

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹

1 Предисловие

В нашей повседневной жизни, бизнесе, иной профессиональной деятельности, а также в научных исследованиях мы постоянно сталкиваемся с событиями и явлениями с неопределенным исходом. Например, торговец не знает, сколько посетителей придет к нему в магазин, рабочий — сколько времени ему придется сегодня добираться до работы, бизнесмен — какой будет завтра или через месяц курс доллара, банкир — вернут или нет взятый у него заем и т. д. При этом нам постоянно приходится принимать в подобных неопределенных, связанных со многими случайностями ситуациях свои решения, иногда очень важные. В быту или в несложном бизнесе мы можем принимать такие решения на основе здравого смысла, интуиции, предыдущего опыта. Здесь мы часто можем сделать некий “запас прочности” на действия случая: скажем, выходить из дома на десять минут раньше, чтобы уже почти наверняка не опаздывать на работу. Однако в более серьезных делах решения должны приниматься на основе тщательного анализа имеющейся информации, быть обоснованным и доказуемым. Для решения задач, связанных с анализом данных при наличии случайных и непредсказуемых воздействий, математиками и другими исследователями (экономистами, биологами, психологами и т. д.) был выработан мощный и гибкий арсенал методов, называемый в совокупности теорией вероятностей и математической статистикой. Эти методы позволяют выявлять закономерности на фоне случайностей, делать обоснованные выводы и прогнозы, давать оценки вероятностей их выполнения или невыполнения. Цель этого учебного пособия — познакомить читателя с некоторыми понятиями теории вероятностей, на которые опирается анализ данных случайной природы.

2 Первые вероятностные понятия

2.1 Пространство элементарных событий. События

Аксиоматика теории вероятностей основана на формализации таких понятий, как случайный эксперимент, его исход, случайное событие и т. д. Мы не будем пока заниматься собственно аксиоматикой, а сделаем лишь первые шаги по пути формализации.

Пространство элементарных событий. Нет нужды подробно объяснять, что такое случайный эксперимент: это эксперимент, исход которого невозможно предугадать абсолютно точно. Самый простой пример: если мы подбрасываем монетку, которая обязательно упадет на пол и не может встать на ребро, то мы имеем дело со случайным экспериментом, обладающим двумя исходами — Г (герб) и Р (решка). Эти исходы естественно назвать элементарными, неделимыми. Таким образом, мы получаем множество $\{Г, Р\}$, которое будет называться *пространством элементарных событий*, соответствующих нашему эксперименту, и элементы этого множества Г и Р — *элементарные события*. Для любого случайного эксперимента элементарные события — это “самые маленькие”, неделимые, элементарные исходы эксперимента, а пространство элементарных событий — это множество всех элементарных исходов. Таким образом мы подходим к тому, чтобы описывать понятия, связанные со случайными экспериментами, в терминах теории множеств.

Итак, мы описываем всю совокупность исходов случайного эксперимента как некоторое множество (*пространство элементарных событий*), а его элементарный исход — как точку этого множества (*элементарное событие*).

¹Учеб. пособие / Сост. А.С. Тихомиров; НовГУ им. Ярослава Мудрого. — Великий Новгород, 2011.

Стандартное обозначение для пространства элементарных событий — Ω (“омега большое”), для элементарного события — ω (“омега маленькое”).

События. Если проводится случайный эксперимент, то отнюдь не всегда нас интересует одно-единственное элементарное событие (которое, естественно, может “произойти”, а может и нет). Часто нас будет интересовать некоторое множество элементарных событий, удовлетворяющее каким-то условиям (сегодня придется добираться до работы больше получаса). Таким образом, мы можем отождествить случайное событие с подмножеством пространства элементарных событий.

Определение. Случайными событиями мы будем называть подмножества пространства элементарных событий.

Говоря о случайных событиях, обычно опускают слово “случайное” и употребляют термин “событие”. Стандартные обозначения для событий — большие латинские буквы (A, B, C и т. д.).

Здесь следует пояснить, что мы называем A подмножеством множества B (и пишем $A \subset B$) в том случае, когда все элементарные события, из которых состоит A , входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается).

Определение. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subset \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A .

Утверждение “элементарное событие ω принадлежит множеству A ” символически записывается так: $\omega \in A$; запись $\omega \notin A$ означает, что элементарное событие ω не принадлежит A .

Пример. Рассмотрим простой эксперимент, состоящий в бросании игральной кости, т. е. кубика, грани которого занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число очков, выпавшее при бросании игральной кости — цифра на верхней грани кубика. Пространство элементарных событий $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Событие $A = \{\text{выпало четное число}\}$ состоит из трех исходов, т. е. $A = \{2, 4, 6\}$. Считаем, что A наступило, если выпало либо 2, либо 4, либо 6.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некоторое множество хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого множества*, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом \emptyset . В теории вероятностей множество \emptyset называется *невозможным событием*. Пространство Ω естественно называть *достоверным событием*.

Отправляясь от некоторой заданной системы множеств, являющихся событиями, можно образовывать новые события, отвечающие конструкциям высказываний с логическими связками “или”, “и” и “не”, чему на языке теории множеств соответствуют операции “объединения”, “пересечения”, “дополнения”.

Определение. Если A и B — два множества, то под их *объединением*, обозначаемым $A \cup B$ понимается множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}.$$

На языке теории вероятностей объединение событий A и B называется *суммой событий* A и B , и часто обозначается как $A + B$.

Другими словами, под $A \cup B$ понимают следующее событие: произошло или событие A , или событие B , либо они произошли одновременно, т. е. произошло хотя бы одно из событий A или B .

Определение. *Пересечение* (или *произведение*) двух множеств A и B , обозначаемое $A \cap B$ (или AB), есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A , так и B :

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}.$$

Иными словами, $A \cap B$ означает событие, при котором события A и B наступают одновременно.

Определение. Если A — некоторое подмножество Ω , то под его *дополнением*, обозначаемым в дальнейшем \bar{A} , понимается множество точек из Ω , не входящих в A :

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

Наступление события \bar{A} означает просто, что событие A не наступило. Событие \bar{A} называется событием, *противоположным* (*дополнительным*) для события A , или *отрицанием* A .

Определение. *Разностью* $A \setminus B$ множеств A и B называется событие, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих B :

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}.$$

Смысл события $A \setminus B$ состоит в том, что событие A наступает, но при этом не наступает событие B .

Разность событий A и B иногда обозначается как $A - B$.

Пример. Пусть при бросании игральной кости $A = \{\text{выпало четное число}\}$, $B = \{\text{выпало число кратное трем}\}$. Тогда $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$, $\bar{A} = \{1, 3, 5\} = \{\text{выпало нечетное число}\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 6\} \setminus \{3, 6\} = \{2, 4\}$.

Определим, теперь, некоторые отношения между событиями. События A и B называются *несовместными*, если они не пересекаются (т. е. $A \cap B = \emptyset$). Несовместные события взаимно исключают друг друга, они не могут происходить одновременно. В примере с кубиком события $A = \{\text{выпало четное число очков}\}$ и $B = \{\text{выпало нечетное число очков}\}$ несовместны. Во всех случаях несовместны A и \bar{A} (событие и его отрицание).

Тот факт, что A является подмножеством B , будем записывать так: $A \subset B$ (или $B \supset A$). Это значит, что из наступления события A следует наступление B . Пусть в примере с кубиком $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{\text{выпало больше одного очка}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда $A \subset B$, т. е. выпадение четного числа очков (наступление события A) означает также, что число выпавших очков больше одного (наступление B). В случае $A \subset B$ мы будем говорить, что событие A влечет за собой событие B , или, что событие B следует из события A .

