum p(H_i) = 1$. Это априорные вероятности (до проведения эксперимента).

Рассмотрим некоторое событие A , которое может появляться только с одной из гипотез с вероятностями $p_{H_1}(A), p_{H_2}(A), \dots, p_{H_n}(A)$. Тогда по формуле полной вероятности

$$p(A) = \sum p(H_i)p_{H_i}(A).$$

Из теоремы умножения вероятностей зависимых событий:

$$p(H_i A) = p(H_i)p_{H_i}(A) = p(A)p_A(H_i).$$

Отсюда

$$p_A(H_i) = p(H_i)p_{H_i}(A)/p(A) = p(H_i)p_{H_i}(A)/\sum p(H_i)p_{H_i}(A) - \text{формула Байеса}.$$

Вероятность $p_A(H_i)$ – это апостериорная вероятность того, что в эксперименте реализовалось условие H_i при результате A .

Задача 4.14. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность следующих событий:

$A = \{\text{первый студент взял хороший билет}\};$

$B = \{\text{второй студент взял хороший билет}\};$

$C = \{\text{оба студента взяли хорошие билеты}\}.$

Задача 4.15. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

Задача 4.16. Среди наблюдаемых спиральных галактик 23% принадлежат подтипу Sa, 31% – подтипу Sb и 46% – подтипу Sc. Вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в галактике Sa составляет 0,0020, в галактике Sb – 0,0035 и в галактике Sc – 0,0055. 1) Найти вероятность вспышки в течение года сверхновой звезды в далекой спиральной галактике, подтип которой определить не удастся. 2) В течение года наблюдений далекой спиральной галактики в ней обнаружена вспышка одной сверхновой звезды. Найти теперь вероятность того, что галактика принадлежит подтипу Sa, Sb, Sc.

Задача 4.17. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из урны наудачу извлечен один шар. 1). Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету). 2). Какое предположение о первоначальном составе шаров (по цвету) наиболее вероятно, если известно, что извлечен белый шар.

Задача 4.18. В пирамиде установлены 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. 1). Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки. 2). Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

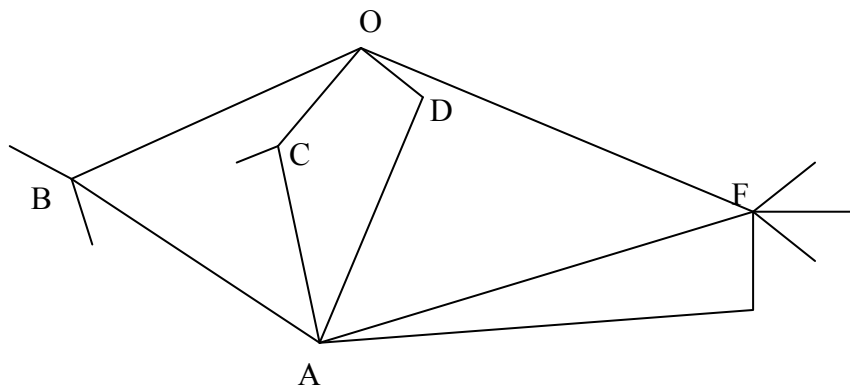
Задача 4.19. В первом черном ящике содержится 10 шаров, из них 8 черных; во втором черном ящике 20 шаров, из них 4 черных. Из каждого черного ящика наудачу взяли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят черный шар.

Задача 4.20. В каждом из трех черных ящиков содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первого ящика наудачу извлечен один шар и переложен во второй ящик, после чего из второго ящика наудачу извлечен один шар и переложен в третий ящик. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьего ящика, окажется белым.

Задача 4.21. Событие A может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3 , образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез,

т.е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем $p_A(B_1)=0,6$ и $p_A(B_2)=0,3$. Чему равна условная вероятность $p_A(B_3)$ гипотезы B_3 ?

Задача 4.22. На рисунке изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта О, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт А?



Задачи повышенной сложности.

Задача 4.23. А – событие: правильное предсказание погоды первым лицом. В – то же – вторым лицом, $p(A)=p_1$, $p(B)=p_2$. Первое лицо предсказало хорошую погоду, а второе – плохую. Какова вероятность наступления хорошей (плохой) погоды.

Задача 4.24. Из многолетних наблюдений известна статистическая вероятность того, что в районе обсерватории ночь будет ясной. В феврале она равна $p(A)=0,18$, в марте $p(B)=0,24$ и в апреле $p(C)=0,36$. Наблюдатель будет иметь в своем распоряжении телескоп в ночь с 5-го на 6-е и с 20-го на 21-е каждого из этих месяцев. Найти вероятность того, что программа наблюдений будет выполнена, если для ее выполнения требуется: 1) одна ясная ночь, 2) две ясные ночи.

Задача 4.25. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:

А = {все пассажиры выйдут на четвертом этаже};

В = {все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже)};

С = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

Задача 4.26. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего из урны наудачу извлечен один шар. 1). Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету). 2). Какое

предположение о первоначальном составе шаров (по цвету) наиболее вероятно, если известно, что извлечен белый шар.

Задача 4.27. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей, когда он тащит билет первым или последним? (число билетов равно числу студентов).

Задача 4.28. В некоторой местности вероятность того, что погода в данный день будет такой же, как и в предыдущий, равна p , если день был дождливый, и q , если день был не дождливый. Вероятность того, что первый день года дождливый, равна p_1 . Найти вероятность того, что n -й день дождливый, и найти предел p_n при $n \rightarrow \infty$.

Задача 4.29. Рассмотренную в Лекции 2 задачу 29 решить при помощи теоремы сложения вероятностей.

Задача 4.30. В условии задачи 29 Лекции 2 найти вероятность того, что ровно m зрителей ($m \leq n$) будут сидеть на своих местах.

Задача 4.31. Вероятность распада радиоактивного атома за время dt равна λdt . Вероятность распада атома не зависит от того, как долго атом уже существует, не распадаясь. Поэтому λ не зависит от времени. Какова вероятность распада атома за время t ? Найти зависимость между коэффициентом λ и временем полураспада T .

Дополнительные вопросы к Лекции 4.

1. Докажите теоремы 2 и 3 для классической вероятности.
2. Обобщите теорему 3 на случай суммы конечного числа произвольных событий.
3. Докажите теоремы 5 и 7, пользуясь классическим определением вероятности и понятием условной вероятности.
4. Докажите теорему 6, не пользуясь классическим определением вероятности, и запишите формулу для случая, когда вероятности событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равны.
5. Обобщите теорему умножения вероятностей на случай, когда число событий больше двух.

Лекция 5

Повторение испытаний

1. Формула Бернулли

Если производятся испытания, в каждом из которых вероятность появления события A не зависит от исходов других, то такие испытания называют независимыми относительно события A . Вероятность p появления события A , очевидно, будет одинакова в каждом из независимых испытаний.

Вероятность того, что при n независимых событиях событие A появится ровно k раз (последовательность появления или не появления события A не важна) равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

Задача 5.1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть: три партии из шести или четыре партии из восьми (ничьи во внимание не принимаются)?

Задача 5.2. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

Задача 5.3. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех?

Задача 5.4. Среди наблюдаемых спиральных галактик 23% принадлежат подтипу Sa. Найти вероятность, что из десяти случайным образом выбранных галактик а) пять принадлежат подтипу Sa; б) менее пяти принадлежат подтипу Sa; в) более пяти принадлежат подтипу Sa; г) более трех и менее пяти галактик принадлежат подтипу Sa.

Задача 5.5. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки – 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них:

- 1) не больше двух девочек;
- 2) более двух девочек;
- 3) две девочки;
- 4) не менее двух и не более трех девочек.

