

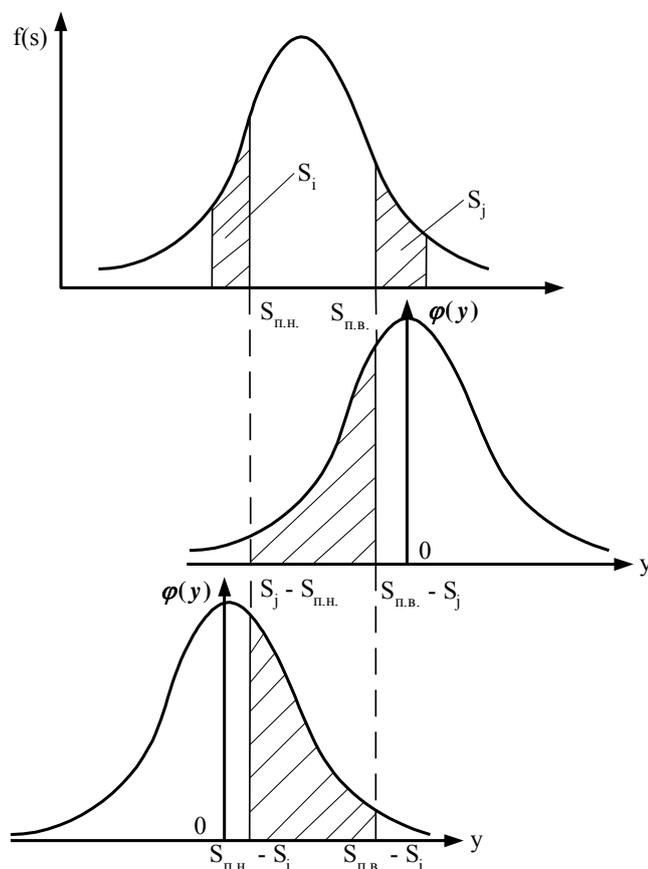
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

ЗУБРИЦКАС И.И.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И ДИАГНОСТИКА

(Лабораторные работы)



Великий Новгород
2011 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

ЗУБРИЦКАС И.И.

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И
ДИАГНОСТИКА**

(Лабораторные работы)

Великий Новгород
2011 г.

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук, доцент **Чадин А.Н.**,
кандидат технических наук, доцент **Гудилов С.В.**

Основы теории надежности и диагностика (лабораторные работы):
3-91 Учебное пособие / Зубрицкас И.И.; НовГУ им. Ярослава Мудрого. –
Великий Новгород, 2011 г. - 36 с.

Данное учебное пособие представляет собой курс лабораторных работ по дисциплине «Основы теории надежности и диагностика», в учебном пособии рассматриваются вопросы: статистической обработки экспериментальных данных, аппроксимации экспериментальных данных и определения толерантных границ статистических значений, выбора оптимальной функции аппроксимации экспериментальных данных, линейный закон изменения диагностических параметров..

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки инженеров по специальности 190601.65 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направления подготовки дипломированных специалистов «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования».

Учебное пособие одобрено советом инженерно-технологического факультета Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

УДК 621.865.8:658.512.011

© Государственное образовательное учреждение
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2011

© И.И. Зубрицкас, составление, 2011

Учебное издание

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ И ДИАГНОСТИКА

(Лабораторные работы)

Составитель

**Зубрицкас
Игорь Ионасович**

Редактор Л. Н. Яковлева

Лицензия ЛР № 020515 от 20.09.93.

Подписано в печать Формат 60x84 1/16. Бумага типографская.

Уч. - изд. л. Тираж 200 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический центр

Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

173003, Новгород, ул. Б. Санкт -Петербургская, д. 41.

Отпечатано в ИПЦ НовГУ.

173003, Новгород, ул. Б. Санкт - Петербургская, д. 41.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. «Статистическая обработка экспериментальных данных».....	5
1.1 Теоретическая часть.....	5
1.2 Построение графиков.....	10
1.3 Оценка различий эмпирического и теоретического распределений	13
Вывод.....	14
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «Аппроксимация экспериментальных данных и определение толерантных границ статистических значений».....	15
2.1 Теоретическая часть.....	15
2.2 Расчётная часть.....	16
Вывод.....	21
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 «Выбор оптимальной функции аппроксимации экспериментальных данных».....	22
Введение.....	22
3.1 Аппроксимация экспериментальных данных линейной функциональной зависимостью.....	23
3.2 Аппроксимация экспериментальных данных степенной функциональной зависимостью.....	27
3.4 Аппроксимация экспериментальных данных параболической функциональной зависимостью.....	28
Вывод.....	31
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 «Линейный закон изменения диагностических параметров».....	32
4.1 Теоретическая часть.....	32
4.2 Расчетная часть.....	34
Вывод.....	35
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	36

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие представляет собой курс лабораторных работ по дисциплине «Основы теории надежности и диагностика», в учебном пособии рассматриваются вопросы: статистической обработки экспериментальных данных, аппроксимации экспериментальных данных и определения толерантных границ статистических значений, выбора оптимальной функции аппроксимации экспериментальных данных, линейный закон изменения диагностических параметров.

Учебное пособие отвечает новым образовательным стандартам и предназначено для подготовки инженеров по специальности 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство», направления подготовки дипломированных специалистов 190600 «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования».

Учебное пособие одобрено советом инженерно-технологического факультета Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. «Статистическая обработка экспериментальных данных»

Цель работы: Ознакомление студентов со статистическими методами обработки экспериментальных данных.

1.1 Теоретическая часть

Основными задачами статистической обработки данных, полученных в результате наблюдений массовых случайных явлений, являются следующие задачи: определения объема выработки и числа наблюдений; расчет параметров распределения; выбор закона распределения; оценка критериев согласования между теоретической и экспериментальной кривыми выбранного закона распределения. В работе использованы два закона распределения: нормальный и экспоненциальный. Проверка законов на согласованность теоретического и статистического распределений проведена по критерию Пирсона. На основании законов возможно реальное решение задач посредством оценок параметров распределения.

Статистический ряд (тяговое усилие на колесах автомобиля ГАЗ-3102) представлен в табл.1.1.

Проверка чисел на выброс.

Для этого определим следующие характеристики случайных величин. Среднее арифметическое значение находим по формуле (1.1)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1.1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_N – определенные значения случайных величин;

N – число проведенных опытов

Таблица 1.1.

№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс
1	115	7	115	13	115	19	110	25	125
2	110	8	120	14	105	20	115	26	115
3	115	9	115	15	125	21	100	27	110
4	120	10	95	16	120	22	115	28	120
5	105	11	115	17	110	23	125	29	115
6	135	12	130	18	115	24	115	30	105

Математическое ожидание определяется по формуле:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i * P_i \quad (1.2)$$

При большом числе опытов среднее арифметическое значение случайной величины приближается к ее математическому ожиданию.

