УДК 519.2

Б.Ф.Кирьянов

К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА СИСТЕМ

Институт электронных и информационных систем НовГУ

A simple method of detection of weighting coefficient of parameters of multiparametric models of integral performance systems index, which are assigned by linear algebraic expression is presented in the work.

Введение

Качество или эффективность многих систем различного назначения нередко характеризуют одним интегральным показателем (ИП). К таким показателям относятся показатели надежности функционирования многих технических систем, показатели экономической эффективности и окупаемости в экономике, уровни социально-экономического развития регионов, рейтинги в образовании и спорте и др. ИП удобно задавать с помощью соответствующих линейных моделей, согласно которым ИП является, в частности, взвешенной алгебраической суммой нескольких существенных, изменяющихся во времени параметров. Достоинством таких моделей является линейная зависимость приращения ИП от приращения любого учитываемого им параметра.

Кроме переменных параметров или показателей системы (ПС), характеризующих количественно соответствующие свойства системы, в выражения для ИП входят весовые коэффициенты (веса) K_i этих показателей — не изменяющиеся параметры модели. В большинстве случаев [1,2 и др.] линейные алгебраические выражения, задающие класс рассматриваемых многопараметрических моделей ИП, имеют вид

$$\text{ИП} = \sum_{i=1}^{n} K_i \text{ПС}_i, \qquad (1)$$

где весовые коэффициенты принимают положительные значения, если увеличение показателей системы, к которым они относятся, вызывает увеличение ИП, или отрицательные, если увеличение ПС приводит к уменьшению ИП. При этом ИП и все ПС являются безразмерными величинами (используются относительные значения ПС).

Обычно к рассматриваемым моделям предъявляется требование нормированности ИП, т. е. модель должна обеспечить изменение ИП в заданном интервале, чаще всего в [0, 1]. В целом выбор значений K_i, учитывающих требования нормированности ИП, обеспечения необходимой чувствительности ИП [3] в выбранном интервале его изменения, а также степень важности различных ПС для оценки качества рассматриваемой системы, является непростой задачей, которую предстоит выполнить экспертам — специалистам по данной системе, скорее всего совместно с математиками.

В связи с указанным автор ставит задачу разработки простой методики определения весовых коэффициентов ПС при разработке многопараметрических моделей ИП качества систем различного назначения и различной физической природы, которая свела бы к минимуму усилия экспертов при выборе значений весовых коэффициентов в этих моделях. При этом предполагается, что модель задается линейным алгебраическим уравнением и необходимо обеспечить условие $\text{ИП} \in [0, 1]$. Решение задачи обеспечения принадлежности ИП другому множеству положительных значений аналогично предлагаемому.

Результаты исследования

Каждое слагаемое $K_i\text{ПС}_i$ выражения (1) определяет долю ИП (положительную или отрицательную), вносимую в него *i*-м показателем системы. Будем называть эту долю вкладом $\text{В}K_i$ *i*-го ПС в ИП. Обычно при изменении любого из ПС знак его вклада не изменяется. Ограничиваясь рассмотрением этого, характерного для большинства систем случая, представим выражение (1) в обобщенном виде:

$$\text{ИП} = A - B + C = \sum_{i=1}^{m} K_i\text{ПС}_i - \sum_{i=m+1}^{n} K_i\text{ПС}_i + C, \quad (2)$$

где A — сумма вкладов, принимающих только положительные значения, B — сумма модулей вкладов, принимающих только отрицательные значения, C — постоянная составляющая (число), которую предлагается добавить в выражение для ИП для реализации необходимого смещения интервала его возможных значений (сделать, например, эти значения только положительными). Очевидно, максимальное значение $\text{ИП}_{макс}$ достигается в том случае, когда $A = A_{макс}$ и $B = 0$, а минимальное — в случае $A = 0$ и $B = B_{макс}$. Переменные величины A и B можно рассматривать как обобщенные параметры линейной модели ИП качества систем.

Анализ поставленной задачи показывает, что методика ее решения должна быть различной для систем, ИП качества которых будет использоваться только для системы в целом или только для отдельных ее подсистем (ИП одноцелевого назначения), и для систем, ИП качества которых будет использоваться как для системы в целом, так и для анализа и сравнения подсистем (ИП многоцелевого назначения).

Модель ИП одноцелевого назначения, в которой можно принять $C + A_{макс} = 1$ и $C - B_{макс} = 0$, является простейшей. В этом случае $A_{макс} + B_{макс} = 1$, поэтому согласно рекомендованному экспертами соотношению вкладов $\text{В}K_i$ на эти вклады можно разделять отрезок [0, 1]. Вероятность выхода ИП из указанного отрезка не равна нулю, и поэтому при таком выходе следует применять операцию ограничения ИП по уровням 0 или 1.