Задача 5.6. Отрезок АВ длиной 15 см разделен точкой С в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены 4 точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки С и две правее. Предполагается, что вероятность

попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Задача 5.7. На отрезок АВ длиной a наудачу брошены 5 точек. Найти вероятность того, что две брошенные точки будут находиться от точки А на расстоянии меньшем x , а три – на расстоянии большем x . Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Задача 5.8. (Задача Банаха) Некий курящий человек носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек ($r = 0, 1, 2, \dots, n$; n – число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок).

2. Формула Пуассона. Распределение Пуассона

Пусть требуется найти вероятность того, что при n независимых событиях событие А появится ровно k раз в случае, когда $n \gg 1$ (n велико), а вероятность появления события А в одном испытании p мала. Вычислить вероятность по формуле Бернулли в этом случае сложно, поэтому применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Формула является достаточно точной, если $p < 0,1$, $npq \leq 9$.

Задача 5.9. Пряжильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течении одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течении одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Задача 5.10. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубометре воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм³ воздуха. Найти вероятность того, что в нём будет обнаружен хотя бы один микроб.

Задача 5.11. Имеется группа из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придётся на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

3. Теоремы Муавра-Лапласа

Рассмотрим еще один предельный случай формулы Бернулли: $n \gg 1$, p и q не малы и $npq \geq 9$.

Локальная теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi \left[\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right],$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ затабулирована (см. таблицы в конце учебников и задачников).

Интегральная теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от m_1 до m_2 раз приближенно равна

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz, \quad \text{где } x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Или $P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ — функция Лапласа (затабулирована).

Иногда эту функцию вводят иначе (см. внимательнее таблицы)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Задача 5.12. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Задача 5.13. Монета брошена $2N$ раз (N велико!). Найти вероятность того, что герб выпадет ровно N раз.

Задача 5.14. Вероятность появления в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится:

- а) не менее 1470 и не более 1500 раз;
- б) не менее 1470 раз;
- в) не более 1469 раз;
- г) более 1469 раз;
- д) менее 1501 раза.

Задача 5.15. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

4. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p , отклонение относительной частоты появления события m/n от его вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, приближенно равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задача 5.16. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Задача 5.17. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Задача 5.18. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний n , при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Задача 5.19. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε , что с вероятностью 0,7698 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысит ε .

Задача 5.20. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,9973 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

Задача 5.21. Французский ученый Бюффон (XVII в) бросил монету 4040 раз, причем «герб» появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности его появления по абсолютной величине не более чем в опыте самого Бюффона.

5. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим,

если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

причем:

- а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0 ;
- б) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа k_0 и $k_0 + 1$;
- с) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Задача 5.22. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна $2/3$. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.

Задача 5.23. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

Задача 5.24. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

Дополнительные вопросы и задачи к Лекции 5.

1. Докажите формулу Бернулли.
2. Исследовать функцию $\varphi(x)$ из локальной теоремы Лапласа.
3. Найти вероятность $P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, пользуясь локальной теоремой Муавра-Лапласа.
4. Исследовать функцию Лапласа $\Phi(x)$, построить её график.
5. Докажите формулу для приближенного нахождения отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях
6. Обоснуйте неравенство для нахождения наивероятнейшего числа появлений события в независимых испытаниях

Темы докладов:

4. Вывод формулы Пуассона.
5. Доказательство локальной и интегральной теорем Лапласа.

Лекция 6

Случайная величина и ее законы распределения

1. Случайная величина – это функция, заданная на множестве (пространстве) исходов: каждому исходу эксперимента (опыта) $S_k \in S$ поставлено по какому-то правилу X в соответствие единственное число $x_k = X(S_k)$. При этом X – случайная величина, x_k – значения, которые она принимает.

Со случайными величинами, рассматриваемыми в одном и том же опыте, обращаются как с обычными числовыми функциями: их можно складывать, вычитать, умножать и т.д. Обозначать случайные величины будем прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т.д.

Возможные значения случайной величины образуют множество $M(x)$, которое будем называть множеством значений случайной величины. $M(x)$ может быть дискретным или непрерывным. В зависимости от этого все случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Множество возможных значений дискретной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

Пример 6.1. Эксперимент – бросаем игральную кость. Исход – то или иное число очков. Пространство исходов – $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Случайная величина X – число выпавших очков. Множество значений случайной величины – $M(x) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 6.2. Эксперимент – бросаем три монеты. Исход – та или иная последовательность появления «гербов» и «решек». Всего исходов – 8, занумеруем их последовательно. Пространство исходов – $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Здесь каждый номер соответствует одному исходу. Например, 1- выпадение трех «гербов», 2 – выпадение комбинации «герб»-«герб»-«решка» и т.д. Случайная величина X – частота появления герба. Множество значений случайной величины – $M(x) = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$.

Пример 6.3. Эксперимент – стрельба из орудия. Исход – то или иное расстояние, которое пролетит снаряд. Пространство исходов – $S = (0, l)$. Случайная величина X – расстояние, которое пролетит снаряд. Множество значений случайной величины – $M(x) = (0, l)$.

Задача 6.1. Описать исход эксперимента. Ввести случайную величину и найти множество значений данной случайной величины.

- 1) Бросание монеты.
- 2) Измерение сопротивления резистора контролером ОТК.
- 3) Толкание ядра спортсменом.
- 4) Ожидание автобуса при условии, что ожидание не более 15 минут.

- 5) Последовательное бросание трех игральных костей.
- 6) Из колоды карт вытаскивают последовательно карты по одной до появления туза.
- 7) Проверка выпускаемых изделий до выявления первого бракованного.

2. Любая случайная величина характеризуется своим *законом распределения*.

Закон распределения случайной величины – это любое правило, позволяющее находить вероятности тех или иных значений случайной величины.

Для дискретных случайных величин закон распределения удобно задавать таблицей:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

При этом $\sum p_i = 1$.

Задача 6.2. Для любых трех дискретных случайных величин из Задачи 1 задать таблично закон распределения.

Задача 6.3. В группе 16 студентов, 10 – юношей и 6 – девушек. Для проверки знаний наудачу отбирают 8 человек. Задать таблично закон распределения случайного числа X девушек среди отобранных лиц.

Задача 6.4. В коробке имеется 5 шаров, 3 белых и 2 черных. Наудачу извлечены 2 шара. Задать таблично закон распределения случайного числа X белых шаров, содержащихся в выборке.

Задача 6.5. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбираются наугад 6 изделий. Задать таблично закон распределения случайного числа X бракованных изделий, содержащихся в выборке.

Задача 6.6. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Задать таблично закон распределения случайного числа X светофоров, пройденных автомашиной до первой остановки.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. В прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают значения x_k , по оси ординат соответствующие им p_k . Полученные точки (x_k, p_k) соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Задача 6.7. Построить многоугольники распределения для случайных величин из задач 3-6.

Задача 6.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	12	24
$p(X)$	0,2	0,1	0,3	0,3	?

Найти вероятность значения $x_5 = 24$ и построить многоугольник распределения.

Функция распределения (интегральная функция распределения или интегральный закон распределения) $F(x)$ как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, задается формулой

$$F(x) = P(X < x),$$

где X – случайная величина; x – конкретное значение случайной величины;

$P(X < x)$ – вероятность того, что в эксперименте случайная величина примет значение меньше x .

Для дискретной случайной величины: $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$, графиком будет кусочно-постоянная функция. В случае непрерывной случайной величины, ее функция распределения непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения:

1. $F(x)$ – неубывающая функция (если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$);
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $0 \leq F(x) \leq 1$;
3. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;
4. $P(X = a) = \lim_{b \rightarrow a} [F(b) - F(a)]$. Если функция непрерывна, то $P(X = a) = 0$; если разрывна (дискретная случайная величина), то вероятность $P(X = a)$ равна величине скачка в точке $x = a$.