Размах рассеивания случайной величины:

$$R = x_{\text{MAX}} - x_{\text{MIN}} \quad (1.3)$$

Число классов, на которые делят размах выборки R определяется выражением:

$$r = 1 + 3,3 \lg N \quad (1.4)$$

Значение классового промежутка вычисляют по формуле:

$$k = \frac{x_{\text{MAX}} - x_{\text{MIN}}}{r} \quad (1.5)$$

Дисперсия определяется выражением:

$$D = \frac{1}{N-1} * \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.6)$$

Среднее квадратичное отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{N-1} * \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.7)$$

Коэффициент вариации:

$$v_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (1.8)$$

Проверим вышеуказанные числа на принадлежность одной и той же совокупности. По правилу трех сигм: величины выходящие за пределы $[\bar{x}-3\sigma; \bar{x}+3\sigma]$ можно считать случайными.

$$x_{\text{MAX}}=135; x_{\text{MIN}}=95; \bar{x}=115; \sigma=8,41$$

$$\bar{x}+3\sigma=140,23; \bar{x}-3\sigma=89,77$$

Можно сделать вывод, что случайных величин нет.

Обработка данных на основе нормального закона распределения.

Характеристики нормального распределения сведены в табл.1.2.

Таблица 1.2.

P_{MIN}	P_{MAX}	\bar{P}	σ	D	R	k
95	135	115	8,41	70,69	40	6,67

Теоретические частоты при нормальном законе распределения случайной величины определяют по формуле:

$$f' = \frac{N \cdot k}{\sigma} f(x) \quad (1.9)$$

где $f(x)$ – нормальный закон распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.10)$$

Нормированные отклонения середин классов:

$$x = \frac{W_i - \bar{x}}{\sigma} \quad (1.11)$$

Выравнивание по нормальному закону статистического ряда приведено в табл. 1.3. и на рис.1.1.

Таблица 1.3.

середина класса W	эмпирическая частота f	$W-\bar{x}$	$\frac{W-\bar{x}}{\sigma}$	f(x)	$\frac{Nk}{\sigma}f(x)$	f'
98,34	2	-16,66	1,98	0,055	1,3	1
105,01	3	-9,99	1,19	0,092	2,2	2
111,68	16	-3,32	0,39	0,656	15,6	16
118,35	4	3,35	0,40	0,198	4,7	5
125,02	3	10,02	1,19	0,118	2,8	3
131,69	2	16,69	1,98	0,059	1,4	1

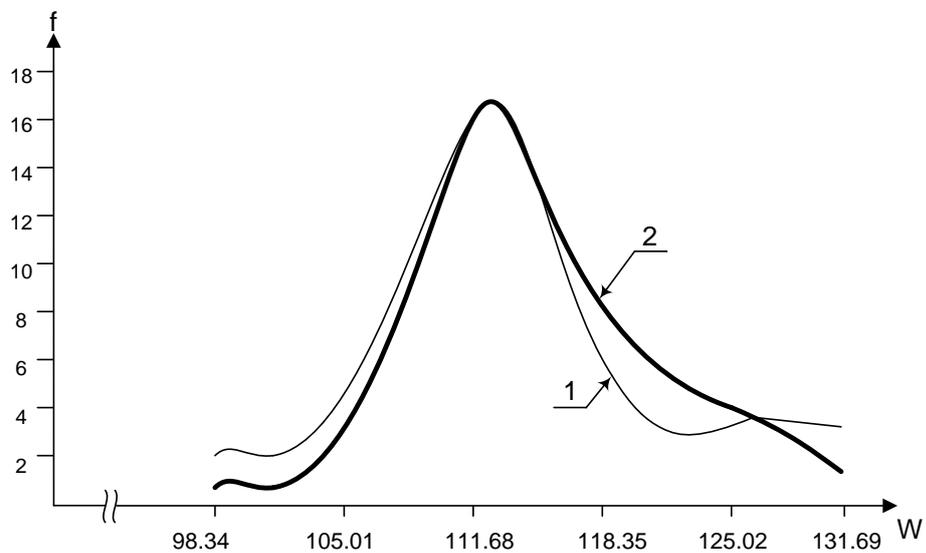


Рисунок 1.1 Кривые нормального распределения.

1-экспериментальная;

2-теоретическая.

Обработка данных на основе экспоненциального закона распределения.

Теоретические частоты для экспоненциального закона распределения определяется по формуле:

$$f' = \frac{N \cdot k}{\bar{x}} \cdot \exp(-x) \quad (1.12)$$

где $\exp(-x)$ – экспоненциальная функция.

Условные отклонения середин классов:

$$x = \frac{W}{\bar{x}} \quad (1.13)$$

Выравнивание по экспоненциальному закону статистического ряда с параметрами: $\bar{x}=115; N=30; k=6,67$ представлено в табл. 1.4.

Таблица 1.4.

середина класса W	эмпирическая частота f	$x = \frac{W}{\bar{x}}$	$\exp(-x)$	$\frac{Nk}{\bar{x}} \cdot \exp(-x)$	f'
98,34	2	0,86	0,423	0,736	1
105,01	3	0,91	0,403	0,700	1
111,68	16	0,97	0,379	0,660	1
118,35	4	1,03	0,357	0,621	1
125,02	3	1,09	0,336	0,585	1
131,69	2	1,15	0,317	0,551	1

А также выравнивание по экспоненциальному закону представлено на рис. 1.2.

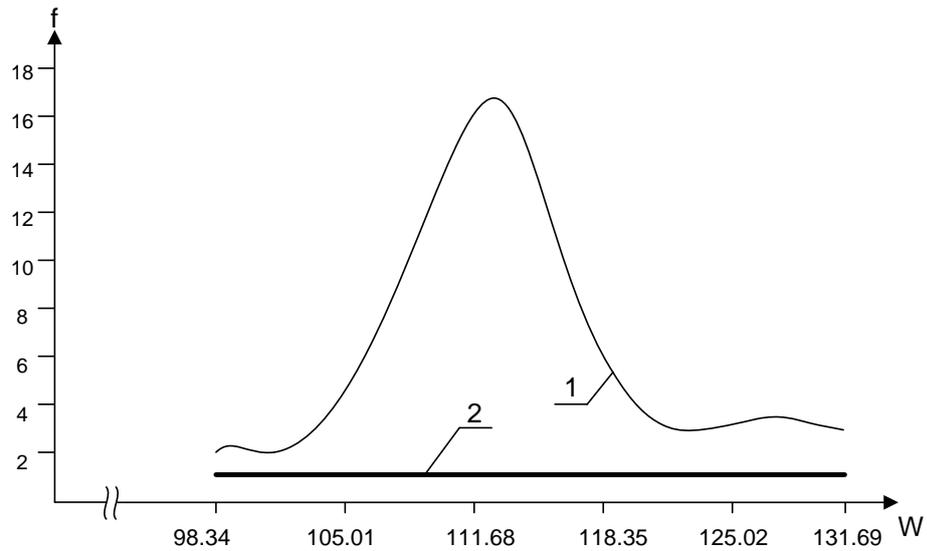


Рисунок 1.2 Кривые экспоненциального закона.