3 Классическая вероятность

Проведенная в предыдущем параграфе формализация понятий случайного эксперимента, его элементарного исхода и случайного события еще не достаточны для наших целей. Дело в том, что имея дело со случайным экспериментом, мы хотим оценивать шансы произойти тому или иному случайному событию.

Сейчас мы будем заниматься только теми экспериментами, которые имеют равновозможные исходы. Т. е. мы будем рассматривать эксперименты, для которых выполнены следующие два условия.

1. Множество Ω конечно, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$.
2. Все элементарные исходы ω_i равновозможны, то есть все они имеют одинаковые шансы произойти.

Условия 1 и 2 довольно ограничительны. Так, конечность Ω сразу убирает из рассмотрения эксперименты с бесконечным пространством элементарных событий, а равновозможность элементарных событий не позволяет иметь дело, скажем, с бросанием кривой (несимметричной) монеты, где шансы выпадения герба могут быть выше, чем решки.

Если случайный эксперимент удовлетворяет условиям 1 и 2, то мы будем говорить, что имеем дело со *схемой равновозможных исходов*. Довольно часто в этой ситуации применяют термин *классическая вероятность*. Этот термин имеет историческое происхождение — первые задачи теории вероятностей относились именно к схеме равновозможных исходов.

Итак, пусть Ω — конечное пространство элементарных событий, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ и $A \subset \Omega$. Обозначим через $|A|$ число элементов множества A .

Определение. Вероятностью события A в схеме равновозможных исходов называется число

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (1)$$

Отметим, что для $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ величина $|\Omega| = n$.

Определение соответствует интуиции: если $\omega_i \in \Omega$ и $A = \{\omega_i\}$ — одноточечное подмножество Ω , то

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{|\{\omega_i\}|}{n} = \frac{1}{n},$$

так что все элементарные события действительно равновероятны.

Пример. Бросается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Решение. Первое, что нам нужно сделать, это провести формализацию словесного описания эксперимента. Мы уже знаем, что это такое: мы должны описать пространство элементарных событий, то есть указать, что является элементарным исходом данного эксперимента. В приведенном примере это не составляет никакой сложности — конечно, элементарное событие — это любое число от 1 до 6, а $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Далее нужно описать интересующее нас событие как подмножество Ω . Здесь это тоже легко: $A = \{2, 4, 6\}$.

Теперь, если мы условились решать задачу в рамках схемы равновозможных исходов (в данном примере это означает, что наша игральная кость считается идеальной, абсолютно симметричной), то для вычисления искомой вероятности осталось сделать два действия — подсчитать число элементов множества Ω и множества A . В примере опять все тривиально: $|\Omega| = 6$, $|A| = 3$, так что $P(A) = 3/6 = 0.5$.

Отметим следующие свойства вероятности в схеме равновозможных исходов.

Свойства классической вероятности

1. Для любого $A \subset \Omega$ выполнены неравенства $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

5. Для любых событий A и B имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
7. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

4 Элементы комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Теорема. Из m элементов a_1, \dots, a_m и n элементов b_1, \dots, b_n можно образовать ровно $m \cdot n$ различных пар (a_i, b_j) , содержащих по одному элементу из каждой группы.

Пример. Предположим, что люди классифицируются по полу и семейному положению (состоит или не состоит в браке). Различные категории играют здесь роль элементов. Всего мы получим $2 \cdot 2 = 4$ различных класса.

Пример. Колода карт для игры в бридж состоит из карт, которые делятся на четыре равные группы по масти. Четыре масти называются: пики, трефы, черви и бубны. Карты каждой масти различаются по значению. Имеется 13 значений (2, 3, ..., 10, валет, дама, король, туз). За множества элементов примем соответственно четыре масти и 13 возможных значений карты. Каждая карта определяется мастью и значением. Существует $4 \cdot 13 = 52$ таких комбинаций масти и значения. Это — число карт в колоде.

Определение. Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются *перестановками* этого множества.

Пример. Множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$, имеет следующие перестановки: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 2)$.

Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n .

Теорема. Число перестановок P_n определяется по формуле $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Пример. Число способов раздать три различных конфеты трем детям (по одной конфете каждому) равно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Пример. Цифры 0, 1, 2, 3 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек?

Решение. Число различных комбинаций (перестановок) из четырех цифр равно $4!$. Не все эти комбинации являются четырехзначными числами, т. к. есть комбинации, начинающиеся с нуля. Таких комбинаций будет $3!$ и их нужно исключить. В результате число различных четырехзначных чисел равно $4! - 3! = 18$.

Определение. Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются *размещениями* из n элементов по k .

Размещения могут отличаться друг от друга как элементами так и порядком.

Пример. Различными размещениями множества из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k . При $k = n$ число размещений совпадает с числом перестановок.

Теорема. Число размещений из n элементов по k определяется по формуле

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

Решение. Занумеруем дни сдачи экзаменов цифрами $1, 2, \dots, 8$. Чтобы составить различные расписания нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются друг от друга не только элементами, но и порядком. Таких наборов $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Определение. Неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, взятых из данных n элементов, называются *сочетаниями* из n элементов по k .

Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Пример. Для множества $\{1, 2, 3\}$ сочетаниями по 2 элемента являются $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k .

Теорема. Число сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*, так как они входят в формулу бинома Ньютона.

Пример. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

Решение. Различные пары команд образуют сочетания из 6 по 2, поскольку порядок среди двух команд, играющих в одной игре, нам безразличен. Следовательно, число игр будет равно $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$.

5 Общее определение вероятности

Этот параграф мы посвятим общему определению вероятности для произвольного пространства элементарных событий. Отметим сразу, что не существует общего определения вероятности, позволяющего сразу находить ее числовые значения. В качестве общего определения вероятности формулируются ряд аксиом, которым должна удовлетворять вероятность. Подход будет следующим: сначала мы поймем, каким свойствам должна удовлетворять вероятность, а потом положим главнейшие из этих свойств в основу определения.

Рассмотрим произвольный случайный эксперимент с пространством элементарных событий Ω и будем интересоваться некоторым событием $A \subset \Omega$ в этом эксперименте. Это событие имеет некоторые шансы произойти, давайте измерять эти шансы числом от 0 до 1 и обозначать шансы (иначе говоря — вероятность) произойти событию A как $P(A)$. Уже ясно, как связаны событие $A \subset \Omega$ и вероятность P . Вероятность является функцией, аргументами которой служат события. Это, конечно, не удивительно, в быту так и говорится:

“вероятность того, что ...”, то есть “вероятность события ...”. Осталось понять, какими свойствами должна обладать эта функция.

Начнем с некоторых интуитивных соображений. Представим себе, что вам вручили гнутую монетку (перед этим по ней стукнули молотком) и потребовали, чтобы вы придумали, как приблизительно определить вероятность выпадения герба при бросании этой монетки. Что бы вы стали делать, если ответ нужно дать обязательно? Весьма вероятно, что вы бы ответили что-нибудь вроде: “Нужно много раз подбрасывать монетку и считать общее число бросаний и число бросаний, при которых выпадет герб. Если после этого разделить меньшее число на большее, то мы получим (примерно) вероятность выпадения герба”.

Если мы имеем возможность повторять эксперимент сколько угодно долго, то, проведя этот эксперимент N раз (N — достаточно большое число) и сосчитав число $N(A)$ случаев, когда происходило событие A , мы можем написать

$$h_N(A) = \frac{N(A)}{N} \sim P(A). \quad (2)$$

Величину $h_N(A)$ естественно называть *частотой* события A в N экспериментах. Соотношение (2) нужно читать так: “Вероятность события A ассоциируется с частотой события A , если проведено большое число экспериментов”. Иными словами, мы интуитивно воспринимаем вероятность как частоту в большом числе экспериментов.