Показатели качества систем, а следовательно, и ИП, как правило, являются случайными величинами. При этом функция плотности $f(\text{ИП})$ отлична от нуля на некотором промежутке $[\text{ИП}_{мин}, \text{ИП}_{макс}]$, где $\text{ИП}_{мин} = A_{мин} - B_{макс} + C$ и $\text{ИП}_{макс} = A_{макс} - B_{мин} + C$, а график ее обычно имеет колоколообразную форму (рис.1). Причем основные изменения ИП во времени обычно происходят в существенно более узком промежутке, чем $[\text{ИП}_{мин}, \text{ИП}_{макс}]$ (график 1 на рис.1 для случая $\text{ИП} \in [0, 1]$ при $C = 0$).

В связи с указанным рекомендуется выбирать разделяемый на вклады $\text{В}K_i$ промежуток $[\text{ИП}_{мин}, \text{ИП}_{макс}]$ системы несколько большим, чем [0,1], увеличивая при этом чувствительность ИП к изменениям ПС_i, т. е. динамичность модели, что важно для практического использования ИП. В этом случае распределение ИП становится непрерывно-дискретным (график 2 на рис.1).

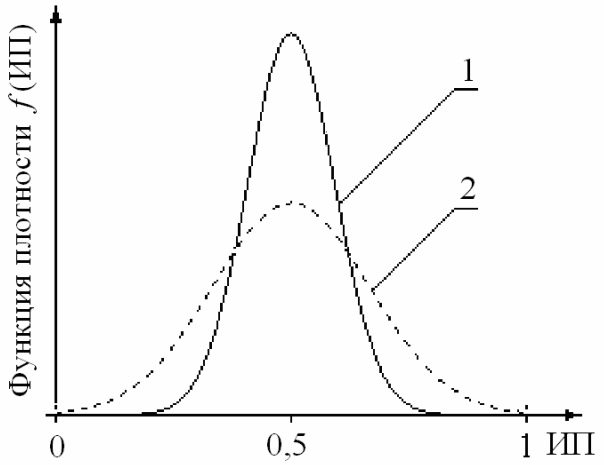


Рис.1. Два варианта распределения ИП: $A_{макс} + B_{макс} < 1$ (1) и $A_{макс} + B_{макс} = 1{,}1$ (2)

Разумеется, выход ИП за пределы выбранного промежутка его изменения должен иметь очень малую вероятность. В целом за значение этого промежутка $\Delta\text{ИП}_{сист}$ изменения ИП качества системы можно рекомендовать принять величину $A_{макс} + B_{макс} = 1{,}1$. При этом не ограничиваемые значения ИП будут при-

надлежать промежутку [–0,05, 1,05]. Но величину «обрезаемых» участков функции плотности для каждой конкретной задачи можно подбирать и с помощью моделирования по допустимому значению указанной вероятности.

Таким образом, при предлагаемом методе реализуется компромисс между динамичностью ИП и вероятностью ограничения ИП по значениям 0 или 1.

После выбора величины промежутка $[ИП_{мин}, ИП_{макс}]$ в соответствии с рекомендацией экспертов производится разделение его на вклады $ВК_i$. Заметим, что при выдаче этой рекомендации экспертам достаточно указать лишь сколько процентов от общей суммы вкладов должен составлять каждый $ВК_i$ что, очевидно, не потребует от них математических усилий. Затем, используя средние значения показателей системы $ПС_{icp}$, определяются весовые коэффициенты этих показателей:

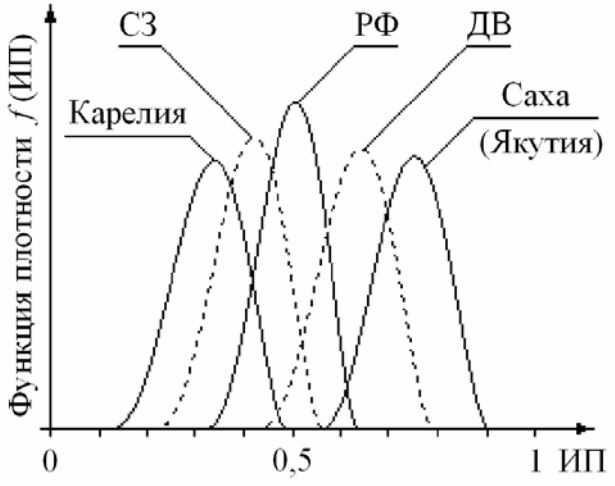
$$K_i = ВК_i / ПС_{icp}, \qquad (3)$$

Последним шагом предлагаемой методики является определение значения числа *C*. Поскольку среднее значение ИП целесообразно выбрать равным 0,5, то