Следствие:

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Пример 6.4. Опыт состоит из 3-х независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p=0,5$. Для случайного числа появлений герба построить закон распределения, многоугольник распределения, функцию распределения.

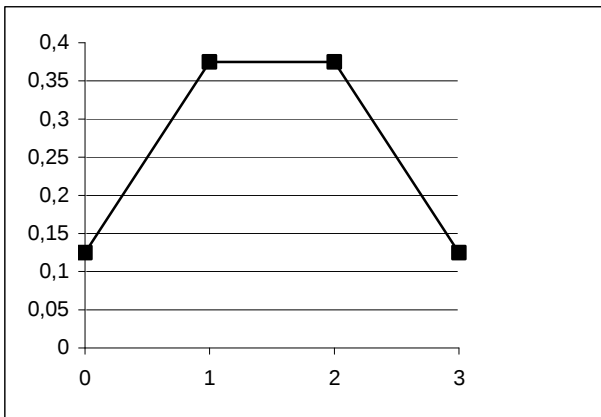
Решение. Множество значений случайной величины $M(x) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Вероятности p_k вычисляются по формуле $p_k = C_3^k p^k q^{3-k}$.

Закон распределения:

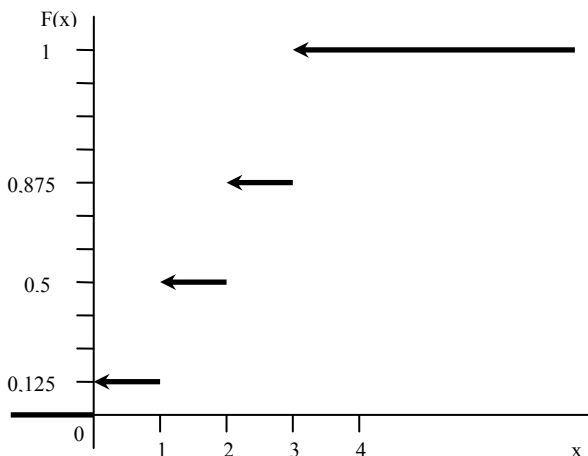
X	0	1	2	3
$p(X)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Многоугольник распределения:



Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,125, & 0 < x \leq 1 \\ 0,5, & 1 < x \leq 2 \\ 0,875, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Задача 6.9. Построить функцию распределения для случайных величин из задач 4, 6, 8.

Задача 6.10. Стрельба независимыми выстрелами производится до первого попадания в цель или до полного израсходования всего боекомплекта, состоящего из четырёх снарядов. Требуется составить закон распределения случайного расхода боезапаса за стрельбу, если вероятность попадания в цель каждым снарядом равна $p = 0,6$. Построить функцию распределения случайной величины, нарисовать её график.

Задача 6.11. Монету бросают пока не выпадет «решка». Найти функцию распределения числа выпадений «герба».

Задача 6.12. Одновременно бросают 8 «правильных» монет. Найти закон распределения и функцию распределения числа выпавших «гербов».

Задача 6.13. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом 5 изделий для проверки их качества. Построить функцию распределения числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Задача 6.14. Пусть на отрезок $[0,1]$ вещественной прямой случайным образом бросается точка, т.е. вероятность попадания точки в любой интервал из $[0,1]$ пропорциональна длине этого интервала. Построить функцию распределения случайной величины X – координаты брошенной на отрезок точки.

Задача 6.15. Точка брошена наудачу внутри круга радиуса $R=1$. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения расстояния от точки до центра круга.

Задача 6.16. На круглый стол радиуса r падают капли дождя. Пусть ρ – расстояние от места падения капли до центра стола. Найти распределение ρ .

Задача 6.17. Дана функция распределения случайной величины $F(x) = c + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, ($a > 0$, $-\infty < x < \infty$). Определить: 1) постоянные b и c , 2) $p(\alpha < X < \beta)$.

Задача 6.18. Проекция x радиус-вектора случайной точки окружности радиуса a на диаметр имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq a; \\ c + b \cdot \arcsin \frac{x}{a} & \text{при } -a < x < a; \\ 0 & \text{при } x \leq -a. \end{cases}$$

Определить: 1) постоянные b и c , 2) вероятность того, что X окажется в пределах промежутка $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Задача 6.19. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad (t \geq 0).$$

Найти вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T .

Задача 6.20. Случайная величина X задана формулой распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3; \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти 1) вероятность попадания величины X в интервал $(1; 2,5)$, 2) вероятность попадания величины X в интервал $(2,5; 3,5)$.

3. Для непрерывных случайных величин можно ввести **дифференциальную функцию распределения** $f(x)$ или **плотности распределения вероятностей** непрерывной случайной величины.

$$f(x) = F'(x).$$

График функции $f(x)$ называют *кривой распределения*.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу (α, β) находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Кроме того, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Нахождение интегральной функции распределения по дифференциальной.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Свойства дифференциальной функции:

1) $f(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Вероятностный смысл дифференциальной функции распределения.

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x) \Delta x,$$

если Δx – мало. Поэтому по аналогии с физикой $f(x)$ называют плотностью распределения вероятностей случайной величины X .

Задача 6.21. В задачах 6.14–6.20 найти дифференциальную функцию распределения случайных величин.

Задача 6.22. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ A & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти коэффициент A ; построить функцию распределения $F(x)$ и начертить её график.

Задача 6.23. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Построить функцию распределения $F(x)$.

Задача 6.24. Плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x) = Ax^2 e^{-\lambda x}, \quad (\lambda > 0, 0 \leq x < \infty).$$

Найти коэффициент A ; построить функцию распределения $F(x)$; вычислить вероятность попадания величины X в интервал $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$.

Задача 6.25. Величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Найти дифференциальную функцию, используя понятие δ -функции Дирака.

Задача 6.26. Найти дифференциальную функцию детерминированной случайной величины $X = a$, используя понятие δ -функции Дирака.

Задачи повышенной сложности.

Задача 6.27. Известно, что отношение числа кратных систем звезд с кратностью k к числу кратных систем звезд с кратностью $k-1$ приблизительно постоянно (не зависит от k) и равно b . В предположении, что этот закон выполняется строго, рассмотреть в качестве случайной величины кратность системы, которой принадлежит случайно выбранная звезда, и найти ее распределение.

Задача 6.28. Вероятность распада радиоактивного атома за время dt равна λdt . Вероятность распада атома не зависит от того, как долго атом уже существует, не распадаясь. Поэтому λ не зависит от времени. Найти функцию распределения времени распада радиоактивного атома.

Задача 6.29. Пространство заполняет газ. Вероятность встретить молекулу газа внутри бесконечно малого объема $d\mathcal{V}$ равна $ad\mathcal{V}$. Для любой молекулы в

любой момент времени найдется какая-то молекула – ближайший сосед. Расстояние до ближайшего соседа есть случайная величина. В разные моменты времени она различна. Найти функцию распределения расстояния до ближайшего соседа.

Дополнительные вопросы к Лекции 6.

1. Докажите, что в случае дискретной случайной величины $\sum p_i = 1$.
2. Доказать свойства функции распределения.
3. Почему для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины дифференциальная функция неприменима?
4. Доказать формулы $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ и $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
5. Дать геометрическую интерпретацию данным формулам (через площадь криволинейной трапеции).
6. Найти формулу для $P(-\alpha < X < \alpha)$ в случае четной функции $f(x)$.
7. Доказать формулу для нахождения интегральной функции распределения по дифференциальной.
8. Доказать свойства дифференциальной функции.
9. Сформулировать вероятностный смысл дифференциальной функции распределения.