В следующей таблице помещены результаты о частоте выпадения герба при бросании симметричной монеты экспериментально полученные разными исследователями, начиная с 18 века (их фамилии написаны в левом столбце таблицы). Здесь N — число экспериментов, A — “выпадение герба”, $h_N(A)$ — частота выпадения герба.

Исследователи	N	$h_N(A)$
Бюфффон	4040	0.507
Де Морган	4092	0.5005
Джевонс	20480	0.5068
Романовский	80640	0.4923
Пирсон К.	24000	0.5005
Феллер	10000	0.4979

Таблица 1. Результаты экспериментов

Хорошо видно, что частота выпадения герба в этих экспериментах близка к 0.5.

Так как интуитивно мы воспринимаем вероятность как частоту, то естественно ожидать, что вероятность должна обладать основными свойствами частоты. Прежде всего заметим, что при фиксированном N аргументом у частоты является событие. Кроме того, непосредственно из определения получаются следующие свойства частоты.

Свойства частоты

1. $h_N(\Omega) = 1$.
2. Для любого $A \subset \Omega$ верно неравенство $h_N(A) \geq 0$.
3. Если $A, B \subset \Omega$ и $A \cap B = \emptyset$, то $h_N(A \cup B) = h_N(A) + h_N(B)$.

Отмеченные свойства частоты и положим в основу общего определения вероятности.

Определение. Пусть Ω — некоторое пространство элементарных событий. Пусть функция P , аргументами которой служат события, обладает следующими свойствами.

1. $P(\Omega) = 1$. (Аксиома нормированности.)
2. Для любого события $A \subset \Omega$ выполнено неравенство $P(A) \geq 0$. (Аксиома неотрицательности.)
3. Для любой последовательности событий A_1, \dots, A_n, \dots таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, выполняется равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

(Аксиома счетной аддитивности.)

Тогда функцию P называют *вероятностью*.

Замечание. Отметим, что по некоторым (довольно сложным) математическим соображениям конечной аддитивности вероятности, т. е. выполнения свойства

$$3^*. \text{ Если } A \cap B = \emptyset, \text{ то } P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

оказывается недостаточно. Необходимо свойство аддитивности в более сильной форме, в виде счетной аддитивности.

Исходя из данного определения вероятности получаются следующие свойства вероятности.

Свойства вероятности

1. Для любого $A \subset \Omega$ выполнены неравенства $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5. Для любых событий A и B имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
7. Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Отметим, что полученные ранее свойства классической вероятности полностью совпадают с представленными здесь свойствами вероятности в общем случае.

6 Условная вероятность

Представим себе, что мы сидим здесь, в этой комнате, а в это время кто-то за стенкой проводит случайный эксперимент. В этом эксперименте нас интересует событие A . Если мы ничего не знаем о том, как проходит этот эксперимент, то шансы осуществиться событию A выражаются для нас числом $P(A)$. Если же кто-то по секрету сообщил нам, что в эксперименте произошло событие B , то эти шансы вполне могут измениться. Например, если $B \subset A$, то эти шансы возрастут с $P(A)$ до 1, а если $A \cap B = \emptyset$, то упадут с $P(A)$ до 0.

Таким образом мы приходим к необходимости ввести понятие “условной вероятности того, что произойдет событие A при условии, что произошло событие B ” (или проще —

“условной вероятности события A при условии B ”). Обозначим эту условную вероятность через $P(A|B)$ (пока это просто набор значков) и попробуем дать строгое определение этому понятию. Здесь нам снова понадобится частота событий.

Пусть мы провели наш эксперимент N раз, при этом событие B осуществилось $N(B)$ раз и событие $A \cap B$ — $N(A \cap B)$ раз. Будем считать, что $N(B) > 0$. Как мы уже отмечали,

$$P(B) \sim \frac{N(B)}{N}, \quad P(A \cap B) \sim \frac{N(A \cap B)}{N} \quad (3)$$

(напомним, что подобные соотношения читаются как “вероятность ассоциируется с частотой”). С чем же у нас ассоциируется условная вероятность? По предположению, нам известно, что осуществилось событие B . Это значит, что нас интересуют не все N экспериментов, а только те $N(B)$ из них, при которых произошло событие B . В этих $N(B)$ экспериментах событие A осуществилось $N(A \cap B)$ раз, поэтому в полном соответствии с соотношениями (3) мы можем написать

$$P(A|B) \sim \frac{N(A \cap B)}{N(B)} \quad (4)$$

(правая часть выражения (4) — это частота события A в тех экспериментах, где осуществилось событие B). Но ввиду (3)

$$P(A|B) \sim \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N} \sim \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5)$$

и поэтому, соединяя знаком равенства первый и последний член соотношений (5), приходим к определению.

Определение. Пусть Ω — некоторое пространство элементарных событий, P — вероятность, $A, B \subset \Omega$ и $P(B) > 0$. Тогда *условной вероятностью события A при условии B* называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (6)$$

Иногда вместо $P(A|B)$ пишут $P_B(A)$, последнее обозначение бывает удобно, если событие B фиксировано, а A может меняться.

7 Формула умножения вероятностей

Перепишем формулу (6) (то есть определение условной вероятности) в виде

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B). \quad (7)$$

Полученное равенство носит название *формулы умножения вероятностей* для двух событий.

Пример. Пусть в ящике лежат 7 белых и 5 черных шаров. Проводят следующий эксперимент: из ящика поочередно достают два шара (именно так: сначала один, потом — второй). Нужно найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Задача, конечно, очень простая и суть ее не в том, чтобы получить правильный ответ, а в том, чтобы проиллюстрировать формулу умножения. Пусть W_1 — событие, состоящее в том, что первый шар белый (White), соответственно событие W_2 — второй шар белый. По условию нам нужно вычислить вероятность $P(W_2 \cap W_1)$. Запишем согласно (7)

$$P(W_2 \cap W_1) = P(W_2|W_1) P(W_1). \quad (8)$$

А теперь припишем сомножителям, входящим в правую часть (8), числовые значения. Очевидно, $P(W_1) = 7/12$ (в начале эксперимента в ящике 12 шаров, из них 7 белых). Чему равно $P(W_2 | W_1)$, тоже легко понять: после изъятия одного белого шара в ящике осталось 6 белых и 5 черных шаров, поэтому $P(W_2 | W_1) = 6/11$. Итого

$$P(W_2 \cap W_1) = P(W_2 | W_1) P(W_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{22}.$$

Нетрудно распространить формулу (7) на случай пересечения n событий.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

8 Формула полной вероятности

Мы сейчас выведем еще одну простую формулу, связанную с условной вероятностью. Несмотря на свою теоретическую простоту, она имеет важное значение для понимания природы случайных явлений. Прежде всего дадим одно определение.

Определение. Пусть Ω — пространство элементарных событий. Говорят, что события H_1, \dots, H_n образуют *полную группу событий*, если выполняются следующие два условия.

1. $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$. (Объединение событий составляет все пространство Ω .)
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$. (События попарно несовместны.)

Теорема. Пусть H_1, \dots, H_n — полная группа событий, и $P(H_i) > 0$ при всех i . Тогда для любого события A

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | H_i) P(H_i). \quad (9)$$

Равенство (9) называется *формулой полной вероятности*.

Доказательство. Имеем

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^n H_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(A | H_i) P(H_i).$$

Теорема доказана. □

Пример. Пусть в первом ящике содержится 7 белых и 5 черных шаров, а во втором ящике — 3 белых и 8 черных. Эксперимент состоит в том, что мы сначала перекладываем один шар из первого ящика во второй, а потом вынимаем один шар из второго ящика. Нас интересует вероятность того, что этот второй шар будет белым.