$$C = 0{,}5 - A + B. \qquad (4)$$

Модель ИП многоцелевого назначения должна учитывать то, что распределения ИП качества подсистем обычно отличаются как друг от друга, так и от распределения ИП качества системы в целом. Промежуток значений ИП, на котором функция плотности $f(ИП)$ хотя бы для одной подсистемы отлична от нуля, как правило, превышает промежуток $\Delta ИП_{сист}$, на котором отлична от нуля $f(ИП)$ для системы в целом (кроме случая, когда эти функции для всех подсистем совпадают).

В качестве примера на рис.2 приведены графики аппроксимированных гистограмм функций плотности ИП уровня жизни населения в 1985 — 2005 гг. для РФ в целом, двух федеральных округов, средние



значения ИП которых более всего отличаются от среднего значения ИП для РФ, равного 0,5, и двух административных единиц этих округов с минимальным и максимальным средним значением ИП. Значения ИП определялись согласно выражению

$$ИП = 0{,}5\frac{СДД_{ае}ПМ_{РФ\,ср}}{СДД_{РФ\,ср}ПМ_{ае}},$$

в котором СДД — среднедушевой доход населения рассматриваемой административной единицы (ае) РФ или РФ в целом, ПМ — прожиточный минимум населения указанной административной единицы или РФ в рассматриваемом году (квартале, месяце), $СДД_{РФ\,ср}$ и $ПМ_{РФ\,ср}$ — средние значения СДД и ПМ для РФ за рассмотренный период (21 год). Значения СДД и ПМ находятся в соответствии с выражением вида (2). Очевидно, что для РФ среднее значение $ИП_{ср}$ получается равным 0,5.

В рассмотренном примере ИП уровня жизни населения федеральных округов распределяются на промежутке в 1,9 раза большем, чем ИП уровня жизни населения РФ в целом, а для их административных образований указанное превышение составило 2,5 раза. Причем с увеличением числа подсистем дисперсия ИП системы имеет тенденцию уменьшаться. Можно показать, что в общем случае, когда ИП системы определяется как средневзвешенное значение соответствующих ИП подсистем, при неограниченном увеличении числа подсистем среднее квадратическое значение ИП системы стремится к нулю, т. е. $f(ИП)$ стремится к δ-функции.

Следовательно, для моделей ИП качества систем многоцелевого назначения величина промежутка $\Delta ИП_{сист}$, используемого для расчета весовых коэффициентов модели, должна быть такой, чтобы не ограничиваемые уровнями 0 и 1 ИП качества всех подсистем не выходили из промежутка [–0,05, 1,05]. Статистический анализ распределений ИП качества нескольких систем с подсистемами позволяет предложить следующее эмпирическое выражение для промежутка $\Delta ИП_{сист}$, используемого для указанной цели:

$$\Delta ИП_{сист} = A + B = 1{,}1\, n^{-k}. \qquad (5)$$

В этом выражении 1,1 — значение $\Delta ИП_{сист}$ для модели ИП одноцелевого назначения, *n* — количество подсистем рассматриваемой системы, не разделяемых на подсистемы, а *k* — число, большее нуля. Для различных систем числа *k*, естественно, могут отличаться. Обычно они находятся в промежутке [0,2, 0,3] и зависят от дисперсий ИП подсистем.

Отметим, что значение степени числа указанных подсистем в этом выражении должно гарантировать невозможность «ощутимого» искажения распределений ИП качества подсистем при возможном выходе ИП качества подсистем из [0, 1] и в то же время удовлетворить противоречащее этому стремление повышения чувствительности всех ИП.

Таким образом, расчет параметров модели ИП качества систем многоцелевого назначения можно выполнить, пользуясь следующей методикой.

1. Согласно выражению (5) определяется мак-

симально возможное значение промежутка $\Delta\text{ИП}_{сист}$ изменения ИП. Сумма $A_{макс} + B_{макс}$ обобщенных составляющих модели принимается равной $\Delta\text{ИП}_{сист}$.

2. С участием экспертов выполняется разбиение суммы $A_{макс} + B_{макс}$ на вклады $\text{В}K_i$ параметров системы в эту сумму и согласно выражениям (2) и (4) находятся значения обобщенных параметров A и B модели ИП и число C.

3. Используя средние статистические значения переменных параметров системы в целом, согласно выражению (3) вычисляются значения всех весовых коэффициентов модели.