Лекция 7

Случайная величина и ее числовые характеристики

Закон распределения для дискретных случайных величин, функция распределения или плотность для непрерывных – это исчерпывающие характеристики случайных величин. Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Достаточно бывает указать только отдельные параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками случайной величины.

1. Математическое ожидание $M[X]$

Данная характеристика даёт возможность оценить среднее значение случайной величины.

$$m_X = M[X] = \sum_i p_i x_i,$$

$$m_X = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

для, соответственно, дискретных и непрерывных случайных величин.

Пример 7.1. Случайная величина X задана законом распределения

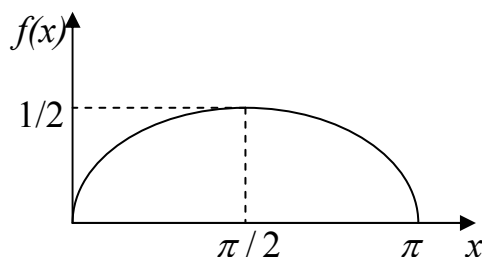
X	0	1	2	3
$p(X)$	0,1	0,3	0,5	0,1

Математическое ожидание $M[X]=1,6$.

Пример 7.2. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in (0, \pi)$$

$$M[X] = \frac{\pi}{2}.$$



Задача 7.1. Вычислить математическое ожидание для случайных величин из задач 6.6, 6.8, 6.10, 6.14, 6.15, 6.19, 6.20, 6.22 Лекции 6. Сделать вывод о среднем значении каждой из случайных величин.

Задача 7.2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события равна p . Сделать вывод.

Свойства математического ожидания (для дискретных случайных величин).

1. $M[C] = C$, где C постоянная величина;

2. Пусть X – дискретная случайная величина, C – постоянная величина.

Если

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

то (по определению)

CX	Cx_1	Cx_2	$\dots$	Cx_n	$\dots$
$p(CX)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

$$M[CX] = CM[X].$$

3. Две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Несколько случайных величин называют взаимно независимыми, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Пусть X и Y – независимые случайные величины. Если

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\dots$
$p(Y)$	q_1	q_2	$\dots$	q_n	$\dots$

то (по определению)

XY	x_1y_1	x_1y_2	$\dots$	x_1y_n	x_2y_1	$\dots$	x_ny_n	$\dots$
$p(XY)$	p_1q_1	p_1q_2	$\dots$	p_1q_n	p_2q_1	$\dots$	p_nq_n	$\dots$

$$M[XY] = M[X]M[Y].$$

Следствие: Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

4. Пусть X и Y – случайные величины,

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
$p(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\dots$
$p(Y)$	q_1	q_2	$\dots$	q_n	$\dots$

тогда (по определению) для независимых случайных величин

$X + Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$\dots$	$x_1 + y_n$	$x_2 + y_1$	$\dots$	$x_n + y_n$	$\dots$
$p(XY)$	p_1q_1	p_1q_2	$\dots$	p_1q_n	p_2q_1	$\dots$	p_nq_n	$\dots$

В случае зависимых величин возможные значения суммы находятся также, их вероятности равны произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y].$$

Следствие: Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Замечание: Свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин.

Задача 7.3. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 4Y$, если известно, что $M[X] = 2$, $M[Y] = 6$.

Задача 7.4. Доказать, что $M[X - Y] = M[X] - M[Y]$.

Задача 7.5. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная, что $M[X] = 8$.

Задача 7.6. Доказать, что математическое ожидание отклонения $X - M[X]$ равно нулю.

Задача 7.7. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X : $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Известно, что $M[X] = 0,1$, $M[X^2] = 0,9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3 , соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3 .

Задача 7.8. Найти двумя способами математическое ожидание суммы и произведения дискретных случайных величин X и Y , заданных законом распределения

X	-1	1	3
$p(X)$	0,2	0,5	0,3

Y	0	1	2
$p(Y)$	0,3	0,4	0,3

В случае непрерывных случайных величин произведение и сумма случайных величин вводятся точно также и все свойства математического ожидания сохраняются.

2. Медиана x_m определяется из условия:

$$P(X < x_m) = P(X > x_m) = \frac{1}{2}.$$

Пример 7.3. Если $f(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in (0,2)$, то x_m определяется из уравнения

$$\int_0^{x_m} f(x) dx = \int_{x_m}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_m} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $x_m^2 = 2$, $x_m = \sqrt{2}$.

3. Мода M_x – наиболее вероятное значение X .

Пример 7.4 $f(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in (0,2)$. Максимальное значение $f(x)$ достигается при $x = 2$, следовательно, $M_x = 2$.

Задача 7.9. Найти медианы и моды в задачах 6.20 и 6.23 Лекции 6.

4. Начальный момент порядка k определяется как $\nu_k[X] = M[X^k]$;

для непрерывных случайных величин – $\nu_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$;

для дискретных – $\nu_k[X] = \sum x_i^k p_i$.

Центральный момент порядка k определяется как $\mu_k[X] = M[X - M[X]]^k$;

для непрерывных случайных величин – $\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k f(x) dx$;

для дискретных случайных величин – $\mu_k[X] = \sum (x_i - M[X])^k p_i$.

Задача 7.10. Опираясь на формулы для моментов дискретной случайной величины, найдите

5. Центральный момент порядка $k = 2$ называется **дисперсией** и обозначается $D[X]$. Квадратный корень из дисперсии называют средним квадратическим отклонением случайной величины и обозначают $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = 0$, если C – постоянная;
2. $D[X + C] = D[X]$;
3. $D[CX] = C^2 D[X]$;
4. $D[\sum X_i] = \sum D[X_i]$ для попарно независимых случайных величин;

Формулы для вычисления дисперсии:

$$D[X] = M[X - M[X]]^2$$

и

$$D[X] = M[X^2] - [M[X]]^2.$$

Задача 7.11. Дана дискретная случайная величина

X	-0,2	-0,1	0	0,1
$p(X)$	0,2	0,3	0,4	?

Найти дисперсию X двумя способами.

Задача 7.12. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию величины $Z = 2X + 3Y$, если известно, что $D[X] = 4$, $D[Y] = 5$.

Задача 7.13. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2 , причем равновероятных. Доказать, что дисперсия величины X равна $D[X] = \left[\frac{x_2 - x_1}{2} \right]^2$.

Задача 7.14. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение в задачах 6.8, 6.20, 6.23 Лекции 6.

Задача 7.15. Найти дисперсию случайной величины X , заданной интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Задача 7.16. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,05.

Задача 7.17. При 10000 бросаниях монеты «герб» выпал 5400 раз. Следует ли считать, монета несимметрична?

6. Коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y определяется как

$$\rho(X, Y) = \frac{M[XY] - M[X]M[Y]}{\sqrt{D[X]D[Y]}}.$$

Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если $\rho(X, Y) = 0$.

Задача 7.18. Даны случайные величины X с плотностью вероятности $f(x) = Ae^{-x^2}$ и $Y = X^2$. Найти коэффициент корреляции и проанализировать результат.

Задачи повышенной сложности.

Задача 7.19. Вероятность того, что частица на участке пути $[l, l + dl]$ столкнётся с другой частицей, равна λdl . Найти функцию распределения длины свободного пробега l , а также её среднюю величину, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задача 7.20. В условиях задачи 6.27 из Лекции 6 найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение расстояния r до молекулы – ближайшего соседа.

Дополнительные вопросы к Лекции 7.