1-экспериментальная;

2-теоретическая.

1.2 Построение графиков

Нормальный закон распределения имеет вид выражение (1.10)

Плотность вероятности распределения находим по формуле:

$$f_i = \int_{iX_{\min}}^{iX_{\min} + ik} f(x) dx \quad (1.14)$$

Вероятность распределения находим из выражения:

$$F_i = \int_{iX_{\min}}^{iX_{\min} + ik} f(x) dx \quad (1.15)$$

Данные для построения гистограммы сведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

классы	95-101,7	101,7-108,3	108,3-115	115-121,7	121,7-128,4	128,4-135
f	2	3	16	4	3	2
$P_i=f_i/N$	0,07	0,10	0,53	0,13	0,10	0,07
$H=P_i/k$	0,01	0,02	0,08	0,02	0,02	0,01

Значения функций f и F сведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

W	98,34	105,01	111,68	118,35	125,02	131,69
f	0,04	0,15	0,28	0,28	0,15	0,04
F	0,04	0,20	0,49	0,78	0,94	0,98

Графики функций изображены на рис. 1.3

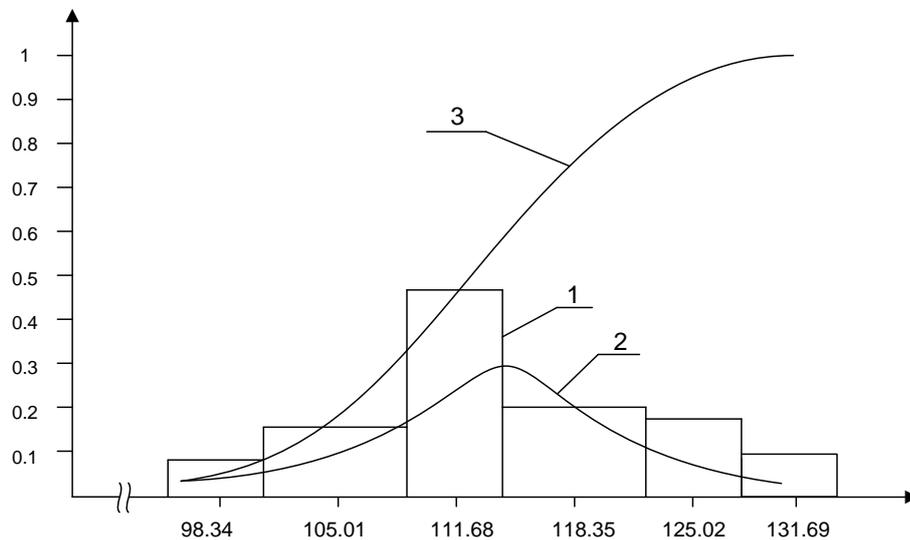


Рисунок 1.3 Нормальный закон распределения.

1 – гистограмма;

2 - плотность вероятности распределения;

3 - вероятность распределения.

Экспоненциальный закон распределения имеет вид:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (1.16)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{x}; \quad \lambda = 0,12 \quad (1.17)$$

Вероятность для экспоненциального закона определяется по формуле:

$$P = e^{-\lambda x} \quad (1.18)$$

Значение функций приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

W	98,34	105,01	111,68	118,35	125,02	131,69
f(x)	8,998*10 ⁻⁷	4,042*10 ⁻⁷	1,815*10 ⁻⁷	8,153*10 ⁻⁸	3,662*10 ⁻⁸	1,645*10 ⁻⁸
P	7,499*10 ⁻⁶	3,368*10 ⁻⁶	1,513*10 ⁻⁶	6,794*10 ⁻⁷	3,052*10 ⁻⁷	1,371*10 ⁻⁷

Графики функций изображены на рис. 1.4.

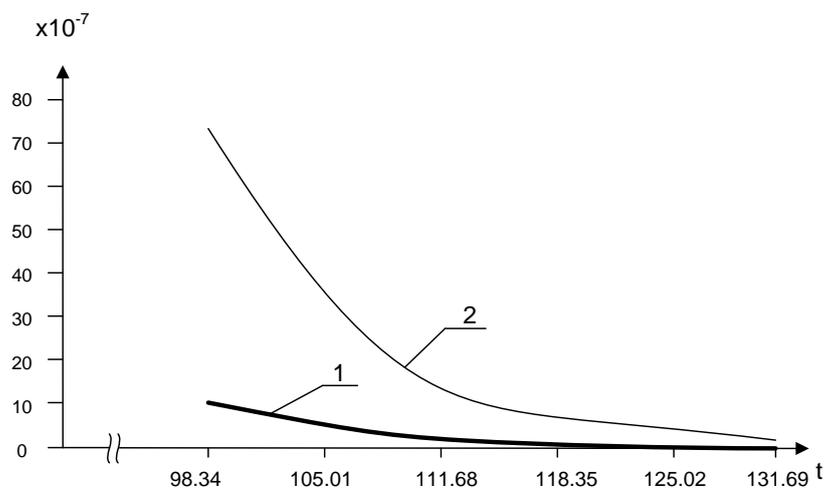


Рисунок 1.4. Экспоненциальный закон распределения

1.3 Оценка различий эмпирического и теоретического распределений

Для проверки согласованности теоретического и статистического распределений используем критерий Пирсона. Величина критерия X^2 рассчитывается по формуле:

$$x = \sum \frac{(f - f')^2}{f'} \leq x^2 \quad (1.19)$$

где X^2 – стандартные значения критерия

f, f' – эмпирические и теоретические частоты классов соответственно.

Значение X^2 находят по специальным таблицам в зависимости от числа степеней свободы.

Оценка различий распределения для нормального закона распределения.

W	f	f'	f - f'	(f - f') ²	$\frac{(f - f')^2}{f'}$
98,34	2	1,3	0,7	0,49	0,38
105,01	3	2,2	0,8	0,64	0,29
111,68	16	15,6	0,4	0,16	0,01
118,35	4	4,7	-0,7	0,49	0,10
125,02	3	2,8	0,2	0,04	0,01
131,69	2	1,4	0,6	0,36	0,26
всего	30	28	-	-	1,05

Число степеней свободы определяется: $v = r - 3, v = 6 - 3$

при $v = 3$ и $X^2 = 1,05$, определяем по таблице $P = 0,7$

Оценка различий распределений для экспоненциального закона

W	f	f'	f – f'	(f – f') ²	$\frac{(f - f')^2}{f'}$
98,34	2	0,736	1,264	1,598	2,171
105,01	3	0,700	2,300	5,290	7,557
111,68	16	0,660	15,340	235,316	356,539
118,35	4	0,621	3,379	11,418	18,386
125,02	3	0,585	2,415	5,832	9,969
131,69	2	0,551	1,449	2,099	3,816
всего	30	3,853	-	-	398,438

Вывод

1. Согласно правилу трех сигм выяснили, что все числа принадлежат одной и той же совокупности;
2. По критерию Пирсона вероятность того, что величина x распределения по нормальному закону равна 0,7. Эта вероятность не является малой и ее можно считать правдоподобной;
3. По критерию Пирсона вероятность того, что величина x распределения по экспоненциальному закону менее 0,001. Такую вероятность можно считать неправдоподобной;
4. Из пунктов 2 и 3 вывода следует, что распределение величины x в большей мере подчиняется нормальному закону.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 «Аппроксимация экспериментальных данных и определение толерантных границ статистических значений»

Цель работы: Ознакомление студентов с методом аппроксимации экспериментальных данных и определение толерантных границ статистических значений.