Решение. Попробуем решить эту задачу с помощью формулы полной вероятности. Для этого нам необходимо задать полную группу событий, причем не любую (полной группы событий нет в условиях задачи, мы сами должны ее выбрать, она в нашей власти), а такую, которая наилучшим образом соответствовала бы как структуре самого эксперимента, так и интересующему нас событию. В данном случае это сделать достаточно легко — эксперимент состоит из двух частей, и поэтому естественно описывать в полной группе событий результаты первой части эксперимента.

Выберем в качестве полной группы событий события W_1 и B_1 — из первого ящика вынут белый (White) и черный (Black) шар соответственно. Это действительно полная

группа событий — события W_1 и B_1 , конечно же, не пересекаются, и обязательно происходит либо W_1 , либо B_1 . Выбрав полную группу событий и обозначив через W_2 событие, состоящее в том, что вынутый из второго ящика шар — белый, запишем согласно (9)

$$P(W_2) = P(W_2 | W_1) P(W_1) + P(W_2 | B_1) P(B_1). \quad (10)$$

Ну, а теперь посмотрим, что мы можем сказать о правой части (10). Очевидно, что $P(W_1) = 7/12$ и $P(B_1) = 5/12$. Точно так же $P(W_2 | W_1) = 4/12$ и $P(W_2 | B_1) = 3/12$. Поэтому

$$P(W_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{43}{144}.$$

9 Формула Байеса

Имеется полная группа несовместных гипотез (полная группа событий) H_1, \dots, H_n , вероятности которых $P(H_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) известны до опыта (*вероятности априори*). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A , причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности $P(A | H_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Спрашивается, каковы будут вероятности этих гипотез после опыта (*вероятности апостериори*).

Например, очевидно, следует отбросить гипотезы, отрицающие появление события A . Вообще, проблема состоит в том, что, имея новую информацию, мы должны переоценить вероятности наших гипотез.

Иными словами, нам нужно определить условные вероятности $P(H_k | A)$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Ответ на этот вопрос дает следующий результат.

Теорема. Пусть даны полная группа событий H_1, \dots, H_n и некоторое событие A имеющие положительную вероятность. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots, n$ условная вероятность события H_k при условии, что событие A произошло, задается формулой

$$P(H_k | A) = \frac{P(A | H_k) P(H_k)}{\sum_{i=1}^n P(A | H_i) P(H_i)}. \quad (11)$$

Формула (11) называется *формулой Байеса*.

Доказательство. В силу определения условной вероятности

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)}.$$

Согласно формуле умножения вероятностей имеем

$$P(H_k A) = P(A | H_k) P(H_k).$$

Следовательно,

$$P(H_k | A) = \frac{P(A | H_k) P(H_k)}{P(A)}.$$

Подставляя сюда выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности, получим формулу Байеса. \square

Пример. В некоторой семье три сестры — Алиса, Бетти и Шарлотта — моют посуду, причем Алиса делает это с вероятностью 0.5, Бетти — с вероятностью 0.3, а Шарлотта — с вероятностью 0.2. Если посуду моет Алиса, то она бьет ее с вероятностью 0.05, для Бетти соответствующая вероятность равна 0.1, а для Шарлотты — 0.12. На кухне раздался звон разбитой посуды. Чему равна вероятность того, что ее мыла Алиса? Чему равны соответствующие вероятности для Бетти и Шарлотты?

Решение. Обозначим через A , B и C события, состоящие в том, что посуду моют Алиса, Бетти и Шарлотта соответственно. Пусть событие R состоит в том, что посуда разбита. По формуле полной вероятности $P(R) = 0.079$. Применяя формулу Байеса получим $P(A|R) = 25/79$, $P(B|R) = 30/79$, $P(C|R) = 24/79$. Сравнивая найденные вероятности между собой видно, что скорее всего посуду разбила Бетти.

10 Независимость событий

В обыденной жизни люди часто употребляют слово “независимый” в понятном для всех смысле. Попробуем записать на языке теории вероятностей, что означает эта независимость.

Пусть A и B — два события, “независимые” на обыденном языке. Какое соотношение должно быть между числами $P(A)$ и $P(A|B)$? Число $P(A)$ — это шансы произойти событию A , число $P(A|B)$ — это те же шансы, если дополнительно известно, что произошло событие B . Раз A и B “независимы”, то шансы произойти событию A не изменятся от того, есть у нас информация о том, что B произошло, или этой информации нет. Значит,

$$P(A|B) = P(A). \quad (12)$$

Собственно говоря, это равенство можно было бы положить в определение независимости событий A и B . Но в таком определении было бы два недостатка.

Во-первых, для выполнения (12) нужно, чтобы выполнялось условие $P(B) > 0$. Это не страшное, но неудобное ограничение: а вдруг мы не знаем, равна ли вероятность $P(B)$ нулю или нет? Тогда мы вообще не смогли бы говорить о независимости. Второй недостаток состоит в том, что прочтение формулы (12) должно быть таким: “ A не зависит от B ”, в то время как независимость — явно взаимное понятие: “ A и B независимы”. Поэтому давайте перепишем (12) как

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A), \quad (13)$$

и, домножив обе части равенства (13) на $P(B)$, получим симметричную относительно A и B формулу, не содержащую знаменателей:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (14)$$

Определение. Пусть Ω — пространство элементарных событий и P — вероятность. События A и B называются *независимыми*, если для них выполнено равенство (14).

Пример. Из колоды в 52 карты достают одну карту. Событие A состоит в том, что эта карта пика, событие B — в том, что она туз. Проверим независимость событий A и B . Очевидно, $P(A) = 13/52 = 1/4$ (в колоде — тринадцать пик), $P(B) = 4/52 = 1/13$ (четыре туза) и $P(A \cap B) = 1/52$ (событие $A \cap B$ состоит из одного-единственного элементарного события — туза пик). Поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = P(A)P(B),$$

и события являются независимыми. В этом нет, конечно ничего удивительного: если вы знаете, что карта — туз, то у вас нет никакой информации о его масти.

Рассмотрим теперь три события: A , B и C . Как определить независимость этих трех событий? Прежде всего, совершенно естественно считать, что любые два события из трех (то есть A и B , A и C , B и C) должны быть независимы. Но можно ли на этом остановиться? Возвратившись к нашему исходному “определению” независимости через условную вероятность, мы видим, что требование

$$P(A|B \cap C) = P(A) \quad (15)$$

совершенно необходимо. Но (15) означает, что $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$, и, по независимости событий B и C , $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Таким образом мы пришли к четырем требованиям, которым должны удовлетворять независимые события A , B и C . Возьмем эти условия в качестве определения.

Определение. События A , B и C называются независимыми, если

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
2. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.
3. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

11 Испытания Бернулли

Схема Бернулли заключается в следующем. Проводятся n последовательных независимых одинаковых экспериментов (испытаний), в каждом из которых может наступить или не наступить событие A . Под независимыми понимаются такие эксперименты, в которых любые события, возникающие в разных экспериментах, являются независимыми. Так как испытания одинаковы, то в любом из них событие A наступает с одинаковой вероятностью, обозначим ее $p = P(A)$. Вероятность дополнительного события \bar{A} обозначим q . Тогда $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Наступление события A обычно называют *успехом*, а ненаступление — *неудачей*.

Пример. Симметричная однородная монета бросается 10 раз. В каждом из бросаний нас интересует событие $A = \{\text{выпал герб}\}$. Здесь 10 испытаний, и так как монета симметрична и однородна, то $p = P(A) = 1/2$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 1/2$.

Пример. Игральная кость бросается три раза. При каждом бросании нас интересует событие $A = \{\text{выпала шестерка}\}$. Здесь три испытания, и поскольку кубик симметричен и однороден, то $p = P(A) = 1/6$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 5/6$.