1. Доказать, что математическое ожидание даёт возможность оценить среднее значение случайной величины.
2. Доказать свойства математического ожидания (для дискретных случайных величин).
3. Какой вероятностный смысл имеет медиана?
4. Почему в примере 2.1 взяли только одно решение уравнения?
5. Какой момент равен математическому ожиданию?
6. Какой момент для любой случайной величины равен нулю?
7. Можно ли выразить центральные моменты через начальные?
8. Пусть $X = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 – независимые случайные величины, имеющие центральные моменты третьего порядка, соответственно равные μ_3^1 и μ_3^2 . Доказать, что $\mu_3 = \mu_3^1 + \mu_3^2$, где μ_3 – центральный момент третьего порядка величины X .
9. Доказать свойства дисперсии
10. Вывести вторую формулу для вычисления дисперсии
11. Какой вероятностный смысл имеет дисперсия?
12. Зачем понадобилось введение среднего квадратического отклонения?
13. Как с помощью дисперсии показать, что с увеличением числа измерений некоторой величины надежность результата возрастает;
14. Доказать, что если случайные величины X и Y независимы, то $\rho(X, Y) = 0$.
15. Доказать, что пределы изменения коэффициента корреляции $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$.

Лекция 8

Некоторые важные для практики распределения случайных величин

1. Биноминальное распределение.

Вероятность того, что при n независимых событиях событие A появится ровно k раз (последовательность появления или не появления события A не важна) равна (формула Бернулли)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Говорят, что дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение*, если её возможные значения $x = 0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$, а соответствующие им вероятности, вычисляются по формуле Бернулли.

Данное распределение зависит от двух параметров n и p .

Задача 8.1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

Задача 8.2. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M[X] = 0,9$.

Задача 8.3. Проводятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A , если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

2. Распределение Пуассона.

Говорят, что дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если её возможные значения $x = 0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$, а соответствующие им вероятности, выражаются формулой

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$a = np$, n – велико.

Данное распределение зависит от одного параметра a .

Задача 8.4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, имеющей распределение Пуассона.

3. Геометрическое распределение.

Задача 8.5. Два студента бросают монету до появления «герба». Какова вероятность того, что они 1 раз бросили монету? 5 раз? Исследуйте случайную величину X – число появлений «решки» (найдите числовые характеристики).

Задача 8.6. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность его попадания при одном выстреле 0,875. Какова вероятность того, что он сделает 1 выстрел? 3 выстрела? Каково наиболее вероятное число выстрелов? Оцените среднее значение выстрелов? Исследуйте случайную величину X – число выстрелов (найдите числовые характеристики).

Задача 8.7. Пусть производится ряд независимых опытов с целью получения какого-либо результата A . В каждом опыте вероятность появления события A равна p . Случайная величина X – число безуспешных попыток до первой попытки, в которой появится результат A . Найти закон распределения данной случайной величины и ее числовые характеристики.

Говорят, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots$, а вероятности этих значений находятся по формуле $P_m = q^m p$, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Вопрос: Почему данное распределение называют геометрическим?

Запишите выражения для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины с геометрическим распределением.

4. Гипергеометрическое распределение.

Задача 8.8. Имеется черный ящик, в котором a белых и b черных шаров. Из него вынимается n шаров. Случайная величина X – число белых шаров среди вынутых. Найти закон распределения данной случайной величины и ее числовые характеристики.

Говорят, что случайная величина X имеет *гипергеометрическое распределение* с параметрами a , b , n , если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$, а вероятности этих значений находятся по формуле $P_m = \frac{C_a^m C_b^{n-m}}{C_{a+b}^n}$.

Запишите выражения для математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины с гипергеометрическим распределением.

5. *Равномерное распределение.*

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение* на участке от a до b , если ее плотность распределения $f(x)$ на этом участке постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a; \\ A & \text{при } a < x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Иногда это распределение называют прямоугольным.

Задача 8.9. Найти параметр A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X .

Задача 8.10. Найти среднее значение и дисперсию произведения двух независимых случайных величин X и Y с равномерными законами распределения: X в интервале $[0,1]$, Y – в интервале $[1,3]$.

Задача 8.11. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a < x < b$. Рассматривая длину ребра куба как случайную величину X , распределенную равномерно в интервале (a,b) , найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Привести примеры со случайными величинами, имеющими равномерное распределение.

6. *Показательное распределение.*

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение, если ее плотность распределения $f(x)$ находится по формуле:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Положительная величина λ называется параметром показательного распределения.

Задача 8.12. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X . Найти вероятность $P(a < X < b)$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Изучить самостоятельно тему «Функция надежности и показательный закон надежности».

7. Нормальный закон распределения или закон Гаусса.

Этот закон распределения занимает особое положение среди всех законов распределения. Он чаще всего встречается в физике.

Говорят, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ , если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Выясните смысл параметров a и σ .

Какое нормальное распределение называют **нормированным**.

Найдите функцию распределения $F(x)$ для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ . **Каким образом** интегральная функция нормального распределения $F(x)$ выражается через функцию Лапласа. **Свойства** функции Лапласа.

Исследование дифференциальной функции нормального распределения $f(x)$. Нормальная кривая и её график.

Найти выражения для вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал (α, β) и в интервал $(0, x)$.

Правило 3-х сигм и его применение на практике.

Задача 8.13. Нормально распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{72}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию X .

Задача 8.14. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15;25).

Задача 8.15. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X , которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически, длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали:

а) больше 55 мм;

б) меньше 40 мм.

Задача 8.16. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, фактический диаметр случаен и распределен по

нормальному закону с математическим ожиданием $a=10$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_1=10,7$ мм и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром 9,3 мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

Задача 8.17. Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным нулю. Сколько процентов стандартной продукции изготавливается автоматом.

Задача 8.18. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

Задача 8.19. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Что больше: $P(-0,5 \leq X \leq -0,1)$ или $P(1 \leq X \leq 2)$?

Задача 8.20. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти стандартное отклонение, если 8% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

Лекция 9

Законы больших чисел

Очень часто при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. Совокупность условий, когда это происходит, указывается в теоремах, которые имеют общее название – «закон больших чисел».

1 Неравенство Чебышева (справедливо и для непрерывных, и для дискретных случайных величин).

Для любой случайной величины X , имеющей $M[X] < \infty$ и $D[X] < \infty$, справедливо неравенство

$$P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq D[X] / \varepsilon^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D[X] = \sigma^2[X] &> \int_{-\infty}^{M[X]-\varepsilon} |x - M[X]|^2 f(x) dx + \int_{M[X]+\varepsilon}^{+\infty} |x - M[X]|^2 f(x) dx \geq \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{M[X]-\varepsilon} f(x) dx + \varepsilon^2 \int_{M[X]+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \varepsilon^2 P(|X - M[X]| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Доказательство неравенства Чебышева для дискретных случайных величин аналогично.

Следствие 1. $P(|X - M[X]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0.$

Следствие 2. $P(|X - M[X]| \geq 3\sigma[X]) \leq \frac{1}{9}.$

2 1-я теорема Чебышева.

Пусть имеется случайная величина X , $M[X] < \infty$ и $D[X] < \infty$. Пусть производится n независимых экспериментов, в результате которых получен ряд значений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть $Y_n = \sum X_i / n$. Тогда, для любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется значение N такое, что

$$P(|Y_n - M[X]| > \varepsilon) < \delta \quad \text{при } n > N. \quad (2)$$

Доказательство. Действительно, $M[Y_n] = M[X]$, $D[Y_n] = \sigma^2[X] / n$. Из (1) следует $P(|Y_n - M[X]| > \varepsilon) < D[Y_n] / \varepsilon^2 = \sigma^2[X] / n\varepsilon^2$. Определим N из условия $\sigma^2[X] = N\varepsilon^2\delta$. Тогда при $n > N$ выполняется неравенство (2). ■

Отметим, что выполнение (2) при любых, сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $n > N$ означает, что последовательность Y_n сходится по вероятности к $M[X]$.