2.1 Теоретическая часть

Для статистической обработки экспериментальных данных используется нормальный закон распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i - \bar{x}}{2\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

Величина \bar{x} (среднее арифметическое) показывает смещение кривой $f(x)$ вдоль оси абсцисс без изменения её формы, т.е. расстояние от начала координат до абсциссы с максимальной ординатой.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.2)$$

Величина σ (среднее квадратичное отклонение) показывает разброс отдельных значений случайной величины x относительно среднего арифметического \bar{x} .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.3)$$

Дисперсия:

$$D = \sigma^2 \quad (2.4)$$

Размах рассеивания случайной величины определяется по формуле:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (2.5)$$

Значение классового промежутка:

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} \quad (2.6)$$

где r - число классов ($r = 6$)

Экспериментальное значение вероятности определяется формулой:

$$P^* = \frac{m}{n} \quad (2.7)$$

где m - число значений параметра P

Для определения толерантных границ, воспользуемся формулой:

$$y = kx + b \quad (2.8)$$

где k - угловой коэффициент прямой;

b - начальная координата.

2.2 Расчётная часть.

Исходные данные для расчетов (сила тяги на ведущих колесах автомобиль ГАЗ-3102) представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс	№	Р, кгс
1	115	7	115	13	115	19	110	25	125
2	110	8	120	14	105	20	115	26	115
3	115	9	115	15	125	21	100	27	110
4	120	10	95	16	120	22	115	28	120
5	105	11	115	17	110	23	125	29	115
6	135	12	130	18	115	24	115	30	105

Характеристики нормального распределения сведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2.

P_{\min}	P_{\max}	\bar{P}	σ	D	R	k
95	135	115	8,41	70,69	40	6,67

Плотность распределения параметра P сведём в табл. 2.3.

Таблица 2.3.

W	98,34	105,01	111,68	118,35	125,02	131,69
m	2	3	16	4	3	2
P_i^*	0,07	0,10	0,53	0,13	0,10	0,07
$f(x)$	0,04	0,15	0,28	0,28	0,15	0,04

График плотности распределения параметра P и гистограмма изображены на рисунке 2.1.

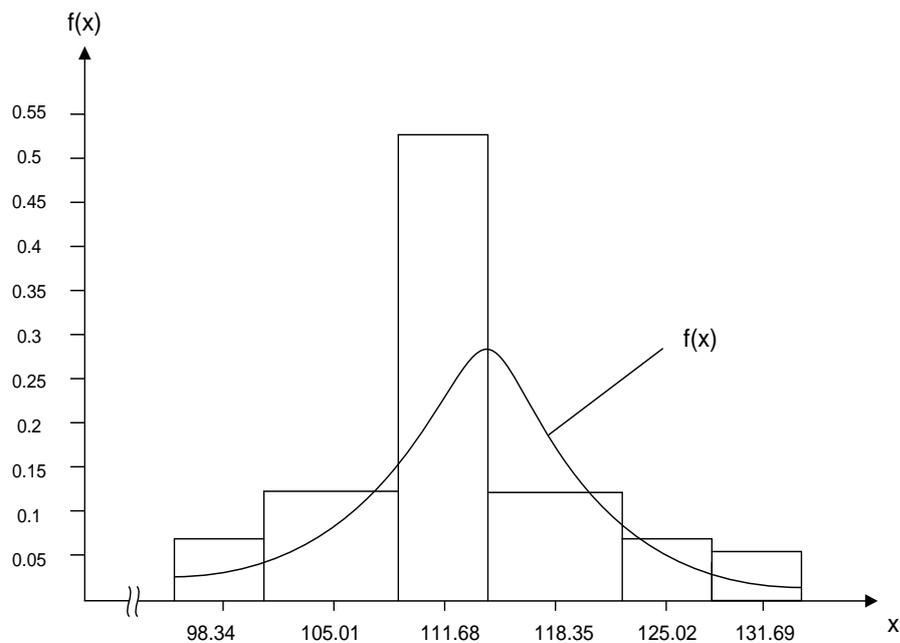


Рисунок 2.1 График плотности распределения $f(x)$ величины P и гистограмма.

Определим значения параметра P при вероятностях 10% и 90%

$$\Phi(z_1) = 0.1$$

$$\Phi(z_2) = 0.9$$

$$z_1 = -1.28$$

$$z_2 = 1.28$$

$$P_1 = 8.41 \cdot (-1.28) + 115 = 104.24$$

$$P_2 = 8.41 \cdot 1.28 + 115 = 125.76$$

Данные распределения параметра P через 75 тыс. км. пробега.

Таблица 2.4.

№	P, кгс	№	P, кгс	№	P, кгс	№	P, кгс	№	P, кгс
1	107,5	7	107,5	13	107,5	19	102,5	25	117,5
2	102,5	8	112,5	14	97,5	20	107,5	26	107,5
3	107,5	9	107,5	15	117,5	21	92,5	27	102,5
4	112,5	10	87,5	16	112,5	22	107,5	28	112,5
5	97,5	11	107,5	17	102,5	23	117,5	29	107,5
6	127,5	12	122,5	18	107,5	24	107,5	30	97,5

Характеристики распределения в табл. 2.5.

Таблица 2.5

P_{\min}	P_{\max}	\bar{P}	σ	D	R	k
87,5	127,5	107,5	8,41	70,69	40	6,67

Плотность распределения параметра P сведём в табл.2.6.

Таблица 2.6.

W	90,9	97,6	104,3	111	117,7	124,4
m	2	3	16	4	3	2
P_i^*	0.07	0.10	0.53	0.13	0.10	0.07
$f(x)$	0,04	0,15	0,28	0,28	0,15	0,04

График плотности распределения параметра P и гистограмма

изображены на рис. 2.2.