Теорема. Обозначим $P_n(m) = P(\text{событие } A \text{ наступило } m \text{ раз в } n \text{ испытаниях})$. Тогда

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}. \quad (16)$$

Формула (16) называется *формулой Бернулли*.

Пример. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты герб выпадет ровно 5 раз.

Решение. Здесь вероятность выпадения герба при одиночном испытании $p = 1/2$. Отсюда $q = 1 - p = 1/2$. По формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0.25.$$

Теорема. Пусть m_1, m_2 — целые числа, $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$. Обозначим через $P_n(m_1, m_2)$ вероятность того, что событие A наступило не менее m_1 и не более m_2 раз в n испытаниях Бернулли. Тогда

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \quad (17)$$

По формуле Бернулли, событие “произошло 0 успехов в n испытаниях” имеет вероятность q^n , 1 успех — вероятность npq^{n-1} и т. д. Какое же число успехов наиболее вероятно?

Теорема. В n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p наиболее вероятным числом успехов является а) единственное число $[np + p]$, если число $np + p$ не целое; б) два числа $np + p$ и $np + p - 1$ если число $np + p$ целое.

Здесь через $[np + p]$ обозначена целая часть числа $np + p$.

Пример. Найти наиболее вероятное число выпадений герба при 10-кратном бросании монеты.

Решение. Здесь вероятность выпадения герба при одиночном испытании $p = 1/2$. Отсюда $np + p = 10/2 + 1/2 = 5.5$. Значит наиболее вероятным числом выпадений герба является число 5.

12 Предельные теоремы в схеме Бернулли

В приложениях часто приходится вычислять вероятности различных событий, связанных с числом успехов m в n испытаниях Бернулли при больших значениях n . В этом случае вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Трудности возникают и тогда, когда приходится суммировать вероятности $P_n(m)$. Затруднения возникают также при малых значениях p или q .

Иногда при больших значениях n удастся заменить формулу Бернулли какой-либо приближенной асимптотической формулой. Приведем три предельные теоремы, содержащие асимптотические формулы для вероятностей $P_n(m)$ и $P_n(m_1, m_2)$ при $n \rightarrow \infty$.

12.1 Теорема Пуассона

Рассмотрим сначала случай, когда с ростом n вероятность $p = p_n$ уменьшается обратно пропорционально n . При малых p речь идет о появлении очень редких событий, так как вероятность их наступления в отдельном испытании мала. Однако вероятность появления одного или нескольких редких событий в длинной серии испытаний уже не будет малой величиной.

Теорема. Если $n \rightarrow \infty$ и $p_n \rightarrow 0$ так, что $np_n \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то для любого фиксированного $m = 0, 1, 2, \dots$

$$P_n(m) \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \quad (18)$$

Если n велико, то вероятность $P_n(m)$ сколь угодно мало отличается от своего предела (18). Отсюда при больших n для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np_n$.

Вообще, приближенную формулу Пуассона можно применять в случаях, когда число испытаний n “велико”, вероятность события p_n “мала”, а np_n “не мало и не велико”.

Пример. При выработке некоторой массовой продукции вероятность появления одного нестандартного изделия составляет 0.01. Какова вероятность, что в партии 100 изделий этой продукции 2 изделия будут нестандартными?

Решение. Здесь вероятность $p_n = 0.01$ мала, а число $n = 100$ велико, причем

$$\lambda = np_n = 100 \cdot 0.01 = 1.$$

Используя приближенную формулу Пуассона для искомой вероятности, получаем следующее значение:

$$P_{100}(2) \approx \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0.184.$$

Кстати, значение $P_{100}(2)$, полученное по точной формуле (16), приближенно равно 0.185.

12.2 Локальная теорема Муавра–Лапласа

Рассмотрим еще одну приближенную формулу для вероятности $P_n(m)$, когда n велико. В отличие от предыдущего результата число успехов m в этом случае тоже растет с ростом n , а вероятность успеха постоянна.

Теорема. Положим $x_n = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ где $q = 1 - p$. Предположим, что $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и величины x_n являются ограниченными. Тогда

$$P_n(m) \bigg/ \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_n^2/2} \rightarrow 1.$$

Отсюда для искомой вероятности $P_n(m)$ имеем приближенную формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_n^2/2}. \quad (19)$$

Введя функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (20)$$

формулу (19) можно переписать в виде

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (21)$$

Функция φ является плотностью распределения вероятностей стандартной нормальной случайной величины (см. стр. 21).

Пример. Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0.2$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Решение. Здесь $p = 0.2$, $q = 0.8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 4$$

и, следовательно,

$$x_n = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0.$$

Учитывая, что $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.40$, из формулы (21) получаем

$$P_{100}(20) \approx 0.40 \cdot \frac{1}{4} = 0.10.$$

Кстати, значение $P_{100}(20)$, полученное по точной формуле (16), приближенно равно 0.099.

12.3 Интегральная теорема Муавра–Лапласа

Рассмотрим приближенную формулу для вероятности $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A наступило не менее m_1 и не более m_2 раз в n испытаниях, когда n велико, а вероятность успеха постоянна.

Теорема. Положим

$$a_n = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b_n = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(m_1, m_2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} e^{-x^2/2} dx \rightarrow 0.$$

Отсюда для искомой вероятности $P_n(m_1, m_2)$ имеем приближенную формулу

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{b_n} e^{-x^2/2} dx. \quad (22)$$

Введя функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad (23)$$

формулу (22) можно переписать в виде

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(b_n) - \Phi(a_n). \quad (24)$$

Функция Φ является функцией распределения стандартной нормальной случайной величины (см. стр. 21). Функцию Φ часто называют функцией Лапласа.

Замечание. Иногда функцией Лапласа называют функцию

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy.$$

Функция Φ_0 нечетна: $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Функции Φ и Φ_0 связаны соотношением: $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 0.5$.

Пример. Вероятность поражения цели при одиночном выстреле одного орудия равна $p = 0.2$. Какова вероятность того, что при залпе из 100 орудий цель будет поражена не менее 20 раз?

Решение. Здесь $p = 0.2$, $q = 0.8$, $n = 100$, $m_1 = 20$, $m_2 = 100$. Имеем

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 4.$$

Отсюда

$$a_{100} = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0, \quad b_{100} = \frac{100 - 100 \cdot 0.2}{4} = 20.$$

На основании формулы (24) получаем

$$P_{100}(20, 100) \approx \Phi(20) - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Кстати, значение $P_{100}(20, 100)$, полученное по точной формуле (17), приближенно равно 0.54.

13 Случайные величины

13.1 Случайные величины. Функции распределения

Определение. Числовая функция X , заданная на пространстве элементарных событий Ω , называется *случайной величиной*.

Для любого исхода $\omega \in \Omega$ значение $x = X(\omega)$ — это *реализация случайной величины* при данном исходе.

Обозначать случайные величины будем заглавными латинскими буквами X, Y, \dots , а конкретные их значения соответствующими строчными буквами x, y, \dots .

Пример. Бросается монета. Случайная величина X равна количеству выпавших гербов. В этом примере $\Omega = \{\Gamma, P\}$, $X(\Gamma) = 1$, $X(P) = 0$.

В теории вероятностей интересуются тем, с какой вероятностью случайная величина принимает те или иные значения.

Определение. Вся совокупность вероятностей $P(X \in A)$ для событий $A \subset \mathbb{R}$ задает *распределение вероятностей* случайной величины X .

Обозначается распределение вероятностей случайной величины X следующим образом: $P_X(A) = P(X \in A)$.

Чтобы дать полное математическое описание случайной величины нужно указать ее распределение вероятностей. Указать распределение вероятностей можно по разному. Например, можно задать функцию распределения случайной величины.

Определение. Функция $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения* случайной величины X .