Пример. Построим модель ИП здоровья населения Российской Федерации (система), ее федеральных округов (7 подсистем, имеющих свои подсистемы) и административных единиц федеральных округов (71 подсистема — республики, края, области и автономные округа, не разделяемые на более мелкие образования). Предварительный вариант такой модели рассматривался в [4]. Анализ причинно-следственных связей основных факторов, влияющих на показатели здоровья населения, показывает, что большинство этих показателей в значительной степени зависит от качества окружающей среды в рассматриваемом регионе, от эффективности работы системы здравоохранения, образа жизни населения и социально-экономических условий жизни. К основным показателям здоровья населения, публикуемым в государственной статистике и зависящим от указанных факторов, можно отнести общую рождаемость (ОРЖ — характеризует воспроизводство населения), среднюю продолжительность предстоящей жизни при рождении (СППЖ — расчетный показатель, аккумулирующий повозрастные показатели смертности), заболеваемость (общую заболеваемость по обращениям населения в учреждения здравоохранения — ОЗО), первичную инвалидность (ПИНВ) и общую смертность (ОСМ). Заболеваемость и смертность можно делить на возрастные группы, а среднюю продолжительность предстоящей жизни — учитывать отдельно для мужского и женского населения.

При определении средних значений указанных пяти показателей рассматриваемой системы (РФ) на интервале за 1985 — 2005 гг. были получены следующие значения: ОРЖ = 11,367, СППЖ = 66,691 лет, ОЗО = 1183,784, ПИНВ = 7,476, ОСМ = 13,581 (значения этих безразмерных показателей приведены в расчете на 1000 человек населения).

Выполняем операции соответственно трем шагам предложенной методики определения весовых коэффициентов.

1. Пусть одна и та же модель ИП будет использоваться как для РФ в целом, так и для семи ее федеральных округов и всех 71 административных образований этих округов. Выберем для рассматриваемых моделей значение k в выражении (5), равное, например, 0,24. Тогда получим: $\Delta\text{ИП}_{сист} = 1{,}1 \cdot 71^{-0{,}24} \cong 0{,}4$, т. е. $A_{макс} + B_{макс} = 0{,}4$. Если бы модель ИП строилась только для РФ в целом и ее федеральных округов, то можно было бы повысить чувствительность ИП, выбрав $\Delta\text{ИП}_{сист} = 1{,}1 \cdot 7^{-0{,}24} \cong 0{,}69$.

2. Учитываем рекомендацию экспертов по разбивке $\Delta\text{ИП}_{сист}$ на вклады $\text{В}K_i$ показателей здоровья ($\text{В}K_{\text{ОРЖ}} = \text{В}K_{\text{ОЗО}} = \text{В}K_{\text{ПИНВ}} = 25\%$, $\text{В}K_{\text{СППЖ}} = \text{В}K_{\text{ОСМ}} = 12{,}5\%$) и принимаем: $\text{В}K_{\text{ОРЖ}} = \text{В}K_{\text{ОЗО}} = \text{В}K_{\text{ПИНВ}} = 0{,}1$, $\text{В}K_{\text{СППЖ}} = \text{В}K_{\text{ОСМ}} = 0{,}05$. Следовательно, $A = 0{,}15$, $B = 0{,}25$ и $C = 0{,}6$.

3. Согласно выражению (3) находим значения всех весовых коэффициентов для ПС модели ИП.

Таким образом, выражение (5) для модели ИП с числовыми значениями всех коэффициентов принимает вид

$$\text{ИП} = (8{,}796\,\text{ОРЖ} + 0{,}750\,\text{СППЖ} - 0{,}0814\,\text{ОЗО} - 3{,}682\,\text{ОСМ} - 13{,}377\,\text{ПИНВ})/1000 + 0{,}6. \quad (6)$$

Рис.3 иллюстрирует динамику ИП здоровья населения РФ и двух федеральных округов (до 2000 г. районов) РФ, полученных на основе модели (6) и имеющих максимальное и минимальное среднее значение ИП за 1985 — 2005 гг. Максимальное изменение ИП для РФ за рассмотренный 21-летний интервал составило 0,13 при максимально возможном 0,4. Среднее