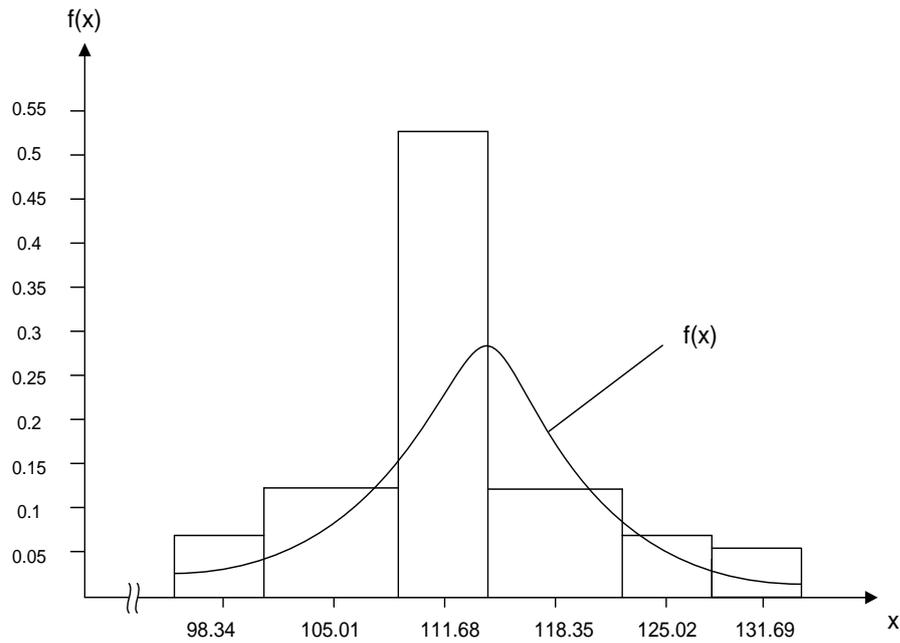


Рисунок 2.2 График плотности распределения параметра P и гистограмма

Определим значения параметра P, соответствующие вероятностям 10% и 90%.

$$\Phi(z_3) = 0.1$$

$$\Phi(z_4) = 0.9$$

$$z_3 = -1.28$$

$$z_4 = 1.28$$

$$P_1 = 8.41 \cdot (-1.28) + 107.5 = 96.7$$

$$P_2 = 8.41 \cdot 1.28 + 107.5 = 118.3$$

Приступим к определению толерантных границ. Сначала определим значения угловых коэффициентов k_i и начальных координат b_i для построения прямых.

Уравнение прямой $y = kl + b$.

Определим значения k_i и b_i для $\Phi(z) = 10\%$

$$l_1 = 0, \quad y_1 = b_1 = P_1 = 104.24$$

$$l_2 = \Delta l, \quad y_2 = k_1 \cdot 75 \cdot 10^6 + 104.24$$

$$y_2 = P_3 = 96.70; \quad k_1 = \frac{96.7 - 104.24}{75 \cdot 10^6} = -10^{-7} \left(\frac{\text{кгс}}{\text{м}} \right)$$

Полученные значения k_i и b_i для математического ожидания и для $\Phi(z)$ сведём в табл.2.7.

Таблица 2.7.

	1 точка		2 точка		k кгс/м
	$l_1, \text{ м}$	$P_1, \text{ кгс}$	$l_2, \text{ м}$	$P_2, \text{ кгс}$	
$\Phi(z) = 10\%$	0	104,24	$75 \cdot 10^6$	96,70	-10^{-7}
\bar{P}	0	115	$75 \cdot 10^6$	107,5	-10^{-7}
$\Phi(z) = 90\%$	0	125,76	$75 \cdot 10^6$	118,3	-10^{-7}

Толерантные границы данных статистических значений показаны на рис.3.

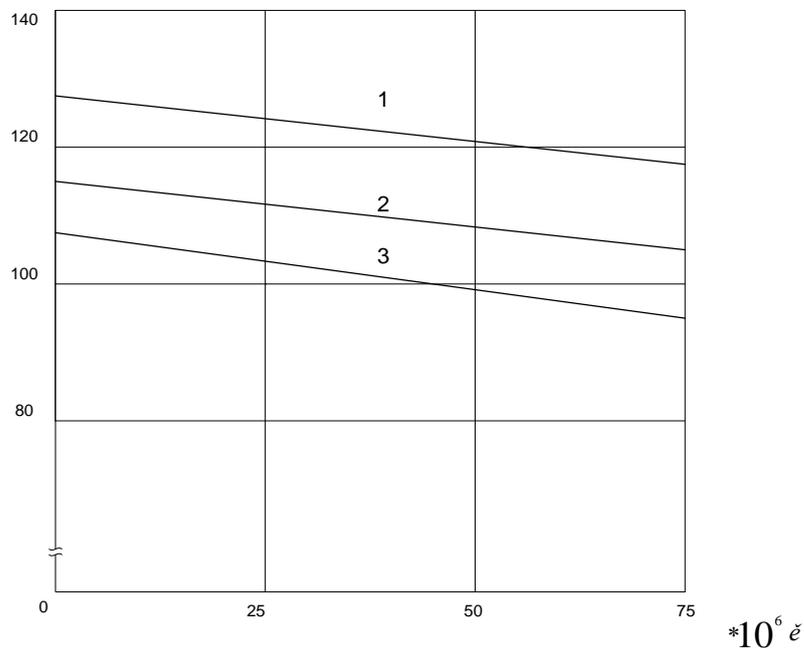


Рисунок 2.3 Толерантные границы статистических значений:

1- для вероятности 10%;

2 - для математического ожидания;

3 - для вероятности 90%.

Вывод

1. Согласно правилу трёх сигм, числа первой и второй выборки принадлежат одной и той же совокупности;
2. В результате статистической обработки и определения толерантных границ мы обнаружили следующие изменения толерантных границ. Принималась линейная зависимость изменения параметра P от пройденного пути l . Таким образом, при вероятности 10% параметр $P_1=104,24$ при нулевом пробеге изменилась после пробега 75тыс. км. до $P_2=96,70$. Аналогично математическое ожидание изменилось с $\bar{P}_1=115$ до $\bar{P}_2=107,5$. При вероятности 90% параметр $P_1=125,76$ изменился до $P_2=118,3$. Заметим, что изменения параметра P во всех случаях произошло приблизительно на 7,5 единиц, следовательно угловой коэффициент для всех прямых должен быть одинаковым: $k = -10^{-7}$ кгс/м.;
3. Определение изменения толерантных границ даёт возможность прогнозировать неисправность автомобиля, что позволяет нам определить периодичность ТО.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 «Выбор оптимальной функции аппроксимации экспериментальных данных»

Цель работы: Ознакомление студентов с методом аппроксимации экспериментальных данных однофакторного эксперимента линейной, степенной, показательной, и параболической функциональными зависимостями и проведение проверки адекватности модели по критерию Фишера.

Введение

Большинство исследований, проводимых в технике, сводятся к нахождению функциональных и корреляционных связей между несколькими величинами или решению экстремальных задач. Классический метод постановки эксперимента предусматривает фиксирование на определенных уровнях всех переменных факторов, кроме одного, который принимает дискретные значения в некоторой области своего существования. Такой метод называется методом проведения однофакторных экспериментов. При данном методе, варьируя один фактор и стабилизируя остальные, находят зависимость исследуемой величины только от одного фактора.