Замечание. Иногда полагают $F_X(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения

1. При всех x выполнено $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
2. Если $x \leq y$, то $F_X(x) \leq F_X(y)$, т.е. F_X — неубывающая функция.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
5. Для любых $a < b$ выполняется равенство $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
6. При всех x выполняется равенство $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.
7. Функция распределения F_X полностью определяет распределение вероятностей P_X .

Графики функций распределения представлены на рисунках 2, 3 и 5.

Виды случайных величин. В практических задачах обычно используют два вида случайных величин — *дискретные* и *непрерывные*, хотя бывают и такие случайные величины, которые не являются ни дискретными, ни непрерывными. Рассмотрим сначала дискретные случайные величины.

13.2 Дискретные случайные величины

Определение. Случайную величину называют *дискретной*, если множество ее возможных значений либо конечно, либо счетно.

Напомним, что множество называется счетным, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами.

Задать распределение вероятностей дискретной случайные величины можно указав вероятности всех ее значений. Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

Если множество возможных значений дискретной случайные величины X конечно, то сами значения и их вероятности можно записать в виде таблицы.

x_k	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_k)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Таблица 2. Закон распределения случайной величины X

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — множество всех возможных значений случайной величины X , а p_1, p_2, \dots, p_n — вероятности этих значений (т.е. $p_k = P(X = x_k)$). При этом обязательно должно выполняться условие $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Для дискретной случайной величины X вычислить вероятность $P(X \in A)$ можно следующим образом:

$$P(X \in A) = \sum_{x_k \in A} P(X = x_k).$$

Таким образом, вероятность $P(X \in A)$ (вероятность того, что случайная величина X попадет в множество A) равна сумме вероятностей всех значений случайной величины X которые принадлежат множеству A .

Перечислим некоторые часто встречающиеся на практике дискретные распределения.

1. Распределение Бернулли. Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром p ($0 < p < 1$), если $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

2. Биномиальное распределение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p ($0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$), если

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пример. Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей с параметрами $n = 2$ и $p = 0.5$. Закон распределения случайной величины X задается следующей таблицей.

x_k	0	1	2
$P(X = x_k)$	1/4	1/2	1/4

Таблица 3. Закон распределения X

Вероятности $P(X = x_k)$ представлены на рисунке 1. График функции распределения F_X представлен на рисунке 2.

3. Распределение Пуассона. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром λ ($\lambda > 0$), если

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

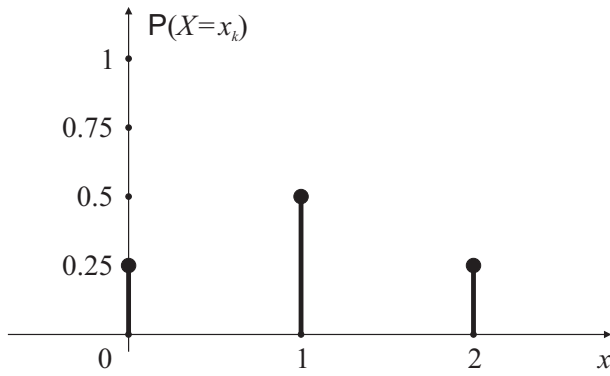


Рис. 1. Вероятности $P(X = x_k)$ биномиального распределения с $n = 2$ и $p = 0.5$

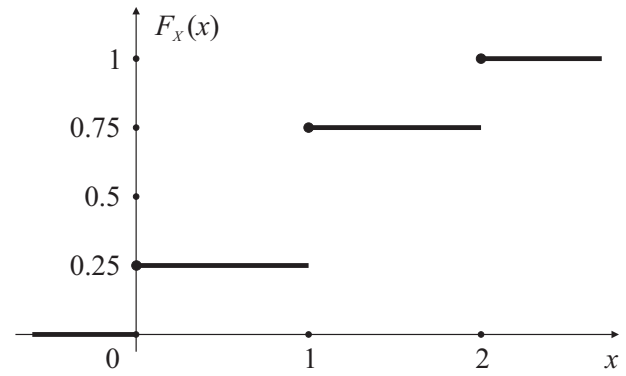


Рис. 2. Функция распределения F_X биномиального распределения с $n = 2$ и $p = 0.5$

4. Геометрическое распределение. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром p ($0 < p < 1$), если

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что функция распределения F_X дискретной случайной величины X разрывна. Точки разрывов совпадают с точками возможных значений случайной величины X . Функция распределения F_X дискретной случайной величины X с конечным множеством значений кусочно-постоянна и имеет вид “лесенки” (см. рисунок 2). Причем высота каждой “ступеньки” равна вероятности соответствующего значения случайной величины X (сопоставьте рисунки 1 и 2).

13.3 Непрерывные случайные величины

Определение. Случайную величину X называют *непрерывной*, если существует такая функция p_X , называемая *плотностью распределения*, что при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy.$$

Свойства непрерывных случайных величин

1. При всех x выполнено $p_X(x) \geq 0$ (плотность неотрицательна).

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1.$$

3. Если $p_X(x)$ непрерывна в точке x , то $F'_X(x) = p_X(x)$.

4. Если $p_X(x)$ непрерывна в точке x , то для любого маленького $\Delta > 0$ выполнено $P(x \leq X \leq x + \Delta) \approx p_X(x)\Delta$.

5. Для любых $a < b$ выполняется равенство

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(x) dx.$$

6. Функция распределения F_X непрерывной случайной величины X непрерывна.
7. Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $P(X = x) = 0$ (вероятность любого отдельного значения равна нулю).
8. При всех x выполняются равенства

$$P(X < x) = P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy,$$

$$P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} p_X(y) dy.$$

9. Для любых $a < b$ выполняются равенства

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$$

$$= F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p_X(x) dx.$$

Перечислим некоторые часто встречающиеся на практике непрерывные распределения.

1. Равномерное распределение на промежутке $[a, b]$. Функцией распределения в этом случае является

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b, \end{cases}$$

а плотностью

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Пример. Пусть случайная величина X равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$. Функцией распределения в этом случае является

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

а плотностью

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

График функции распределения F_X представлен на рисунке 3. График плотности p_X представлен на рисунке 4.

2. Показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$. Функцией распределения в этом случае является

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

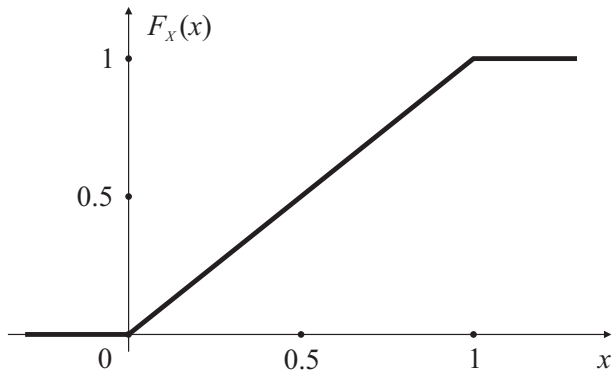


Рис. 3. Функция распределения F_X равномерно распределенной на промежутке $[0, 1]$ случайной величины

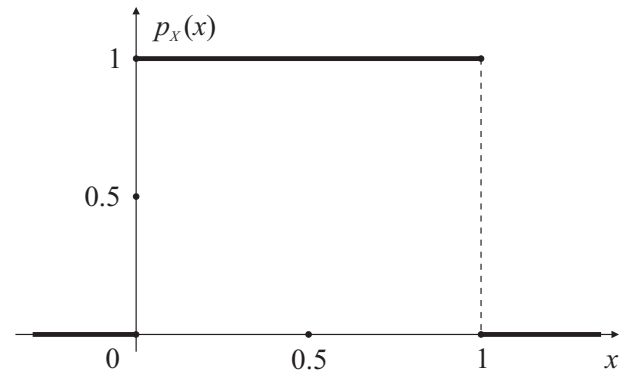


Рис. 4. Плотность p_X равномерно распределенной на промежутке $[0, 1]$ случайной величины

а плотностью

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

3. Нормальное распределение вероятностей с параметрами a и σ^2 (краткое обозначение: $N(a, \sigma^2)$). Случайная величина X имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами a и σ^2 (a — математическое ожидание X , σ^2 — дисперсия X), если ее плотность распределения задается формулой

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

4. Стандартное нормальное распределение (краткое обозначение: $N(0, 1)$). Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение вероятностей (нормальное распределение вероятностей с параметрами 0 и 1, где 0 — математическое ожидание X , а 1 — дисперсия X), если ее плотность распределения задается формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция распределения стандартной нормальной случайной величины равна

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Отметим, что функции φ и Φ нам уже встречались, см. формулы (20) и (23).