Следствие. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - M[X]| < \varepsilon) = 1.$

3 2-я теорема Чебышева.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – ряд независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M[X_1], M[X_2], \dots, M[X_n]$ и дисперсиями $D[X_1], D[X_2], \dots, D[X_n]$. Пусть $Y_n = \sum X_i / n$. Считаем, что дисперсии ограничены одним и тем же числом $D[X_i] \leq D, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$D[Y_n] = \frac{\sum D[X_i]}{n^2} \leq \frac{D}{n},$$

$$P(|Y_n - M[Y_n]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2} \leq \frac{D}{n\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Определив, как и при доказательстве (2), N из условия $D = N\varepsilon^2\delta$, приходим к выводу, что Y_n сходится по вероятности к $M[Y_n]$. ■

Следствие. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - M[Y_n]| < \varepsilon) = 1$.

Вывод: отдельные независимые случайные величины могут принимать значения далекие от своих математических ожиданий, при этом среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значения близкие к определенному постоянному числу равному $M[Y_n]$, т.е. чем больше n , тем больше среднее арифметическое независимых случайных величин утрачивает характер случайной величины.

4 Теорема Бернулли.

При неограниченном возрастании числа n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , частота события A сходится по вероятности к его вероятности p .

Доказательство. Пусть X принимает значение 1 или 0 с вероятностью, соответственно, p или $q = 1 - p$. Тогда $M[X] = p$, частота $\nu = \sum X_i / n$. Математическое ожидание частоты $M[\nu] = \sum M[X_i] / n = np / n = p$. Следовательно, ν сходится по вероятности к p . ■

Следствие. $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Задача 9.1. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

Задача 9.2. Длина изготавливаемых изделий представляет случайную величину, среднее значение которой (математическое ожидание) равно 90 см.

Дисперсия этой величины равна 0,0225. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что а) отклонение длины изготовленного изделия от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4; б) длина изделия выразится числом, заключенным между 89,7 и 90,3 см.

Задача 9.3. Вероятность появления события в каждом испытании равна $1/4$. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события будет заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

Задача 9.4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
$p(X)$	0,2	0,3	0,5

Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M[X]| < \sqrt{0,4}$.

Задача 9.5. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Случайная величина X_m , $m = 1, 2, \dots, n, \dots$, может принимать только три значения $-\sqrt{m}, 0, \sqrt{m}$ с вероятностями, равными соответственно $1/n, 1 - 2/n, 1/n$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

Задача 9.6. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ задана законом распределения:

X_m	a	$-a$
$p(X_m)$	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

$m = 1, 2, \dots, n, \dots$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

Дополнительные вопросы к Лекции 9.

1. Докажите следствия 1 (неравенство Чебышева).
2. Докажите следствие 2 и сравните данную вероятность с соответствующей для нормального закона. Сделайте вывод.

Лекция 10

Случайные векторы

1. Предположим, что каждому исходу случайного эксперимента соответствует не одно, а несколько случайных чисел.

Пример 10.1. Стреляем в мишень. Координаты попадания – совокупность двух случайных величин X и Y .

Совокупность (или система) случайных величин – *случайный вектор*:

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Пример 10.2. Взвешиваем тело n раз. Из-за ошибок каждое взвешивание дает случайный результат x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Совокупность всех измерений $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – случайный вектор.

Величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, образующие случайный вектор могут быть независимыми или зависимыми.

2. Способы задания системы случайных величин.

2.1. Табличный способ. Возможен, если все $X_1, X_2, \dots, X_n$ – дискретные случайные величины. Результат – n -мерная таблица.

Для $n = 2$:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\dots$	x_k
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\dots$	$p(x_k, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_k, y_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\dots$	$p(x_k, y_m)$

События $(X = x_i, Y = y_j)$, $(i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, m)$ образуют полную группу. Следовательно, сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таблицы, равна единицы.

2.2. Интегральная функция распределения (и для дискретных, и для непрерывных систем случайных величин) определяется соотношением:

$$n = 1: \quad F(x) = P(X < x),$$

$$n = 2: \quad F(x, y) = P(X < x, Y < y),$$

$\dots$

$$n: \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Свойства интегральной функции распределения двумерной случайной величины:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$,

2. $F(x, y)$ – неубывающая функция по каждому аргументу,

3. Предельные соотношения:

$$F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, -\infty) = 0, \\ F(\infty, \infty) = 1.$$

4. $F(x, \infty) = F_1(x)$, $F(\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – интегральные функции составляющих X и Y соответственно.

Задача 11.1. Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков таковы:

X	1	2	3
$p(X)$	0,1	0,3	0,6

Y	1	2	3
$p(Y)$	0,2	0,3	0,5

Найти закон распределения суммы очков, выбиваемых двумя стрелками.

Задача 11.2. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p . Рассматриваются две случайные величины; X – число попаданий; Y – число промахов. Построить функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) .

Вероятность попадания случайной точки в полуполосу:

$$P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y).$$

$$P(x < X, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Дифференциальная функция распределения (только для непрерывных систем случайных величин) определяется соотношением:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Предполагается, что интегральная функция всюду непрерывна и имеет непрерывную смешанную частную производную второго порядка, за исключением быть может конечного числа точек.

Свойства дифференциальной функции распределения:

1. $f(x, y) \geq 0$,

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Задача 11.3. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (3 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Найти:

- а) величину A ;
- б) функцию распределения $F(x, y)$;
- в) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Вероятность попадания случайной точки в произвольную область D :

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy.$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy,$$

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \text{ — плотность распределения составляющей } X,$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx, \text{ — плотность распределения составляющей } Y,$$

Условные плотности распределения составляющих:

$$f_2(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \text{ и } f_1(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Свойства условных дифференциальных функций распределения:

1. $f_2(y | x) \geq 0$, $f_1(x | y) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y | x) dy = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x | y) dx = 1$.

Две случайные величины независимы, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Следовательно, условные распределения независимых величин равны их безусловным распределениям.

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Следствие: Для непрерывных независимых случайных величин:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Задача 11.4. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 4$, $y = 10$, $x = 61$, $y = 15$, дифференциальная функция сохраняет постоянное значение, а вне этого прямоугольника она равна нулю. Найти:

- а) дифференциальную функцию системы;
- б) интегральную функцию системы;

Выяснить, зависимы ли эти случайные величины.

Задача 11.5. Имеются две независимые случайные величины X и Y , каждая из которых подчинена показательному закону:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \mu e^{-\mu x} & \text{при } y \geq 0. \end{cases}$$

Написать выражения:

- а) плотности распределения системы (X, Y) ;
- б) функции распределения системы (X, Y) .

Плотность вероятности f_{x+y} суммы двух независимых случайных величин называется композицией плотностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$ этих величин.

$$f_{x+y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx.$$

Задача 11.6. Доказать, что сумма $X + Y$ независимых нормально распределенных случайных величин X и Y с параметрами соответственно (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) нормально распределена с параметрами $a = a_1 + a_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Числовые характеристики двумерной случайной величины (аналогично в n -мерном случае).

Математические ожидания:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{i,j}, \quad M[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{i,j} \quad - \text{ для дискретных } X \text{ и } Y,$$

$$M[X] = \int \int_{-\infty-\infty}^{\infty-\infty} x f(x, y) dx dy, \quad M[Y] = \int \int_{-\infty-\infty}^{\infty-\infty} y f(x, y) dx dy \quad - \text{ для непрерывных } X \text{ и } Y.$$

Дисперсии:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - M[X])^2 p_{i,j}, \quad D[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (y_j - M[Y])^2 p_{i,j} \quad - \text{ для дискретных } X \text{ и } Y,$$

$$D[X] = \int \int_{-\infty-\infty}^{\infty-\infty} (x - M[X])^2 f(x, y) dx dy, \quad D[Y] = \int \int_{-\infty-\infty}^{\infty-\infty} (y - M[Y])^2 f(x, y) dx dy \quad - \text{ для непрерывных } X \text{ и } Y.$$

Условные математические ожидания:

$$M[Y | x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y | x) dy, \quad M[X | y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x | y) dx.$$

Коэффициент корреляции (см. ранее)

$$\rho(x, y) = \frac{\int \int_{-\infty-\infty}^{\infty-\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f(x, y) dx dy}{\sqrt{D[X]D[Y]}}.$$

Задача 11.7. Случайная точка (X, Y) на плоскости распределена по следующему закону

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Найти числовые характеристики (X, Y) .