В данной работе осуществляется аппроксимация экспериментальных данных однофакторного эксперимента линейной, степенной, показательной, и параболической функциональными зависимостями и производится проверка адекватности модели по критерию Фишера.

Экспериментальные данные приведены в табл. 3.1

Таблица 3.1.

$x \cdot 10^3, \text{км}$	$P, \text{кгс}$								
0	115	30	115	60	115	90	110	120	125
5	110	35	120	65	105	95	115	125	115
10	115	40	115	70	125	100	100	130	110
15	120	45	95	75	120	105	115	135	120

20	105	50	115	80	110	110	125	140	115
25	135	55	130	85	115	115	115	145	105

Задан набор чисел при однофакторном методе исследования, т.е.
 $y = f(t)$

3.1 Аппроксимация экспериментальных данных линейной функциональной зависимостью.

Для данного закона $y = f(t)$ принимаем линейную зависимость вида:

$$y = a + bx$$

Определим коэффициенты a и b . Для этого составим систему из тридцати линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + bx_1 - y_1 = \Delta_1 \\ a + bx_2 - y_2 = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ a + bx_{30} - y_{30} = \Delta_{30} \end{cases} \quad (3.1)$$

где Δ_i - отклонения.

Определим выражения для суммы квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{30} (\Delta_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 \quad (3.2)$$

или

$$S = (a + bx_1 - y_1)^2 + (a + bx_2 - y_2)^2 + \dots + (a + bx_{30} - y_{30})^2 \quad (3.3)$$

Нужно определить такие a и b , чтобы S стремилась к минимуму.
 Возьмем частные производные от S по a и b .

$$\frac{dS}{da} = 2(a + bx_1 - y_1) + \dots + 2(a + bx_{30} - y_{30}) \quad (3.4)$$

$$\frac{dS}{db} = 2(a + bx_1 - y_1)x_1 + \dots + 2(a + bx_{30} - y_{30})x_{30} \quad (3.5)$$

Если а и b такие, что $\frac{dS}{da} = 0$ и $\frac{dS}{db} = 0$, то сумма Δ_j будет стремиться к минимуму. Преобразуем данные выражения в систему уравнений.

Подставим численные значения:

$$\begin{cases} 30a + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{30} y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^{30} x_i y_i \end{cases} \quad (3.6)$$

Решаем по теореме Крамера

$$\Delta = 1685625$$

$$\Delta_a = 195151875$$

$$\Delta_b = -18000$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = 115.774$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = -0.011$$

Получим линейную зависимость

$$\hat{y} = 115.774 - 0.011x \quad (3.7)$$

Теоретическое значения у приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

$x \cdot 10^3$, км	\hat{y}								
0	115,774	30	115,444	60	115,114	90	114,784	120	114,454
5	115,719	35	115,389	65	115,059	95	114,729	125	114,399
10	115,664	40	115,334	70	115,004	100	114,674	130	114,344
15	115,609	45	115,279	75	114,949	105	114,619	135	114,289
20	115,554	50	115,224	80	114,894	110	114,564	140	114,234
25	115,499	55	115,169	85	114,839	115	114,509	145	114,174

На рис. 3.1 показаны экспериментальные данные и линейная зависимость $\hat{y} = 115.774 - 0.011x$

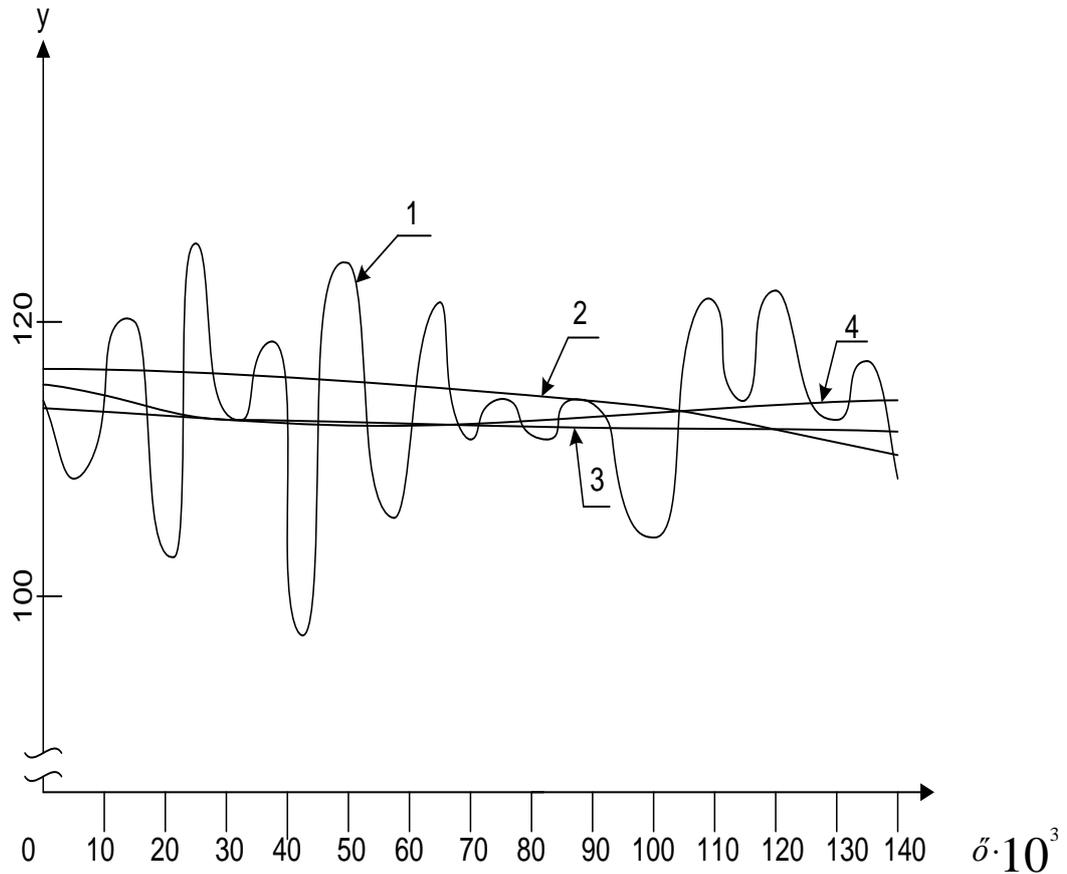


Рисунок 3.1 Графики функциональных зависимостей и экспериментальных данных

1 - экспериментальные данные

2 - $y = ax^b$

3 - $y = a + bx$

4 - $y = a + bx + cx^2$

Проверим адекватность модели по критерию Фишера.