График функции Φ представлен на рисунке 5. График плотности φ представлен на рисунке 6.

Замечание. Отметим два свойства нормальных случайных величин.

1. $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.
2. Если Y распределена по закону $N(a, \sigma^2)$, то $X = (Y - a)/\sigma$ распределена по стандартному нормальному закону $N(0, 1)$. Поэтому

$$P(Y \leq y) = P\left(\frac{Y - a}{\sigma} \leq \frac{y - a}{\sigma}\right) = P\left(X \leq \frac{y - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - a}{\sigma}\right).$$

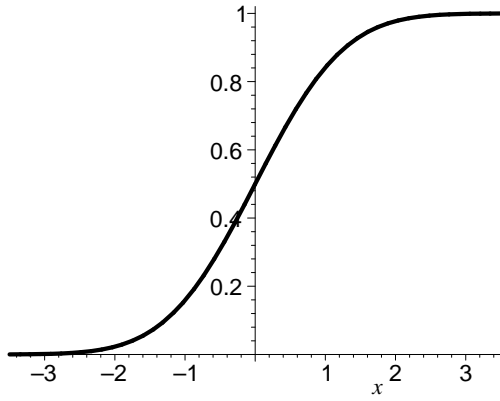


Рис. 5. Функция распределения Φ стандартной нормальной случайной величины

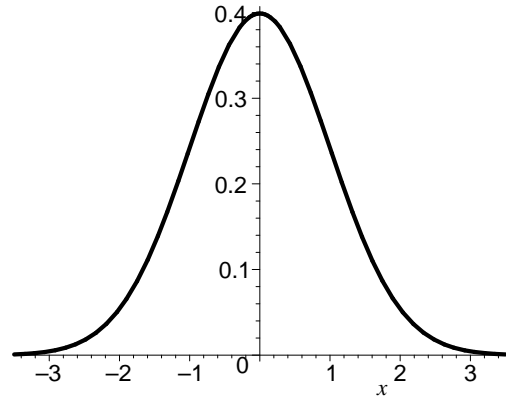


Рис. 6. Плотность φ стандартной нормальной случайной величины

Кроме того, при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|Y - a| \leq \varepsilon) &= P(-\varepsilon \leq Y - a \leq \varepsilon) = P\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \leq \frac{Y - a}{\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

13.4 Независимость случайных величин

Часто приходится рассматривать несколько случайных величин одновременно.

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых событий $A, B \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B). \quad (25)$$

Если равенство (25) нарушается для каких-нибудь событий $A, B \subset \mathbb{R}$, то случайные величины X и Y называются *зависимыми*.

Равенство (25) можно записать в виде

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A) P(Y \in B),$$

соответствующему определению независимости событий (14). Таким образом, независимость случайных величин означает независимость любых событий, связанных со значениями этих случайных величин.

14 Числовые характеристики случайных величин

14.1 Математическое ожидание

Числовые характеристики случайных величин помогают составить наглядное представление об этих величинах.

Определение. Для дискретной случайной величины X с конечным множеством значений x_1, x_2, \dots, x_n математическое ожидание EX вычисляется по формуле

$$EX = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k).$$

Замечание. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots, X_N независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $E X_k = a, k = 1, 2, \dots, N$. Тогда, если N достаточно велико, то с большой вероятностью

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} \approx a.$$

Замечание. Математическое ожидание случайной величины называют *средним значением* случайной величины.

Замечание. Приведем несколько замечаний, касающихся обозначения математического ожидания.

1. В обозначении математического ожидания иногда используют скобки, т. е. пишут $E(X)$.
2. На английском языке математическое ожидание называется expectation. Отсюда буква E в обозначении математического ожидания.
3. В русскоязычной литературе математическое ожидание часто обозначают MX .

Определение. Для дискретной случайной величины X со счетным множеством значений x_1, x_2, \dots математическое ожидание $E X$ вычисляется по формуле

$$E X = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k),$$

причем ряд должен сходиться абсолютно (в противном случае математическое ожидание не существует).

Теорема. Для дискретной случайной величины X с конечным множеством значений x_1, x_2, \dots, x_n и числовой функции f математическое ожидание $E f(X)$ вычисляется по формуле

$$E f(X) = \sum_{k=1}^n f(x_k) P(X = x_k).$$

В частности

$$E(X^t) = \sum_{k=1}^n x_k^t P(X = x_k).$$

Замечание. Аналогичные формулы справедливы для дискретной случайной величины X со счетным множеством значений.

Определение. Для непрерывной случайной величины X со плотностью p_X математическое ожидание $E X$ вычисляется по формуле

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx,$$

причем интеграл должен сходиться абсолютно (в противном случае математическое ожидание не существует).

Теорема. Для непрерывной случайной величины X с плотностью p_X и числовой функции f математическое ожидание $E f(X)$ вычисляется по формуле

$$E f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx.$$

В частности

$$E(X^t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t p_X(x) dx.$$

Свойства математического ожидания

1. Если случайная величина X постоянна и равна c ($X \equiv c = \text{const}$), то $E X = c$.
(Если $c = \text{const}$, то $E c = c$.)
2. Если $c = \text{const}$, то $E(cX) = c E X$.
3. $E(X + Y) = E X + E Y$.
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $E(X \cdot Y) = E X \cdot E Y$.
5. Если $X \geq Y$, то $E X \geq E Y$.
6. Если $X \geq 0$, то $E X \geq 0$.

14.2 Дисперсия

Определение. Дисперсией $D X$ случайной величины X называется величина

$$D X = E(X - E X)^2.$$

Замечание. Дисперсия характеризует разброс случайной величины относительно ее среднего значения.

Замечание. Приведем два замечания, касающихся обозначения дисперсии.

1. В обозначении дисперсии иногда используют скобки, т. е. пишут $D(X)$.
2. На английском языке дисперсия называется variance. Поэтому дисперсию часто обозначают $\text{Var } X$.

Свойства дисперсии

1. $D X = E(X^2) - (E X)^2$.
2. $D X \geq 0$.
3. Если случайная величина X постоянна ($X \equiv \text{const}$), то $D X = 0$.
(Если $c = \text{const}$, то $D c = 0$.)
4. Если $c = \text{const}$, то $D(X + c) = D X$.
5. Если $c = \text{const}$, то $D(c X) = c^2 D X$.
6. Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X + Y) = D X + D Y$.

Определение. Величина $\sqrt{D X}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X .