Задача 11.8. Двумерная случайная величина (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x, y) = Axy$ в области D и $f(x, y) = 0$ вне этой области. Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Найти:

- а) величину A ;
- б) $M[X]$ и $M[Y]$;
- в) $D[X]$ и $D[Y]$;
- г) $\rho(X, Y)$.

Задачи повышенной сложности.

Задача 11.9. Плотность вероятности для каждой из компонент скорости молекул есть нормальная функция со средним, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2 . Компоненты скорости по трем направлениям независимы друг от друга. Найти плотность вероятности модуля скорости молекул. Определить среднюю величину квадрата и среднее квадратическое отклонение модуля скорости.

Задача 11.10. Плотность вероятности для каждой из компонент скорости звезд есть нормальная функция со средним, равным нулю, и дисперсиями, соответственно равными σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 . Компоненты скорости по трем направлениям независимы друг от друга. Найти плотность вероятности вектора скорости звезды.

Дополнительные вопросы к Лекции 10.

1. Каким образом, зная закон распределения такой двумерной дискретной случайной величины, найти законы распределения каждой из составляющих X и Y ? В случае n -мерной дискретной случайной величины?
2. Приведите геометрическую интерпретацию интегральной функции распределения для случаев $n = 2$ и $n = 3$.
3. Докажите свойства интегральной функции распределения двумерной случайной величины.

4. Докажите формулу для нахождения вероятности попадания случайной точки в полуполосу.
5. Докажите формулу для нахождения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник.
6. Докажите свойства дифференциальной функции распределения.
7. Докажите формулу для нахождения вероятности попадания случайной точки в произвольную область D .
8. Докажите свойства условных дифференциальных функций распределения.
9. Как определяются ковариация и центр рассеивания двумерной случайной величины. Какой вероятностный смысл имеют.

Лекция 11

Числовые характеристики и законы распределения функций случайных величин

1. Пусть дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

и пусть $y = \varphi(x)$ – монотонная функция от действительного аргумента x . Тогда дискретная случайная величина $Y = \varphi(X)$, которая является функцией от X , имеет ряд распределения

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\dots$	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Если $y = \varphi(x)$ – немонотонная функция, то среди её значений $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots$ могут быть равные. В этом случае столбцы с равными значениями $\varphi(x_i)$ объединяют в один столбец, а соответствующие вероятности складывают.

Числовые характеристики

$$M[Y] = \sum_{i=1}^n p_i \varphi(x_i), \quad D[Y] = \sum_{i=1}^n p_i [\varphi(x_i) - M[Y]]^2.$$

Задача 12.1. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	1	3	5
P	0,4	0,1	0,6

Построить ряд распределения случайной величины $Y = 3X$.

Задача 12.2. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

Построить ряд распределения случайной величины $Y = \sin X$.

Задача 12.3. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения случайной величины $Y = X^2 + 1$, $Z = |X|$.

2. Пусть теперь X – непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_X(x)$ и плотностью вероятности $f_X(x)$ и пусть $y = \varphi(x)$ монотонно возрастающая, непрерывная и дифференцируемая однозначная функция, $x = \psi(y)$ – обратная ей функция. Найдем функцию распределения

$F_Y(x)$ и плотность вероятности $f_Y(x)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$, которая является функцией от X .

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X < \psi(y)) = F_X(\psi(y)).$$

Дифференцируя последнее равенство по y , имеем $F'_Y(y) = F'_X(\psi(y)) \frac{d\psi}{dy}$.

Откуда

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))[\psi(y)]'.$$

Если $y = \varphi(x)$ – монотонно убывающая, то

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\psi(y)),$$

$$f_Y(y) = -f_X(\psi(y))[\psi(y)]'.$$

Числовые характеристики:

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M[Y]]^2 f(x) dx.$$

Задача 12.4. Непрерывная случайная величина X имеет плотность $f_X(x)$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = 3X$.

Задача 12.5. Задана дифференциальная функция $f_X(x)$ случайной величины X , возможные значения которой заключены в интервале (a, b) . Найти дифференциальную функцию $f_Y(x)$ случайной величины Y , если

- а) $Y = -3X$;
- б) $Y = AX + B$.

Задача 12.6. Задана дифференциальная функция $f_X(x)$ случайной величины X , возможные значения которой заключены в интервале $(0, \infty)$. Найти дифференциальную функцию $f_Y(x)$ случайной величины Y , если

- а) $Y = e^{-X}$;
- б) $Y = \ln X$;
- в) $Y = X^3$;
- г) $Y = 1/X^2$;
- д) $Y = \sqrt{X}$.

Задача 12.7. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

Задача 12.8. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $[-1, 2]$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = X^2$.

3. Аналогично вводится понятие функции для многомерной случайной величины $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ с плотностью распределения $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим частный случай – функция 2-х случайных аргументов.

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z , то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y и записывают:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Если X и Y – дискретные независимые случайные величины, то для того чтобы найти распределения функции $Z = X + Y$, надо найти все возможные значения Z , для чего достаточно сложить каждое возможное значение X со всеми возможными значениями Y ; вероятности найденных значений Z равны произведениям вероятностей складываемых значений X и Y .

Если X и Y – непрерывные независимые случайные величины, то дифференциальная функция $f_z(z)$ суммы $Z = X + Y$ (при условии, что дифференциальная функция хотя бы одного из аргументов задана на интервале $(-\infty, \infty)$ одной формулой) может быть найдена по формуле

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx \text{ или } f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy;$$

где f_1 и f_2 – дифференциальные функции аргументов; если возможные значения аргументов неотрицательны, то дифференциальную функцию $f_z(z)$ величины $Z = X + Y$ находят по формуле

$$f_z(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)dx \text{ или } f_z(z) = \int_0^z f_1(z-y)f_2(y)dy.$$

Дифференциальную функцию суммы независимых случайных величин принято называть *композицией* (см. Лекцию 11).

Закон распределения вероятностей называют *устойчивым*, если композиция таких законов есть тот же закон (может, вообще говоря, отличаться параметром).

Задача 12.9. Дискретные случайные величины X и Y заданы распределениями

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

Найти распределение случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 12.10. Независимые случайные величины X и Y заданы дифференциальными функциями:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \quad (0 \leq x < \infty), \quad f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти композицию этих законов, т.е. дифференциальную функцию случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 12.11. Доказать, что нормальный закон обладает устойчивостью. Найти математическое ожидание и дисперсию композиции двух нормальных законов.

Лекция 12

Характеристическая функция случайной величины.

Теорема Линдеберга-Леви

1. Определение характеристической функции.

Комплексной случайной величиной называют случайную величину вида $X = X_1 + iX_2$, где X_1, X_2 – действительные случайные величины, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Случайная величина X_1 называется действительной частью, а X_2 – мнимой частью комплексной случайной величины X .