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_{(y)}^2} \quad (3.8)$$

Определим дисперсию адекватности:

$$S_{a\hat{o}}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{f} \quad (3.9)$$

где $f = N - (k+1)$ - число степеней свободы,
 k - число факторов.

$$f = 30 - (1 + 1) = 28$$

т. к. параллельные опыты не проводились, то согласно:

$$S_{a\hat{o}}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{f} \quad (3.10)$$

Тогда:

$$S_{a\hat{o}}^2 = 77,116$$

Определим дисперсию параметра оптимизации:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_j^2}{n} \quad (3.11)$$

т.к. $n = 1$, то:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_j^2}{n} = S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}{N - 1} \quad (3.12)$$

где \bar{y} - среднее значение по y

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{30} y_i}{N} \quad (3.13)$$

$$\bar{y} = 115$$

$$S_j^2 = 70.689$$

Определим F -критерий

$$F_p = 1.091$$

Большая дисперсия имеет 29 степеней свободы, а меньшая 28, тогда.

$$F_T = 1.7$$

т.к. $F_p < F_T$, следовательно модель адекватна.

Линейная зависимость может быть использована для расчета экспериментальных данных.

3.2 Аппроксимация экспериментальных данных степенной функциональной зависимостью.

Принимаем степенную зависимость вида $y = ax^b$, прологарифмируем уравнение:

$$\lg y = \lg a + b \cdot \lg x \quad (3.14)$$

Видно, что задача сводится к предыдущему решению, т.е. система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} 30 \cdot \lg a + b \sum_{i=1}^{30} \lg x_i = \sum_{i=1}^{30} \lg y_i \\ \lg a \sum_{i=1}^{30} \lg x_i + b \sum_{i=1}^{30} (\lg x_i)^2 = \sum_{i=1}^{30} \lg x_i \lg y_i \end{cases}$$

Подставим численные значения:

$$\begin{cases} 30 \cdot \lg a + b138.217 = 61.787 \\ \lg a238.217 + b662.547 = 284.651 \end{cases}$$

Решаем по теореме Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 138.217 \\ 138.217 & 662.547 \end{vmatrix} = 772.471$$

$$\Delta \lg a = \begin{vmatrix} 61.787 & 138.217 \\ 284.651 & 662.547 \end{vmatrix} = 1593.184$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 30 & 61.787 \\ 138.217 & 284.651 \end{vmatrix} = -0.484$$

$$\lg a = \frac{\Delta \lg a}{\Delta} = \frac{1593.184}{772.471} = 2.062$$

$$a = 10^{2.062} = 115.345$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-0.484}{772.471} = -0.000627$$

Получаем степенную зависимость:

$$\hat{y} = 115.345 \cdot x^{-0.000627}$$

Степенная зависимость показана на рис. 3.1. Теоретические значения y приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3.

$x \cdot 10^3$, км	\hat{y}								
0	115,345	30	115,099	60	115,049	90	115,020	120	114,999
5	115,229	35	115,088	65	115,044	95	115,016	125	114,996
10	115,179	40	118,079	70	115,038	100	115,012	130	114,994
15	115,149	45	115,070	75	115,033	105	115,009	135	114,991
20	115,129	50	115,062	80	115,029	110	115,006	140	114,988
25	115,112	55	115,056	85	115,024	115	115,002	145	114,986

Проверим адекватность модели по критерию Фишера:

$$S_j = 70.689$$

$$S_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{f} = \frac{74.066}{28} = 2.645$$

Тогда по формуле (3.8) имеем:

$$F_p = \frac{2.645}{70.689} = 0.037$$

Согласно, $F_T = 1.7$. Следовательно $F_p < F_T$, модель адекватна, степенная функциональная зависимость может быть использована для расчета экспериментальных данных.

3.4 Аппроксимация экспериментальных данных параболической функциональной зависимостью.

Принимаем зависимость вида $y = a + bx + cx^2$. Определим коэффициенты: a , b , c . Берем частные производные по ним от суммы квадратов отклонений получаем систему вида:

$$\begin{cases} 30a + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^{30} y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^{30} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^{30} x_i^2 y_i \end{cases} \quad (3.15)$$

Подставляем численные значения:

$$\begin{cases} 30 \cdot a + b \cdot 2175 \cdot 10^3 + c \cdot 21875 \cdot 10^6 = 3450 \\ a \cdot 2175 \cdot 10^3 + b \cdot 213875 \cdot 10^6 + c \cdot 23653121 \cdot 10^9 = 249525 \cdot 10^3 \\ a \cdot 213875 \cdot 10^6 + b \cdot 23653121 \cdot 10^9 + c \cdot 2789965421 \cdot 10^{12} = 24489564 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Решаем данную систему с помощью теоремы Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & 2175 \cdot 10^3 & 21875 \cdot 10^6 \\ 2175 \cdot 10^3 & 213875 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 \\ 213875 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 & 2789965421 \cdot 10^{12} \end{vmatrix} = 1414340 \cdot 10^{26}$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3450 & 2175 \cdot 10^3 & 213875 \cdot 10^6 \\ 249525 \cdot 10^3 & 213875 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 \\ 24489564 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 & 2789965421 \cdot 10^{12} \end{vmatrix} = 164559873 \cdot 10^{26}$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 30 & 2175 \cdot 10^3 & 213875 \cdot 10^6 \\ 249525 \cdot 10^3 & 21875 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 \\ 24489564 \cdot 10^6 & 23653121 \cdot 10^9 & 2789965421 \cdot 10^{12} \end{vmatrix} = 2809973 \cdot 10^{21}$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 30 & 2175 \cdot 10^3 & 3450 \\ 2175 \cdot 10^3 & 213875 \cdot 10^6 & 249525 \cdot 10^3 \\ 213875 \cdot 10^6 & 2653121 \cdot 10^9 & 24489564 \cdot 10^6 \end{vmatrix} = 1712 \cdot 10^{18}$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{164559873 \cdot 10^{26}}{1414340 \cdot 10^{26}} = 116.351$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{2809973 \cdot 10^{21}}{1414340 \cdot 10^{26}} = 1.547 \cdot 10^{-5}$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{1712 \cdot 10^{18}}{1414340 \cdot 10^{26}} = 1.62 \cdot 10^{-11}$$

Получаем параболическую зависимость:

$$\hat{y} = 116.351 + 1.547 \cdot 10^{-5} \cdot x + 1.62 \cdot 10^{-11} \cdot x^2$$

Параболическая зависимость показана на рис. 3.1. Теоретические значения приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5.

$x \cdot 10^3$, км	\hat{y}								
0	116,351	30	114,869	60	113,612	90	112,612	120	111,923
5	116,121	35	114,678	65	113,451	95	112,531	125	111,814
10	115,857	40	114,356	70	113,241	100	112,401	130	111,701
15	115,562	45	114,142	75	113,101	105	112,299	135	111,576
20	115,214	50	113,954	80	112,895	110	112,102	140	111,389
25	115,035	55	113,789	85	112,751	115	112,006	145	111,214

Проверим адекватность модели по критерию Фишера:

$$S_j^2 = 70.689$$

$$S_{ad} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - m} = \frac{1660}{27} = 61.49$$

$m = 3$ - число членов уравнения регрессии

$$F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_j^2} = \frac{61.49}{70.689} = 0.87$$

Согласно, $F_T = 1,7$. Следовательно $F_p < F_T$, модель адекватна. Параболическая функциональная зависимость может быть использована для расчета экспериментальных данных.