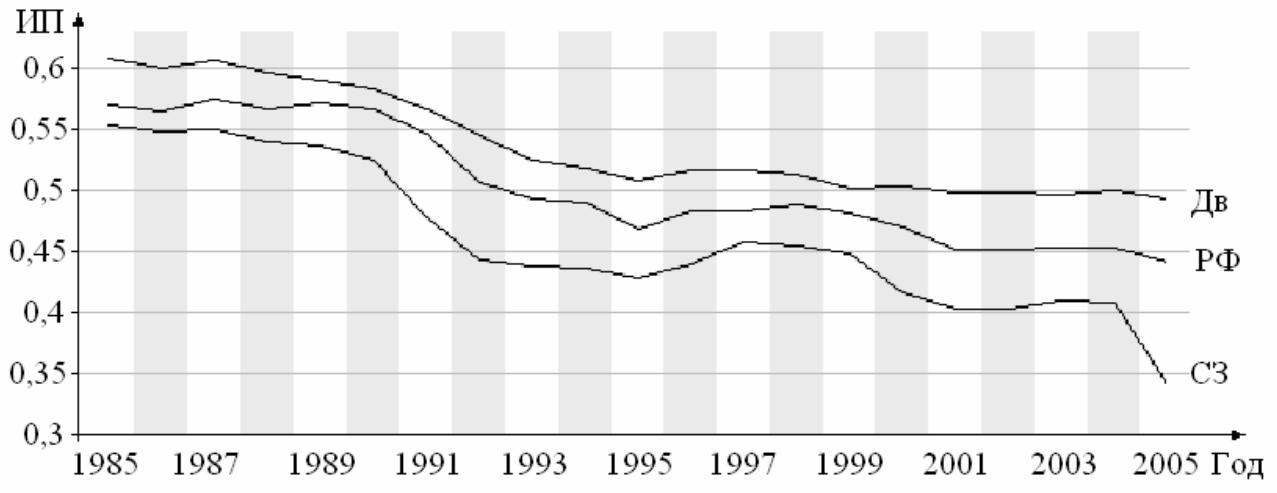


Рис.3. Динамика интегральных показателей здоровья населения Российской Федерации, Дальневосточного (Дв) и Северо-Западного (СЗ) федеральных округов

значение ИП здоровья населения РФ равно 0,5.

С уменьшением численности населения регионов дисперсия ИП здоровья их населения обычно увеличивается. Это характерно для большинства административных единиц федеральных округов. Так, в приведенном на рис.4 примере разброс значений ИП составляет 0,303, что в 1,75 раза больше, чем для Северо-Западного федерального округа.

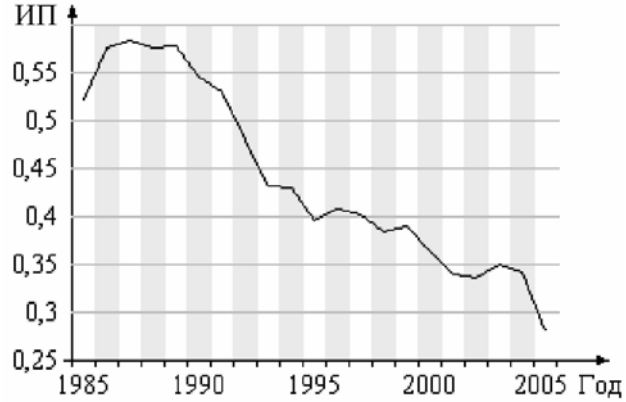


Рис.4. Динамика интегрального показателя здоровья населения Новгородской области

Заключение

Предложенная методика позволяет рассчитывать математические модели интегрального показателя качества широкого класса систем, задаваемые линейным алгебраическим уравнением. Она позволяет свести к минимуму участие экспертов — специалистов по системам анализируемого класса в расчете весовых коэффициентов параметров указанных моделей. Разработанные согласно этой методике модели интегрального показателя могут использоваться как для систем, так и для входящих в них подсистем, что позволяет просто сравнивать качество этих подсистем для принятия соответствующих решений. Получаемые модели могут использоваться в течение длительного времени, не требуя изменения параметров.

1. Рутковский Н.В. Математические модели микроэкономики. В.Новгород: НовГУ, 2006. 52 с.
2. Швецов А.Г., Токмачёв М.С. Методические подходы к оценке морфофункционального статуса организма // Здоровье населения и приоритеты здравоохранения: Сб. науч тр ННЦ СЗО РАМН. М.: Медицина, 2005. Т.4. С.162-167.
3. Кирьянов Б.Ф., Медик В.А., Токмачёв М.С. // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. 2004. № 26.С.114-116.
4. Кирьянов Б.Ф., Медик В.А. Усовершенствованные многопараметрические модели интегрального показателя общественного здоровья населения // Охрана здоровья населения — национальный приоритет государственной политики: Сб. науч. тр. ННЦ СЗО РАМН. М.: Медицина, 2006. Т.5. С.67-73.