При решении задач теории вероятностей среди всех комплексных случайных величин широкое применение нашла случайная величина $Y = \exp\{itX\}$, где X – действительная случайная величина, закон распределения которой известен, t – параметр, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Характеристической функцией случайной величины X называется математическое ожидание комплексной случайной величины Y :

$$\theta_X(t) = M[Y] = M[\exp\{itX\}].$$

Если X – дискретная случайная величина, то

$$\theta_X(t) = \sum_{k=1}^n p_k \exp\{itx_k\}.$$

Если X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то

$$\theta_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{itx\} dx.$$

В случае непрерывной случайной величины характеристическая функция является преобразованием Фурье плотности распределения и однозначно определяется этой плотностью. Следовательно, плотность распределения $f(x)$ также однозначно выражается через характеристическую функцию $\theta_X(t)$ обратным преобразованием Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_X(t) \exp\{-itx\} dt.$$

Частный случай: если X – постоянная величина, $X = a$, то $\theta_a(t) = \exp\{ita\}$.

Свойства:

1. $\theta_X(0) = 1$,
2. $Z = aX + b$, $\theta_Z(t) = \exp\{itb\} \theta_X(at)$,
3. Производная характеристической функции

$$\theta_X^{(k)}(t) = i^k M[X^k \exp\{itX\}].$$

4. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин

$$Z = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \theta_Z(t) = \prod_{k=1}^n \theta_{X_k}(t).$$

5. Из свойств 1) и 3) для независимых случайных величин получаем

$$Z = \sum_{k=1}^n a_k X_k + b, \quad \theta_Z(t) = \exp\{itb\} \prod_{k=1}^n \theta_{X_k}(a_k t).$$

Доказать свойства характеристической функции.

Задача 12.1. Величина X принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Найти характеристическую функцию.

Задача 12.2. Найти характеристическую функцию

- а) нормально распределенной случайной величины;
- б) распределения Пуассона;
- в) биномиального распределения;
- г) детерминированной величины $X = a$.

Аналогично характеристическая функция вводится для системы случайных величин.

$$\theta_{X,Y}(t_1, t_2) = M[\exp\{it_1 X_1 + it_2 X_2\}].$$

В частности, если X и Y непрерывные случайные величины, образующую систему (X, Y) , то

$$\theta_{X,Y}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{it_1 x + it_2 y\} dx dy.$$

Условие независимости величин X и Y на языке характеристических функций имеет вид

$$\theta_{X,Y}(t_1, t_2) = \theta_X(t_1) \theta_Y(t_2).$$

2. Характеристическая функция и числовые характеристики случайных величин.

С помощью характеристической функции удобно вычислять моменты случайных величин. Из свойства 2, полагая $t = 0$, получаем

$$\theta_X^{(k)}(0) = i^k M[X^k] = i^k \nu_k[X].$$

Следовательно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины X выражаются через ее характеристическую функцию следующим образом:

$$M[X] = -i \theta'_X(0), \quad D[X] = -\theta''_X(0) + [\theta'_X(0)]^2$$

Все моменты можно найти, если разложить функцию $\theta_X(t)$ в ряд Тейлора:

$$\theta_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \nu_k[X].$$

Задача 12.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин задачи 12.1, зная их характеристические функции.

Задача 12.4. У какого распределения все моменты четного порядка равны единице, а моменты нечетного порядка равны нулю?

С помощью характеристических функций удобно исследовать распределение суммы двух случайных величин. Исходя из определения характеристической функции для системы случайных величин, получаем

$$\theta_{X+Y}(t) = \theta_{XY}(t, t).$$

В случае независимых величин формула для характеристической функции суммы упрощается и принимает вид:

$$\theta_{X+Y}(t) = \theta_X(t) \theta_Y(t).$$

Из данной формулы непосредственно следует формула для композиции независимых случайных величин.

3. Теорема Линдеберга-Леви.

Рассмотрим случай суммы одинаково распределенных независимых случайных величин. Существенно, что при стремлении числа слагаемых к бесконечности (и при определенном выборе масштаба) такие суммы, как правило, стремятся к универсальному распределению – распределению Гаусса – независимо от распределения слагаемых (*теорема Линдеберга-Леви*).

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что каждое из слагаемых $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеет одно и то же распределение с характеристической функцией $\theta_1(t)$. Пусть

$$X = \varepsilon(n)(X_1 + X_2 + \dots + X_n),$$

где $\varepsilon(n)$ – масштабный коэффициент, который мы выберем из условия, что при $n \rightarrow \infty$ распределение X стремится к конечному пределу. Учитывая, что случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, находим характеристическую функцию величины X :

$$\theta_n(t) = (\theta_1(\varepsilon(n)t))^n.$$

Разложим $\theta_1(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$.

$$\theta_n(t) = [1 + i\varepsilon(n)M[X_1]t]^n.$$

Чтобы это выражение имело конечный предел при $n \rightarrow \infty$, положим $\varepsilon(n) = 1/n$, тогда

$$\theta_\infty(t) = \exp\{iM[X_1]t\}.$$

Сравнивая данный результат с задачей 12.2(d), видим, что величина X детерминирована и равна $M[X_1]$. Тем самым мы получили закон больших чисел – при стремлении числа независимых испытаний к бесконечности

среднее арифметическое становится детерминированным, но при более слабых предположениях. (см. Лекцию 9).

Исследуем теперь детальнее предельное распределение суммы бесконечного числа слагаемых. Для упрощения формул перейдем от X_i к нормированным величинам Y_i , каждая из которых имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию: $\theta'_1(0)=0$, $\theta''_1(0)=-1$. Выберем теперь $\varepsilon(n)$ таким образом, чтобы дисперсия величины $Y = \varepsilon(n)(Y_1 + \dots + Y_n)$ стремилась при $n \rightarrow \infty$ не к нулю, а к единице. Так как характеристическая функция суммы Y равна

$$\theta_n(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2} \varepsilon^2(n) \right]^n,$$

то нужно положить $\varepsilon(n) = 1/\sqrt{n}$, т.е.

$$Y = \frac{(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n)}{\sqrt{n}}.$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем предельную характеристическую функцию

$$\theta_\infty(t) = \exp(-t^2/2).$$

Предельное распределение $f_\infty(y)$ находим путем обращения преобразования Фурье

$$f_\infty(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2 - ity) dt,$$

откуда $f_\infty(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$

Мы получили нормированное распределение Гаусса, что и требовалось доказать.

Задачи повышенной сложности.

Задача 12.5. Найти распределение величины Y , если $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ независимы и все имеют распределение Коши

$$f_1(y) = \frac{1}{\pi(y^2 + 1)}.$$

Задача 12.6. Найти распределение среднего арифметического независимых величин, распределенных по Коши.

Литература

- [1] Г.И. Агапов Задачник по теории вероятностей 112 стр. М.: Высш. школа, 1994
- [2] Т.А.Агекян Теория вероятностей для астрономов и физиков 264 стр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974
- [3] Е.С. Вентцель Теория Вероятностей 567 стр. М.: Высш. школа, 1999
- [4] В.Е.Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика 479 стр. М.: Высш. школа, 2002
- [5] В.Е.Гмурман Руководство к решению по теории вероятностей и математической статистике 405 стр. М.: Высш. школа, 2002
- [6] Б.В.Гнеденко Курс теории вероятностей 448 стр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988
- [7] М.Кац Вероятность и смежные вопросы в физике 408 стр. М.: Мир, 1965
- [8] М.В.Козлов Элементы теории вероятностей в примерах и задачах 344 стр. М.: Изд-во МГУ, 1990
- [9] А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров Введение в теорию вероятностей 176 стр. М.: Физматлит, 1995
- [10] Ж.Неве Теория вероятностей и случайных процессов 312 стр. М.: Мир, 1969
- [11] А.В.Прохоров, В.Г.Ушаков, Н.Г.Ушаков Задачи по теории вероятностей 328 стр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986
- [12] Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций Под ред.А.А. Свешникова 632 стр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965
- [13] А.А. Свешников Прикладные методы теории случайных функций 464 стр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968
- [14] В.Н.Тутубалин Теория вероятностей и случайных процессов 400 стр. М.: Изд-во МГУ, 1992