Вывод.

Для расчета экспериментальных данных может быть использована любая из исследуемых в данной лабораторной работе функциональных зависимостей. Но аппроксимация экспериментальных данных по степенной функциональной зависимости для данных значений наиболее оптимальна, т.к. критерий Фишера F_r для данной функциональной зависимости является минимальным и график $y = ax^b$ максимально приближен к экспериментальным данным.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 «Линейный закон изменения диагностических параметров»

Цель работы: Подобрать коэффициенты a и b в линейной зависимости по методу наименьших квадратов

4.1 Теоретическая часть

Аппроксимация экспериментальных данных линейными зависимостями, см. рис. 4.1.

$$y = ax_1 + b \quad (4.1)$$

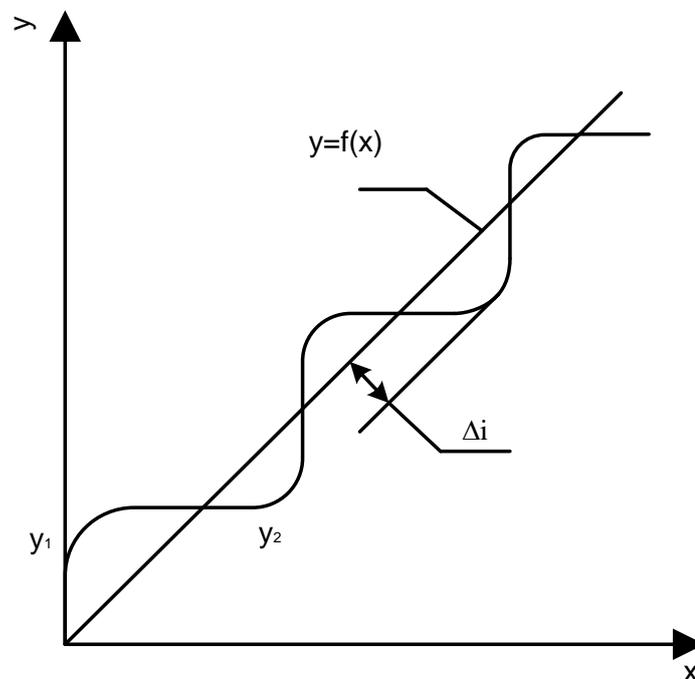


Рисунок 4.1 Аппроксимация экспериментальных данных линейными зависимостями

Запишем выражения экспериментальных отклонений данных от выбранного направления [2]:

$$\begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \Delta_1 \\ ax_2 + b - y_2 &= \Delta_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b - y_n &= \Delta_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Теперь суммируем квадраты полученных отклонений:

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 = \min = E \quad (4.3)$$

Возьмем частные производные от выражения (4.3)

$$\frac{dE}{da} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + \dots + (ax_n + b - y_n)x_n \quad (4.4)$$

$$\frac{dE}{db} = 2(ax_1 + b - y_1) + \dots + (ax_n + b - y_n) \quad (4.5)$$

Раскроем скобки – получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + ab = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.6)$$

Определим коэффициенты a и b , решив систему уравнений по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \neq 0 \quad (4.7)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.8)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.9)$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad (4.10)$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad (4.11)$$

Запишем уравнение аппроксимирующей прямой:

$$y = f(x) = ax + b \quad (4.12)$$

4.2 Расчетная часть

Экспериментальные значения параметра Р (силы тяги на колёсах) автомобиля ГАЗ 3102 представлены в табл. 4.1

Таблица 4.1.

$\times 10^3$ км	Р кгс								
0	115	30	115	60	115	90	110	120	125
5	110	35	120	65	105	95	115	125	115
10	115	40	115	70	125	100	100	130	110
15	120	45	95	75	120	105	115	135	120
20	105	50	115	80	110	110	125	140	115
25	135	55	130	85	115	115	115	145	105

Определим коэффициенты а и b, используя формулы (4.7) - (4.11). Полученные результаты занесем в табл. 4.2.

Таблица 2.2.

$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$	Δ	Δ_a	Δ_b	a	b
2175	3450	213875	249525	1685625	- 18000	195151875	-0,011	115,774

Запишем уравнение аппроксимирующей прямой:

$$P_r(x) = y = -0,011x + 115,774$$

Построим график экспериментальных данных Р(х) и аппроксимирующую прямую на рис. 4.2.

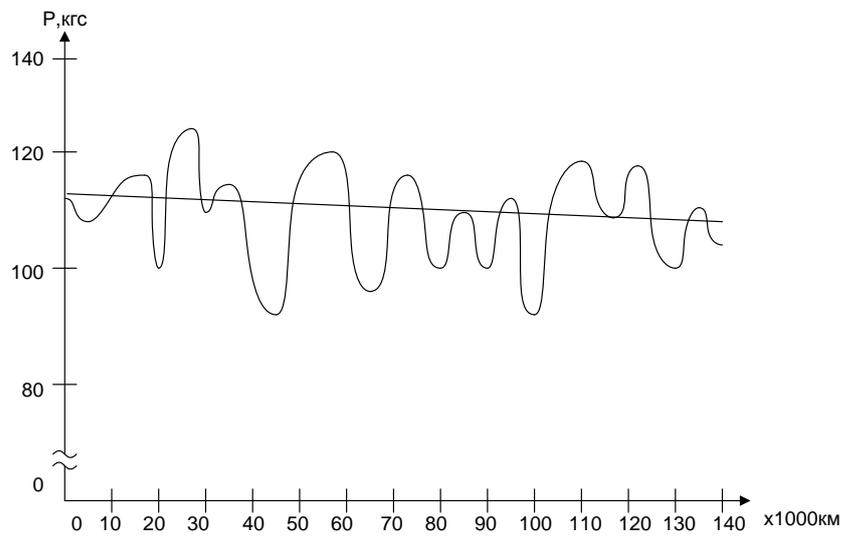


Рисунок 4.2. График экспериментальных данных $P(x)$ и аппроксимирующая прямая $P_T(x)$

Вывод

В результате обработки экспериментальных данных с помощью метода наименьших квадратов определены значения коэффициентов $a=-0,011$ и $b=115,774$ и получено уравнение аппроксимирующей прямой $y = -0,011x + 115,774$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М: Наука, 1969, - 516 с.
2. Спиридонов А.А., Васильев Н.Г. Планирование эксперимента: Учеб. пособие / Свердловск, УЛИ им. С.М. Кировск, 1975, - 152 с.