Пример. Случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей с параметрами $n = 2$ и $p = 0.5$. Найти $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 1)$, $E X$, $E X^2$, $D X$ и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. Закон распределения случайной величины X задается таблицей 4.

x_k	0	1	2
$P(X = x_k)$	1/4	1/2	1/4

Таблица 4. Закон распределения X

$$P(X \leq 1) = \sum_{x_k \leq 1} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_k \geq 1} P(X = x_k) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$E X = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + x_3 P(X = x_3) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1,$$

$$E(X^2) = x_1^2 P(X = x_1) + x_2^2 P(X = x_2) + x_3^2 P(X = x_3) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2},$$

$$D X = E(X^2) - (E X)^2 = 1\frac{1}{2} - 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{D X} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается следующей формулой:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти $P(X \leq 1/2)$, $P(X \geq 1/2)$, $P(1/4 \leq X \leq 1/2)$, плотность p_X , $E X$, $E X^2$, $D X$.

Решение.

$$P(X \leq 1/2) = F_X(1/2) = \frac{1}{2},$$

$$P(X \geq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(1/4 \leq X \leq 1/2) = F_X(1/2) - F_X(1/4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$p_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = \int_0^1 x p_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx = \int_0^1 x^2 p_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

$$D X = E(X^2) - (E X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Пример. Плотность распределения случайной величины X задается следующей формулой:

$$p_X(x) = \begin{cases} c & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Найти: c , $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1)$, $P(1/2 \leq X \leq 1)$, $E X$, $E X^2$, $D X$.

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1.$$

Таким образом

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = \int_0^2 p_X(x) dx = \int_0^2 c dx = c \int_0^2 dx = c x \Big|_0^2 = c(2 - 0) = 2c.$$

Откуда $c = 1/2$, и, значит,

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Далее получим

$$P(X \leq 1/2) = \int_{-\infty}^{1/2} p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4},$$

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 dx = \frac{1}{2} x \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (2 - 1) = \frac{1}{2},$$

$$P(1/2 \leq X \leq 1) = \int_{1/2}^1 p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx = \frac{1}{2} x \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4},$$

$$E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx = \int_0^2 x p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx = \int_0^2 x^2 p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3},$$

$$D X = E(X^2) - (E X)^2 = 1 \frac{1}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}.$$

15 Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

15.1 Неравенство Чебышева

Числовые характеристики случайных величин позволяют получить некоторые оценки распределений вероятностей случайных величин.

Теорема. 1. Пусть $X \geq 0$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}.$$

2. При любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

15.2 Закон больших чисел

Теорема. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют (конечное) математическое ожидание $EX_k = a$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Замечание. Оказывается (в силу закона больших чисел), что если n достаточно велико, то с большой вероятностью

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \approx a.$$

15.3 Центральная предельная теорема

Теорема. Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную ненулевую дисперсию, то при $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

где $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, Φ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Замечание. Обозначим $Z_n = (S_n - ES_n)/\sqrt{DS_n}$. Оказывается (в силу центральной предельной теоремы), что распределение случайной величины Z_n похоже на распределение стандартной нормальной случайной величины (т. е. нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

16 Задачи

1. Опишите как множество пространство элементарных событий, соответствующее следующему случайному эксперименту: два раза подбрасывают монету. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы один герб.
2. Опишите как множество пространство элементарных событий, соответствующее следующему случайному эксперименту: из коробочки с 3 белыми и 2 черными шарами наугад вынимают 1 шар. Найдите вероятность того, что вытащенный шар будет белого цвета.
3. В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика последовательно, один за другим, вынимают 2 шара. а) Найти вероятность того, что оба вытащенных шара будут белого цвета. б) Найти вероятность того, что оба вытащенных шара будут одного цвета.

4. В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика последовательно, один за другим, вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 вытасненных шара будут белого цвета.
5. В ящике лежат 3 белых и 2 черных шара. Из ящика последовательно, один за другим, вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что второй вытасненный шар будет белым.
6. В ящике 8 теннисных мячей, среди которых 5 новых. Для первой игры наугад выбирают 1 мяч, который после игры возвращают обратно. Для второй игры снова берут 1 мяч. Найти вероятность того, что он новый (после 1-ой игры новый мяч становится старым).
7. На улице гололед и 2 студента независимо друг от друга спешат на занятия. Вероятность упасть для первого студента — 0.1, для второго студента — 0.2. а) Найти вероятность того, что оба студента упадут. б) Найти вероятность того, что ни один из студентов не упадет. в) Найти вероятность того, что хотя бы один из студентов упадет.
8. На улице гололед и 3 студента независимо друг от друга спешат на занятия. Вероятность упасть для первого студента — 0.1, для второго студента — 0.2, для третьего студента — 0.3. Найти вероятность того, что все 3 студента упадут.
9. Вероятность выпадения герба при бросании очень гнутой монеты равна $1/3$. Монета бросается 3 раза. Найти вероятность того, что выпадет 0 гербов, 1 герб, 2 герба, 3 герба.
10. Правильную монету честно бросают 4 раза. Найти вероятность того, что число выпавших гербов равно числу выпавших решек.
11. Правильную монету честно бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) равно два раза; б) менее двух раз (< 2); в) не менее двух раз.
12. Всхожесть семян — 80%. Найти вероятность того, что из 5 посаженных семян прорастет: а) 4, б) 5, в) больше 3, г) меньше 4, д) ни одного, е) хоть одно.
13. Правильную монету честно бросают 100 раз. Приблизленно (используя теорему Муавра–Лапласа) найти вероятность того, что число выпавших гербов заключено между 45 и 55. ($\Phi(1) = 0.8413447453$).
14. Всхожесть семян данного растения равна 90%. Посажено 400 семян. Приблизленно (используя теорему Муавра–Лапласа) найти вероятность того, число проросших семян будет заключено между 354 и 372. Найти вероятность того, число проросших семян будет больше 354. Найти вероятность того, число проросших семян будет меньше 372. ($\Phi(-1) = 0.1586552539$, $\Phi(2) = 0.9772498682$).
15. Продано 2000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течении года равна 0.001. Какова вероятность отказа двух элементов за год? ($e^{-2} = 0.1353352832$).
16. Распределение вероятностей дискретной случайной величины X задается следующей таблицей:

x_i	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.3	0.3	0.2	p

Найти: p , $P(X > 0)$, $P(X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$, EX , EX^2 , DX , среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

17. Распределение вероятностей дискретной случайной величины X задается следующей таблицей:

x_i	-2	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.1	0.4	0.3	p

Найти: p , $P(X > 0)$, $P(X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$, EX , EX^2 , DX , среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

18. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается следующей формулой:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x/2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: $P(X \leq 1)$, $P(X < 1)$, $P(X > 1.5)$, $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$, плотность p_X , EX , EX^2 , DX .

19. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается следующей формулой:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2/4 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: $P(X \leq 1/2)$, $P(X < 1/2)$, $P(X < 3/2)$, $P(X > 3/2)$, $P(1/2 \leq X \leq 3/2)$, плотность p_X , EX , EX^2 , DX .

20. Плотность распределения случайной величины X задается следующей формулой:

$$p_X(x) = \begin{cases} c & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найти: c , $P(X \leq 1/2)$, $P(X < 1/2)$, $P(X > 1/2)$, $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$, EX , EX^2 , DX .

Список литературы

1. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. — М.: АСТ, Астрель, 2001. — 656 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. школа, 2003. — 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высш. школа, 2004. — 404 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. — Издательство: Питер, 2009. — 464 с.

5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожеевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов втузов. В 2-х частях. — М.: Высш. шк., 1986. Ч.1 — 304 с. Ч.2 — 416 с.
6. *Лычкин В.Н.* Высшая математика: Методические указания и контрольные задания. — М.: Всесоюзн. с.-х. ин-т заоч. образования, 1991. — 79 с.
7. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. — СПб.: Изд-во “Лань”. 1999. — 224 с.
8. *Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1983. — 160 с.
9. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере. — М.: ИНФРА-М, 2003. — 544 с.
10. *Некруткин В.В.* Медленный курс теории вероятностей.